Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 5.7.2018

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la curva

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \operatorname{sen} t\right), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

i) si dica se la curva è semplice e in quali punti non è regolare;
ii) si calcoli il versore tangente, ove possibile, e nei punti di non regolarità si calcolino i limiti, da destra e da sinistra, del versore tangente;
iii) si disegni approssimativamente il sostegno di γ con particolare attenzione attorno ai punti in cui γ non è regolare.

2. Si studi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, la serie di funzioni definite per $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)} \frac{1}{n^\alpha + x^\alpha}\,.$$

3. Dato il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{2(y-x)}{1-(y-x)^2}, \frac{2(x-y)}{1-(y-x)^2}\right)$$

si dica qual è il dominio massimale nel quale è definito F, quante e quali sono le sue componenti connesse e se il campo in tali componenti è conservativo. Eventualmente se ne trovino i potenziali. Dopodiché si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_\gamma (F_1 dx + F_2 dy)$ lungo la curva γ orientata da $(0,0)$ a $(1,1)$ definita da

$$\gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, y = \frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)}{1 + (1-x)\cos x},\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \right\}$$

4. Si dica se se esistono il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,y\,\log\left(y(1+x^2)\right) & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

definita nell'insieme

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{1+x^2}, -2 \leqslant x \leqslant 2 \right\}$$

ed eventualmente li si trovi.

Soluzione della traccia del 5.7.2018

1. Se la seconda componente di γ soddisfa

$$\gamma_2(t) = \gamma_2(s)$$

si ha che sia $t \in [0, \pi/2)$ oppure $t \in [\pi, 3\pi/2)$ ed in entrambi i casi e $s = \pi - t$. Ma in entrambi i casi non si può avere che la prima componente soddisfa

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(s),$$

per cui la curva risulta semplice. Calcolando la derivata prima si ha

$$\gamma'(t) = \big(-3\cos^2 t \, \operatorname{sen} t, \cos t \big)$$

per cui eguagliando entrambe le componenti di γ' a zero si ottengono i due punti

$$t = \frac{\pi}{2}\,, \qquad t = \frac{3\pi}{2}\,.$$

Calcoliamo il versore tangente per t diverso da questi due valori:

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{9\cos^4 t \, \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = |\cos t\,| \sqrt{9\cos^2 t \, \operatorname{sen}^2 t + 1}.$$

Calcoliamo:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\gamma(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Valutiamo il limite della prima componente:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\gamma_1(t)}{|\gamma'(t)|} &= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-3\cos^2 t \, \operatorname{sen} t}{|\cos t\,| \sqrt{9\cos^2 t \, \operatorname{sen}^2 t + 1}} = \\ &= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-3\,|\cos t\,| \, \operatorname{sen} t}{\sqrt{9\cos^2 t \, \operatorname{sen}^2 t + 1}} = 0 = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\gamma_1(t)}{|\gamma'(t)|}\,. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la seconda componente invece:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\gamma_2(t)}{|\gamma'(t)|} &= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos t}{|\cos t\,| \sqrt{9\cos^2 t \, \operatorname{sen}^2 t + 1}} = 1\,, \\ \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\gamma_2(t)}{|\gamma'(t)|} &= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos t}{|\cos t\,| \sqrt{9\cos^2 t \, \operatorname{sen}^2 t + 1}} = -1\,. \end{aligned}$$

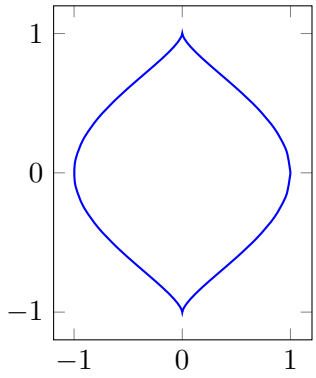
In conclusione:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\gamma(t)}{|\gamma'(t)|} = (0, 1)\,, \qquad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\gamma(t)}{|\gamma'(t)|} = (0, -1)\,.$$

Analogamente

$$\lim_{t \to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\gamma(t)}{|\gamma'(t)|} = (0, -1)\,, \qquad \lim_{t \to \frac{3\pi}{2}^+} \frac{\gamma(t)}{|\gamma'(t)|} = (0, 1)\,.$$

Il sostengo della curva è



con delle cuspidi a tangente verticale in corrispondenza dei punti di non regolarità.

