Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 25.1.2018

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{x}{2} \right)^n + n \left(\frac{x-3}{4} \right)^n \right], \qquad x \in [-2, 7].$$

2. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = |x| - |y|$ nell'insieme

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

3. Si studi il seguente integrale improprio al variare di $\alpha > 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^\alpha dx$$

4. Si consideri il campo di vettori

$$F(x, y) = \left(\frac{2xy^2}{1 - x^2y^2}, \frac{2x^2y}{1 - x^2y^2} \right).$$

Si trovi il dominio massimale di F, si dica di quante componenti connesse è composto e quali sono, si dica se in ognuna di tali componenti il campo è conservativo ed eventualmente se ne trovino tutti i potenziali.

Soluzione della traccia del 18.9.2017

1. Cominciamo studiando le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x-3}{4}\right)^n .$$

separatamente. Studiamole separatamente. Cominciamo da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} x^n , \qquad x \in \mathbf{R} . \tag{1}$$

Il raggio di convergenza è dato da

$$\left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\,2^n}} \right)^{-1} = 2$$

per cui la serie in questione converge in $(-2, 2)$. Per quanto riguarda gli estremi si verifica facilmente che la serie converge in -2 (per il criterio di Leibniz) e diverge in 2. Per cui l'insieme di convergenza (puntuale) è

$$[-2, 2).$$

La serie (1) converge uniformemente in $[-2, b]$ per ogni $b \in (-2, 2)$ e totalmente in $[a, b]$ per ogni $a, b \in (-2, 2)$, $a < b$. La convergenza totale segue dai risultati teorici, quella uniforme in $[-2, 0]$ può essere ottenuta usando il criterio di Leibniz.
La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x-3}{4}\right)^n , \qquad x \in \mathbf{R} , \tag{2}$$

ha raggio di convergenza

$$\left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{4^n}} \right)^{-1} = 4$$

per cui converge in $(-1, 7)$. Si verifica che questo è anche l'insieme di convergenza, poiché negli estremi la serie non converge.
Limitandoci all'insieme $[-2, 7]$ si ha quindi che l'insieme di convergenza puntuale della serie data è quindi l'insieme

$$[-2, 2) \cap (-1, 7) = (-1, 2).$$

in $[-2, 7] \setminus (-1, 2)$ la serie non converge. La serie converge totalmente, e uniformemente, in $[a, b]$ per ogni $a < b$, $[a, b] \subset (-1, 2)$.
Si osservi che è possibile anche calcolare la somma di tale serie: cominciando da (1).

Si fissi dapprima $x \in (-1,2)$ e si scelga un qualunque intervallo $[a,b]$ che sia contenuto in $(-1,2)$ e che contenga x.
Usiamo il fatto che

$$\frac{1}{n}x^n = \int_0^x t^{n-1}\,dt.$$

Poiché in $[a,b]$ vi è convergenza uniforme è possibile scambiare il segno di integrale con quello di serie. Si ha che

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{x^n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} dt = \\
&= \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} dt = \\
&= \int_0^x \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^{n} dt = \\
&= \int_0^x \frac{1}{2}\frac{2}{2-t}\,dt = -\log(2-t)\Big|_0^x = \log\frac{2}{2-x}\,.
\end{aligned}$$

Per la serie (2) usiamo il fatto che

$$nx^n = x(nx^{n-1}) = x\frac{d}{dx}x^n\,.$$

Analogamente quindi si ha, sempre per la convergenza uniforme in $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{x-3}{4}\right)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x-3}{4}\,4\frac{d}{dx}\left(\frac{x-3}{4}\right)^n = \\
&= (x-3)\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x-3}{4}\right)^n = \\
&= (x-3)\frac{d}{dx}\frac{x-3}{7-x} = (x-3)\,\frac{4}{(7-x)^2}\,.
\end{aligned}$$

In conclusione la serie data converge puntualmente in $(-1,2)$ e uniformemente e totalmente in ogni $[a,b] \subset (-1,2)$ alla funzione

$$f(x) = \log\frac{2}{2-x} + \frac{4(x-3)}{(7-x)^2}\,.$$

2. La funzione f è continua in C (e anche su tutto $\mathbf{R}^2$) e l'insieme C è compatto, per cui l'esistenza del massimo e il minimo di f nell'insieme C sono garantiti.

