Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 16.7.2018

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si dica per quali valori di $\alpha \geqslant 0$ e $\beta \in \mathbf{R}$ il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_1^{+\infty} \big(\alpha + \operatorname{sen} x\big) \log\left(3 - 2\cos\frac{1}{x^\beta}\right)\, dx\,.$$

2. Si studi la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx^2} \operatorname{sen} nx$$

dopodiché, detta f la funzione somma definita nell'insieme di convergenza C, si dica se, ed eventualmente in che insieme, f risulta derivabile.

3. Si dica se esistono, ed eventualmente li si trovi, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + 2y^2 + 1}$$

definita nell'insieme $D = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \leqslant 1 - x^2\big\}$.
Si studi poi lo stesso problema con f definita nell'insieme

$$E = D \cup \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, y \geqslant 0, -1 \leqslant x \leqslant 1\big\}.$$

4. Si dica in quali punti di $\mathbf{R}^2$ la seguente funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} x \log\left(1 + \left|\dfrac{y}{x}\right|^{1/2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua, derivabile e differenziabile, calcolando in particolare tutte le derivate direzionali nei punti $(0,y)$, $y \in \mathbf{R}$.

Soluzione della traccia del 16.7.2018

1. Cominciamo da $\alpha = 0$. Derivando la funzione f si ottiene (si ricordi che $x \geqslant 1$) che $f' < 0$. Infatti

$$f'(x) := \frac{1}{\left(3 - 2\cos\frac{1}{x^\beta}\right)} \left[-2\,\beta\,\frac{1}{x^{\beta+1}}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^\beta}\right] < 0\,.$$

Di conseguenza, poiché la funzione è decrescente e infinitesima all'infinito per $\beta > 0$, se $\alpha = 0$ l'integrale dato converge per $\beta > 0$.
Facendo lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per la funzione coseno e al primo ordine per la funzione logaritmo si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) := \log\left(3 - 2\cos\frac{1}{x^\beta}\right) &= \log\left(3 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^{2\beta}} + o\left(\frac{1}{x^{2\beta}}\right)\right)\right) = \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{x^{2\beta}} + o\left(\frac{1}{x^{2\beta}}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{x^{2\beta}} + o\left(\frac{1}{x^{2\beta}}\right)\,. \end{aligned}$$

Per $\alpha > 0$ si ha che

$$\begin{aligned} &\int_1^{+\infty} (\alpha + \mathrm{sen}\,x)\log\left(3 - 2\cos\frac{1}{x^\beta}\right)\,dx = \\ &\quad = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c (\alpha + \mathrm{sen}\,x)\log\left(3 - 2\cos\frac{1}{x^\beta}\right)\,dx = \\ &\quad = \lim_{c\to+\infty}\left[\int_1^c \mathrm{sen}\,x\,\log\left(3 - 2\cos\frac{1}{x^\beta}\right)\,dx + \alpha\int_1^c \log\left(3 - 2\cos\frac{1}{x^\beta}\right)\,dx\right]\,. \end{aligned}$$

Poiché il primo dei due integrali converge per ogni valore di $\beta > 0$, ma il secondo diverge a $+\infty$ se $2\beta \leqslant 1$, mentre converge se $2\beta > 1$, si conclude che l'integrale dato

$$\begin{aligned} &\text{converge se e solo se} \quad \alpha = 0 \text{ e } \beta > 0 \quad \text{o} \quad \alpha > 0 \text{ e } \beta > \frac{1}{2}, \\ &\text{mentre diverge} \quad \text{in tutti gli altri casi.} \end{aligned}$$

2. Definiamo le funzioni $f_n(x) := e^{-nx^2}\mathrm{sen}\,nx$. Per $x \neq 0$ si ha facilmente che

$$|f_n(x)| \leqslant \left(e^{-x^2}\right)^n\,.$$

Poiché $e^{-x^2} < 1$ per ogni x diverso da zero, si ha che la serie converge per tale valore di x.
Per $x = 0$ si ha che $f_n(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, per cui la serie converge a zero per $x = 0$.

La convergenza non può però essere uniforme in $\mathbf{R}$: infatti considerando l'intervallo $[-\delta, \delta]$ e considerando il punto

$$x_n = \frac{\pi}{2\,n}$$

si ha che

$$f_n(x_n) = e^{-n\,x_n^2}\,\mathrm{sen}\,n\,x_n = e^{-\frac{\pi^2}{4n}}\,.$$

Di conseguenza si ha che, qualunque sia $\delta > 0$ il punto $x_n \in [0, \delta]$ per n sufficientemente grande e inoltre

$$\sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x)| \geqslant e^{-\frac{\pi^2}{4n}} \to_{n\to+\infty} 1\,.$$