2. Si osservi che, detta f_n la funzione $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)} \frac{1}{n^\alpha + x^\alpha}$, poiché si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f_n(x)}{\frac{n}{x} \frac{1}{n^\alpha + x^\alpha}} = 1,$$

dal criterio del confronto si deduce che la serie converge in $(0, +\infty)$ per ogni $\alpha > 2$. Per quanto riguarda la converge uniforme si ha che

$$f_n \quad \text{non converge uniformemente a zero in } (0, +\infty)\,.$$

Infatti

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} |f_n(x)| = +\infty\,.$$

Di conseguenza la serie $\sum_n f_n$ non può convergere uniformemente in $(0, +\infty)$.
Si ha però che la serie converge uniformemente in $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$. Infatti essendo decrescenti entrambe le funzioni

$$x \mapsto \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}, \qquad x \mapsto \frac{1}{n^\alpha + x^\alpha},$$

si ha che

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [\delta, +\infty)} |f_n(x)| &= \sup_{x \in [\delta, +\infty)} \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)} \sup_{x \in [\delta, +\infty)} \frac{1}{n^\alpha + x^\alpha} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta}{n}\right)} \frac{1}{n^\alpha + \delta^\alpha} \leqslant \frac{n}{\delta} \frac{1}{n^\alpha + \delta^\alpha}\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza vi è convergenza totale, e quindi anche uniforme, in ogni intervallo $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$, solo per $\alpha > 2$ ovviamente.

3. Il campo è definito per tutti i punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$1 - (y - x)^2 \neq 0\,,$$

cioè nelle tre regioni

$$D_1 = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, y > x+1\big\},$$
$$D_2 = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x-1 < y < x+1\big\},$$
$$D_3 = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, y < x-1\big\},$$

tutte e tre semplicemente connesse. Si verifica facilmente che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

quindi il campo è conservativo in ognuna delle tre regioni D_i, $i = 1, 2, 3$.
Per calcolare l'integrale si osservi che la curva è interamente contenuta in D_2: infatti i punti $(0,0)$ e $(1,1)$ appartengono a D_2 e inoltre entrambe le componenti della seguente parametrizzazione di γ

$$t \mapsto \left(t, \frac{\operatorname{sen}(\pi x/2)}{1+(1-x)\cos x}\right), \qquad t \in [0,1],$$

sono crescenti. Poiché il campo è conservativo l'integrale lungo γ è uguale all'integrale lungo η, per ogni altra curva η che abbia il sostegno contenuto in D_2 e che unisca i punti $(0,0)$ e $(1,1)$, orientata allo stesso modo di γ.
Scegliendo

$$\eta(t) = (t,t), \qquad t \in [0,1]$$

si può scrivere

$$\int_\gamma (F_1\,dx + F_2\,dy) = \int_\eta (F_1\,dx + F_2\,dy) = 0\,.$$

Alternativamente si può trovare il potenziale, che risulta

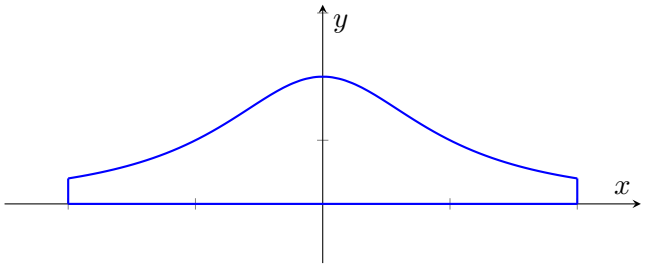
$$f_i(x,y) = \log|1-(y-x)^2| + c_i\,, \quad i = 1,2,3, \qquad \text{nella regione } D_i,$$