Dove f è derivabile le sue derivate non si annullano mai. Infatti possiamo parametrizzare l'insieme C con

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

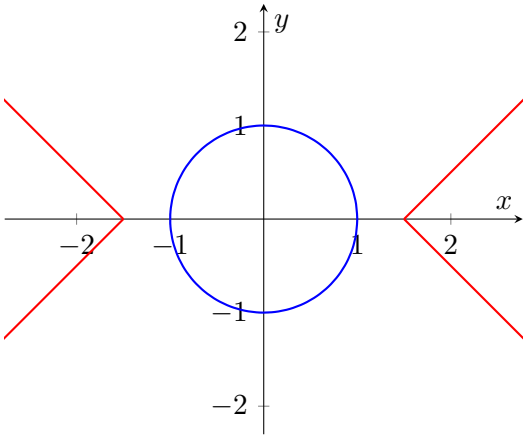
e derivare $f\circ\gamma$ nei quattro intervalli $(0,\pi/2)$, $(\pi/2,\pi)$, $(\pi,3\pi/2)$, $(3\pi/2,2\pi)$, derivata che non si annulla mai. Per i valori di $t=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$ la funzione $f\circ\gamma$ non è derivabile, per cui nei punti corripondenti a questi quattro valori va calcolato il valore di f e vanno poi confrontati tra loro i quattro valori ottenuti. Poiché

$$f(1,0)=1,\quad f(0,1)=-1,\quad f(-1,0)=1,\quad f(0,-1)=-1$$

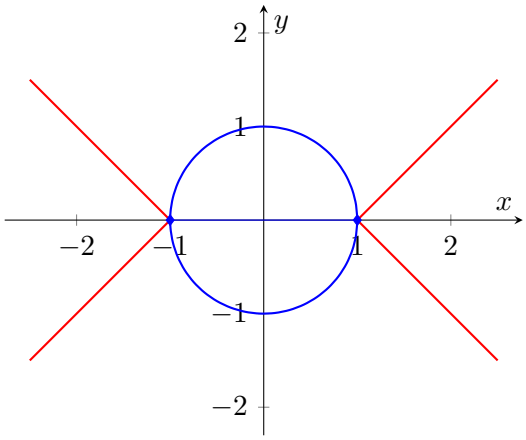
i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono di massimo, i punti $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono di minimo.

Alternativamente si possono studiare gli insiemi di livello. Nelle figure che seguono sono mostrati alcuni insiemi di livello di f, evidenziati in rosso, mentre in blu è evidenziato l'insieme C. Sono marcati in blu i due punti di massimo, in rosso i due punti di minimo.

