Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 18.9.2017

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha (1-x) x^n (2-x)^n \,, \qquad x \in \mathbf{R} \,.$$

Si calcoli poi il seguente limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ per i valori $\alpha = -1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$.

2. Data la curva espressa in coordinate polari $\rho = \pi - \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ se ne calcoli la lunghezza.
Dopodiché si provi a disegnarne, in maniera approssimativa, il sostegno.

3. Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il campo di vettori definito da $F(x,y) = (2y+1, 2x-1)$. Si dica se è conservativo e, in caso affermativo, se ne calcoli un potenziale.
Inoltre si calcoli il lavoro svolto da F lungo tutti i seguenti cammini:

$$\gamma_n(t) = \big(t, \operatorname{sen} nt\big), \qquad t \in [0, 2\pi], \quad n \in \mathbf{N},\, n \geqslant 0 \,.$$

(Si osservi che per $n = 0$ il cammino dato è $\gamma_0(t) = (t, 0)$.)

4. Data la funzione di due variabili $f(x,y) = (x+y)^2 + x$ si denoti con Γ il suo luogo degli zeri. Si dica intorno a quali punti $(x_o, y_o) \in \Gamma$ l'insieme Γ risulta grafico di una funzione (rispetto alla variabile x oppure alla variabile y), ovvero il sostegno di una curva cartesiana.
In particolare, dopo aver verificato che $(-1, 2) \in \Gamma$ e che Γ è localmente grafico di una funzione g della variabile x intorno a tale punto, si calcoli lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine intorno a tale punto di g.

****

Ricordo - Per integrare la funzione $\sqrt{1+t^2}$ una possibilità è quella di sostituire a t la quantità $\operatorname{senh} x$.

Soluzione della traccia del 18.9.2017

1. Si osservi che $f_n(x)$ può essere scritta come

$$n^\alpha(1-x)\big(x(2-x)\big)^n = n^\alpha(1-x)\big(2x-x^2\big)^n.$$

La quantità

$$\big(2x-x^2\big)^n$$

converge se e solo se

$$-1 < 2x - x^2 \leqslant 1$$

e si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\big(2x-x^2\big)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < 2x-x^2 < 1 \\ 1 & \text{se } 2x-x^2 = 1 \\ +\infty & \text{se } 2x-x^2 > 1 \quad \text{(cosa mai verificata)} \\ \text{non esiste} & \text{se } 2x-x^2 \leqslant -1. \end{cases}$$

Studiando la quantità $2x - x^2$ si ottiene che

$$\begin{aligned} &2x-x^2 \leqslant 1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}, \\ &-1 < 2x-x^2 < 1 \qquad \text{per } x \in \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right), \\ &2x-x^2 = 1 \qquad \text{per } x = 1, \\ &2x-x^2 = -1 \qquad \text{solo per } x = 1-\sqrt{2} \ \text{ oppure } \ x = 1+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Quindi si ha che le funzioni

$$g_n(x) := (2x-x^2)^n$$

convergono uniformemente alla funzione nulla negli intervalli

$$\left[1-\sqrt{2}+\delta, 1-\delta\right] \cup \left[1+\delta, 1+\sqrt{2}-\delta\right]$$

per ogni $\delta > 0$ (e sufficientemente piccolo). Poiché $g_n(x) \leqslant 1$ per ogni x si ha che

$$h_n(x) := (1-x)g_n(x) = (1-x)(2x-x^2)^n$$

convergono uniformemente a zero negli intervalli

$$\left[1-\sqrt{2}+\delta, 1+\sqrt{2}-\delta\right] \tag{1}$$

per ogni $\delta > 0$ (e sufficientemente piccolo) e negli estremi non c'è convergenza poiché

$$h_n(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}(-1)^n, \qquad h_n(1+\sqrt{2}) = -\sqrt{2}(-1)^n.$$

Venendo alle f_n si conclude quindi che

$$\text{per } \alpha < 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right], \\ \text{non esiste} & \text{se } x \notin \left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]; \end{cases}$$

$$\text{per } \alpha \geqslant 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), \\ \text{non esiste} & \text{se } x \notin \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right). \end{cases}$$

Dallo studio delle funzioni g_n e h_n si ha che la convergenza delle f_n è anche uniforme, nell'intervallo chiuso $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ per $\alpha < 0$, mentre per $\alpha = 0$ la convergenza è uniforme solo negli intervalli del tipo (1). Per $\alpha > 0$ il caso va studiato a parte, ma valutiamo prima gli integrali. Poiché l'intervallo $[0,1]$ è contenuto in $\left[1-\sqrt{2}+\delta, 1+\sqrt{2}-\delta\right]$ per un opportuno $\delta > 0$ dalla convergenza uniforme a zero si conclude immediatamente che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$$

per ogni $\alpha \leqslant 0$, in particolare per i due valori richiesti $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$.
Nel caso $\alpha = 1$ eseguiamo il calcolo diretto:

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 n(1-x)(2x-x^2)^n\, dx\,.$$

Poiché

$$\int_0^1 (1-x)(2x-x^2)^n\, dx = \frac{1}{2}\left.\frac{\left(2x-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

si deduce

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Non ci può quindi essere convergenza uniforme per $\alpha = 1$, e nemmeno per $\alpha > 1$, poiché in questi casi non vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
Volendo concludere lo studio della convergenza uniforme si ha che f_n assume il suo valore massimo nei due punti

$$1 - \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \qquad \text{e} \qquad 1 + \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$$

e il suo valore massimo è dato da

$$n^\alpha \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}\left(1 - \frac{n+1}{(2n+1)^2}\right)^n$$

che converge a 0 per $\alpha < 1/2$. C'è quindi convergenza uniforme per $\alpha < 1/2$ e non c'è per $\alpha \geqslant 1/2$.