dopodiché valutare (f_2 il potenziale della regione D_2)

$$f_2(1,1) - f_2(0,0) = 0\,.$$

4. L'insieme E, rappresentato in figura, risulta chiuso e limitato, cioè compatto. Per assicurarsi che il problema ammetta soluzione bisogna verificare che la funzione sia continua. Ricordiamo che

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \log t = 0 \qquad \text{per qualunque } \alpha > 0.$$



Si fissi ora un punto $(x_o, 0)$ con $x_o \in [-2, 2]$. Si ha

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(x_o,\,0)\\(x,\,y)\,\in\,E}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(x_o,\,0)\\y\,>\,0}} \frac{x}{1+x^2}\Big[y(1+x^2)\,\log\big(y(1+x^2)\big)\Big] = 0$$

e di conseguenza la funzione f risulta continua nel suo dominio. Il problema ammette soluzione.
All'interno di E la funzione è C^1, per cui svolgendo le derivate si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\log\big(y(1+x^2)\big) + \dfrac{2\,x^2 y}{1+x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\log\big(y(1+x^2)\big) + x = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \log\big(y(1+x^2)\big) = -1 \iff y(1+x^2) = e^{-1}\,.$$

Se $x = 0$ dalla prima equazione si ricava che $y = 1$. Se invece $y(1+x^2) = e^{-1}$ dalla prima equazione si ricava

$$0 = -y + \frac{2\,x^2 y}{1+x^2} = y\left[\frac{2\,x^2}{1+x^2} - 1\right]$$

che è soddisfatto (siamo all'interno di E!) per

$$\frac{2\,x^2}{1+x^2} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = 1\,.$$

In conclusione si hanno i tre punti stazionari

$$(0,1), \quad \left(-1, \frac{1}{2e}\right), \quad \left(1, \frac{1}{2e}\right)$$

che risultano tutti interni ad E, per cui possibili candidati.
Andiamo a verificare quello che succede al bordo. In una parte del bordo la funzione è costantemente nulla. Vediamo di analizzare cosa succede nei due tratti che possiamo parametrizzare semplicemente fissando la variabile x. Se $x = -2$ si ha

$$f(-2, y) = -2\,y\log(5y).$$

Annullando la derivata si ottiene

$$y = \frac{1}{5e}\,.$$

Per cui, per ora, sul bordo si hanno i due seguenti candidati (il secondo si trova in maniera analoga al primo):

$$\left(-2, \frac{1}{5e}\right), \quad \left(2, \frac{1}{5e}\right)$$

e tutti i punti $(x, 0)$ del dominio, sui quali la funzione è costante. Vediamo l'ultima parte del bordo. Anche qui la funzione è costantemente nulla: infatti

$$f\left(x, \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x}{1+x^2} \log\left(\frac{1}{1+x^2}\,(1+x^2)\right) = 0\,.$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} f(x,0) &= 0, \\ f\left(x, \frac{1}{1+x^2}\right) &= 0, \\ f(0,1) &= 0, \\ f\left(-1, \frac{1}{2e}\right) &= \frac{1}{2e}, \\ f\left(1, \frac{1}{2e}\right) &= -\frac{1}{2e}, \\ f\left(-2, \frac{1}{5e}\right) &= \frac{2}{5e}, \\ f\left(2, \frac{1}{5e}\right) &= -\frac{2}{5e}. \end{aligned}$$

Di conseguenza il minimo è $-\frac{1}{2e}$ assunto in $\left(1, \frac{1}{2e}\right)$ e il massimo è $\frac{1}{2e}$ assunto in $\left(-1, \frac{1}{2e}\right)$.