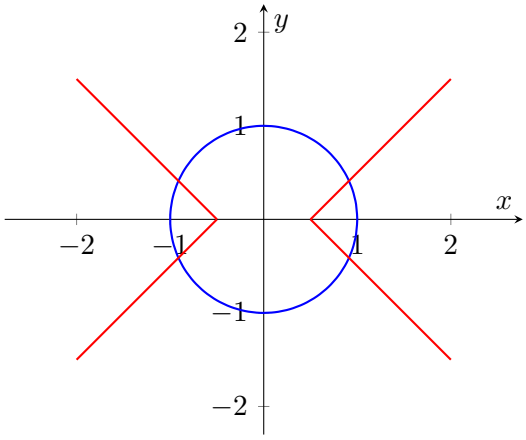
Insieme di livello 3/2



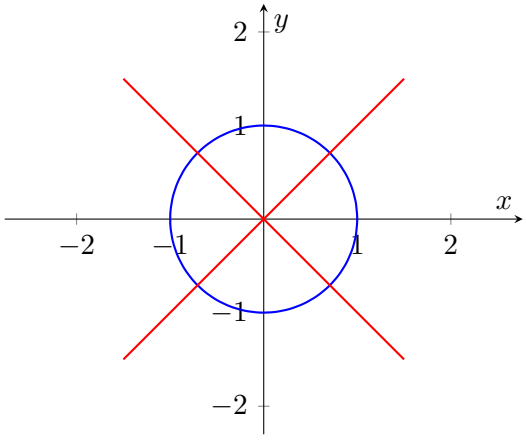
Insieme di livello 1



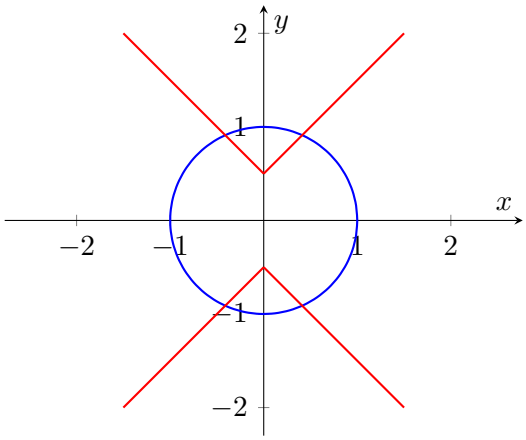
Insieme di livello $1/2$



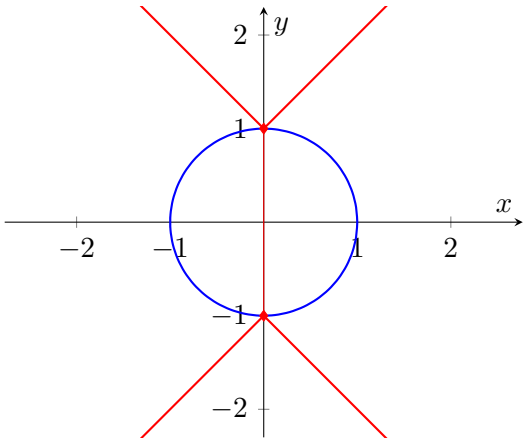
Insieme di livello 0



Insieme di livello -1/2



Insieme di livello -1



3. L'unico problema è dato dal fatto che nell'estremo $\frac{\pi}{2}$ il coseno si annulla. Sviluppando il coseno in tale punto si ottiene

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\frac{\pi}{2} - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + o\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + o\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - x + o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

per cui

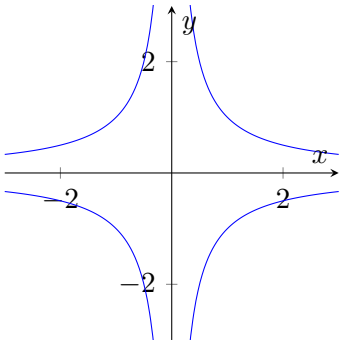
$$\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} = 1\,.$$

Di conseguenza si ha che l'integrale è finito (converge positivamente) per $\alpha \in (0,1)$, è infinito (diverge positivamente) per $\alpha \geqslant 1$.

4. Il campo non è definito se $1 - x^2y^2 = 0$, cioè per

$$x^2y^2 = 1,$$

che rappresenta i quattro rami d'iperbole tracciati in figura:



per cui le componenti connesse sono cinque. In ognuna di queste il campo è conservativo. Infatti

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{4xy}{(1-x^2y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\,.$$

Per cui il campo ammette potenziale; se chiamiamo E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 le cinque componenti si ha che in ognuna delle cinque componenti il potenziale è dato da

$$-\log|1 - x^2y^2| + c_i\,, \qquad i = 1, \dots 5.$$

dove $c \in \mathbf{R}$ e può variare variando componente. Se E_1 denota la componente contenente l'origine, più precisamente si ha che i potenziali sono

$$\begin{aligned} &-\log(1 - x^2y^2) + c_1 \qquad \text{in } E_1\,,\\ &-\log(x^2y^2 - 1) + c_i \qquad \text{in } E_i, \quad i = 2,3,4,5. \end{aligned}$$