2. Possiamo esprimere la curva in forma parametrica nella maniera più semplice con

$$\gamma(\vartheta) = \big((\pi - \vartheta)\cos\vartheta, (\pi - \vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\big).$$

Allora, derivando, si ottengono

$$\gamma'(\vartheta) = \big(-\cos\vartheta - (\pi - \vartheta)\operatorname{sen}\vartheta, -\operatorname{sen}\vartheta + (\pi - \vartheta)\cos\vartheta\big),$$
$$\big|\gamma'(\vartheta)\big|^2 = 1 + (\pi - \vartheta)^2.$$

Per integrare il modulo di γ' prima sostituiamo $\pi - \vartheta$ con t e poi t con $\operatorname{senh} x$. Ricordando che

$$\operatorname{senh} x + \cosh x = e^x$$

e che

$$\big(\cosh x\big)^2 - \big(\operatorname{senh} x\big)^2 = 1$$

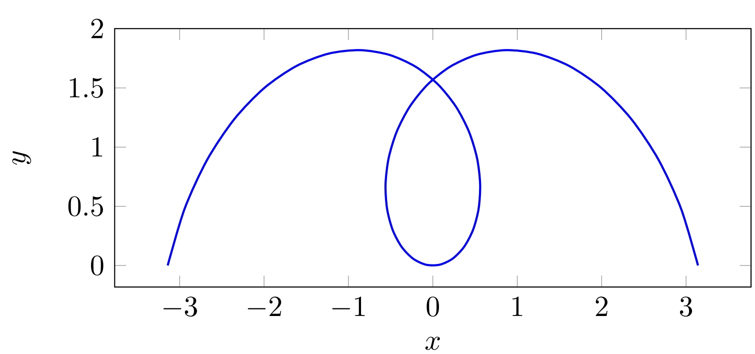
si ottiene che x in termini di t è dato da

$$x(t) = \log\big(t + \sqrt{1 + t^2}\big).$$

Per cui la lunghezza è data da

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\pi - \vartheta)^2}\, d\vartheta = -\int_{\pi}^{-\pi} \sqrt{1 + t^2}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + t^2}\, dt = \\
&= \int_{\log(\sqrt{1+\pi^2}-\pi)}^{\log(\sqrt{1+\pi^2}+\pi)} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 x}\, \cosh x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cosh^2 x\, dx = \\
&= \frac{1}{4} \int_{\log(\sqrt{1+\pi^2}-\pi)}^{\log(\sqrt{1+\pi^2}+\pi)} (e^{2x} + e^{-2x} + 2)\, dx = \\
&= \frac{1}{8}\big((\sqrt{1+\pi^2}+\pi)^2 - (\sqrt{1+\pi^2}-\pi)^2\big) + 2\log(\sqrt{1+\pi^2}+\pi) - 2\log(\sqrt{1+\pi^2}-\pi) = \\
&= \frac{1}{4}\pi\sqrt{1+\pi^2} + 2\log\frac{\sqrt{1+\pi^2}+\pi}{\sqrt{1+\pi^2}-\pi}\,.
\end{aligned}$$

Il sostegno è rappresentato in figura.



3. I potenziali si trovano facilmente e sono dati da

$$f(x,y) = 2xy + x - y + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Valutiamo il lavoro lungo γ_0:

$$\int_0^{2\pi} \langle F(\gamma_0(t)), \gamma_0'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle (1, 2t-1), (1,0)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Altrimenti, visto che si è trovato un potenziale, si può valutare il lavoro di F lungo γ_0 come

$$f(2\pi, 0) - f(0,0) = 2\pi\,.$$

Poiché il campo è conservativo e il sostegno di ognuna delle curve γ_n è contenuto nel dominio di F (che è $\mathbf{R}^2$) il lavoro lungo ognuno degli altri cammini è sempre 2π dal momento che il punto iniziale e il punto finale di ogni cammino sono gli stessi.

4. Si ha che

$$f_x(x,y) = 2x + 2y + 1, \qquad\qquad f_y(x,y) = 2x + 2y.$$

È quindi ovvio che non possano annullarsi contemporaneamente entrambe le derivate parziali di f e quindi il teorema del Dini vale in ogni punto di Γ.
È immediato verificare che il punto $(x_o, y_o) = (-1, 2)$ appartiene a Γ e che $f_y(-1,2) \neq 0$. Per cui possiamo scrivere localmente il luogo degli zeri di f come grafico di una funzione g dipendente dalla variabile x, cioè esistono un intorno I di $x_o = -1$ ed un intorno J di $y_o = 2$ ed una funzione $g : I \to J$ tali che

$$(x,y) \in \Gamma \cap \big(I \times J\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = g(x) \quad \big(\text{e quindi } f\big(x, g(x)\big) = 0\big).$$

Poiché f è infinitamente derivabile lo sarà anche la funzione g, e in particolare possiamo ricavare lo sviluppo fino al secondo ordine. Lo sviluppo di g sarà

$$g(x) = g(-1) + g'(-1)(x+1) + \frac{1}{2}\, g''(-1)(x+1)^2 + o\big((x+1)^2\big)$$

e basterà quindi ricavarsi le prime due derivate di g. Sappiamo che

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \qquad \text{per } (x,y) \in I \times J$$

e che la derivata seconda può essere ricavata derivando l'espressione

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))g'(x) = 0,$$

oppure

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}\,.$$

Si ricavano

$$g'(-1) = -\frac{3}{2}, \qquad g''(-1) = -\frac{1}{4},$$

da cui lo sviluppo richiesto

$$g(x) = 2 - \frac{3}{2}(x+1) - \frac{1}{8}(x+1)^2 + o\big((x+1)^2\big).$$