Un analogo discorso può essere fatto in $[-\delta, 0]$. Se non c'è convergenza uniforme di f_n a zero in $[-\delta, \delta]$ non può nemmeno esserci convergenza uniforme della serie di funzioni alla funzione limite f in $[-\delta, \delta]$.
Se però consideriamo la semiretta $[\delta, +\infty)$ si ha che

$$|f_n(x)| \leqslant e^{-n\,\delta^2} \qquad x \in [\delta, +\infty)$$

quindi la serie

$$\sum_n f_n(x) \qquad \text{converge uniformemente in } \ [\delta, +\infty)$$

per il criterio del confronto con la serie

$$\sum_n e^{-n\,\delta^2}\,,$$

serie geometrica di ragione $e^{-\delta^2} \in (0, 1)$. Analogo ragionamente si può fare in $(-\infty, -\delta]$.
Si conclude che la serie data

converge puntualmente in $\mathbf{R}$,
converge uniformemente in $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$,
converge totalmente in $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

per qualunque $a < 0$ e per qualunque $b > 0$.
Non converge né uniformemente né, tantomeno, totalmente in nessun intervallo contenente lo zero.

Detta f la somma della serie definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ si che

$$f_n'(x) = -2\,n\,x\,e^{-nx^2}\mathrm{sen}\,nx + n\,e^{-nx^2}\cos nx = n\,e^{-nx^2}\big[\cos nx - 2x\,\mathrm{sen}\,nx\big]\,.$$

si possono trattare separatamente i due addenti e concludere che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,e^{-nx^2}\cos nx$$

converge puntualmente in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ perché

$$\left|n\,e^{-nx^2}\cos nx\right|\leqslant n\big(e^{-x^2}\big)^n$$

e applicando il criterio della radice n-esima si conclude che la serie converge per ogni $x\neq 0$. Per $x=0$ si ha facilmente che il termine n-esimo è uguale ad n, per cui la serie diverge positivamente in 0.
Ovviamente, dette g_n le funzioni $g_n(x)=n\,e^{-nx^2}\cos nx$, poiché

$$g_n \text{ non convergono uniformemente a zero in } (0,+\infty)$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_n g_n \text{ non converge uniformemente a zero in } (0,+\infty)\,.$$

Inoltre, come fatto per $\sum_n f_n$, si ha convergenza uniforme di $\sum_n g_h$ in $[\delta,+\infty)$ per ogni $\delta>0$.
Ragionando in maniera simile per $x<0$ e poi analogamente anche per la serie

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}2\,n\,x\,e^{-nx^2}\mathrm{sen}\,nx$$

si conclude che la serie

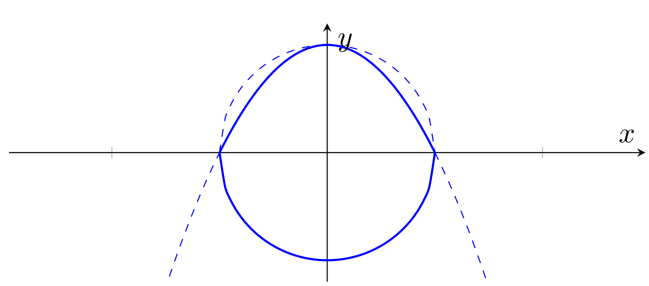
$$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n'(x)\qquad \text{converge puntualmente in } (-\infty,0)\cup(0,+\infty)\,,$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}f_n'(x)\qquad \text{converge uniformemente e totalmente in } (-\infty,a]\cup[b,+\infty)$$

per ogni $a<0$ e $b>0$. Perciò si deduce anche che f è derivabile in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e che per tali valori di x si ha

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n'(x)\qquad .$$

Infatti si ragiona in ogni insieme del tipo $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ con $a<0,b>0$ arbitrari.

3. L'insieme D (rappresentato in figura) è compatto ed f è una funzione continua, il problema ammette soluzione.



Derivando all'interno di D e ponendo uguali a zero le derivate si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x(2y^2 - y + 1) = 0 \\ x^2 - 4yx^2 - 2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i due punti $(0, -1/\sqrt{2})$ e $(0, 1/\sqrt{2})$. Infatti dalla prima equazione si ha che

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad 2y^2 - y + 1 = 0\,.$$

Poiché la seconda possibilità non è mai vera, necessariamente si ha $x = 0$. Inserendo $x = 0$ nella seconda equazione del sistema si trovano i due punti.
Vediamo il bordo. Una parte è parametrizzata da

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \qquad t \in (\pi, 2\pi)$$

e annullando la derivata di

$$f \circ \gamma(t) = \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen} t}{\cos^2 t + 2 \operatorname{sen} t + 1}$$

si ottiene

$$\cos t(2 - \operatorname{sen}^2 t - 6 \operatorname{sen} t) = 0$$

che si annulla solo per $t = 3\pi/2$ (perlomeno nell'intervallo di definizione di γ), valore che corrisponde al punto $(0, -1)$.
Parametrizziamo la parte di bordo superiore con

$$\eta(t) = (t, 1 - t^2) \qquad \text{con } t \in (-1, 1)\,.$$

Annullando la derivata di $f \circ \eta$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2t^4 - 3t^2 + 3} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t(4t^2 - 3) = 0$$

si ottengono i valori $t = 0$, $t = \sqrt{3}/2$, $t = -\sqrt{3}/2$ che corrispondono ai tre punti

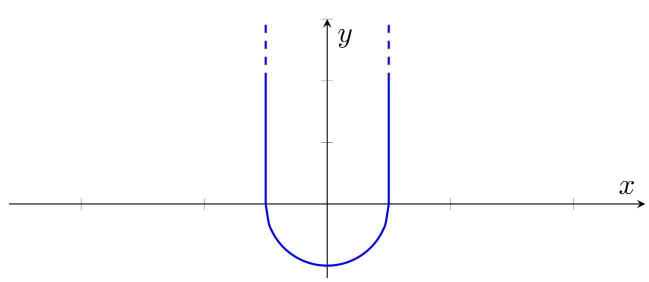
$$(0, 1), \quad (-\sqrt{3}/2, 1/4), \quad (\sqrt{3}/2, 1/4)\,.$$

In conclusione

$$
\begin{aligned}
f(0,-1/\sqrt{2}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}},\\
f(0,1/\sqrt{2}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}},\\
f(0,-1) &= -\frac{1}{3},\\
f(0,1) &= \frac{1}{3},\\
f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right) &= \frac{8}{15},\\
f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right) &= \frac{8}{15},\\
f(-1,0) &= \frac{1}{2},\\
f(1,0) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza $(-1,0)$ e $(1,0)$ sono di massimo, $(0,-1)$ è di minimo.

Per quanto riguarda l'insieme E, rappresentato nella figura sottostante, si ha che i punti critici interni sono gli stessi due trovati in precedenza.
Per quanto riguarda il bordo una parte è la stessa del bordo di D, studiata in precedenza. Per il resto valutiamo prima f sulle curve $\varphi(t) = (-1,t)$ e $\psi(t) = (1,t)$, definite per $t \geqslant 0$, poi faremo il limite all'infinito.



Annullando la derivata della funzione

$$
f(\varphi(t)) = f(\psi(t)) = \frac{1+t}{2t^2+2}
$$

si ottengono (sul bordo di E) i due punti

$$
\left(-1,\sqrt{2}-1\right) \quad \text{e} \quad \left(1,\sqrt{2}-1\right).
$$

Per quanto riguarda il limite all'infinito si ha che, poiché $x \in [-1,1]$ e quindi $x^2 \in [0,1]$,

$$\frac{y}{1+2y^2+1} \leqslant f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2+2y^2+1} \leqslant \frac{1+y}{2y^2+1}$$

e di conseguenza

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,+\infty \\ (x,\,y)\,\in\,E}} f(x,y) = 0.$$

Infine valutando

$$f\big(-1,\sqrt{2}-1\big) = f\big(1,\sqrt{2}-1\big) = 4\big(2-\sqrt{2}\big) > \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3}$$

si deduce che $(0,-1)$ è di minimo e $(-1,\sqrt{2}-1)$ e $(1,\sqrt{2}-1)$ sono di massimo.

4. Ovviamente in ogni punto di $\mathbf{R}^2$ che non stia sull'asse verticale la funzione è continua, derivabile e differenziabile.
Concentriamoci quindi sui punti del tipo $(0,y)$, $y \in \mathbf{R}$. Si osservi che, poiché

$$\log t \leqslant t-1$$

si ha

$$\left| x \log\left(1+\left|\frac{y}{x}\right|^{1/2}\right)\right| \leqslant |x| \left|\frac{y}{x}\right|^{1/2} \leqslant |xy|^{1/2}$$

da cui si deduce la continuità in ogni punto dell'asse verticale.
Per quanto riguarda le derivate direzionali si ha che, fissato un vettore v di modulo 1, con $v_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(0,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[t\,v_1\,\log\left(1+\left|\frac{y+tv_2}{tv_1}\right|^{1/2}\right)\right] = \\
&= \begin{cases} +\infty & \text{se } y \neq 0 \text{ e } v_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } y \neq 0 \text{ e } v_1 < 0 \\ v_1\,\log\left(1+\left|\dfrac{v_2}{v_1}\right|^{1/2}\right) & \text{se } y = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Se invece $v_1 = 0$ la derivata direzionale è chiaramente 0, poiché

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[f(0,y+tv_2)-f(0,y)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[0-0] = 0\,.$$

Di conseguenza la funzione risulta derivabile in tutte le direzioni, tra i punti dell'asse verticale, solo nell'origine, mentre negli altri punti è derivabile solo nelle direzioni $(0,1)$ e $(0,-1)$.
Poiché nei punti $(0,y)$ con $y \neq 0$ non è derivabile e nell'origine le derivate parziali non sono lineari rispetto al vettore v la funzione non è differenziabile in nessuno dei punti $(0,y)$, $y \in \mathbf{R}$.