Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 28.8.2018

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Al variare del parametro $\alpha > 0$ si studi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e - e^{\cos\frac{\sqrt{\log n}}{n^\alpha}}\right)$. Per $\alpha = 1$ si esibisca un esempio di successione $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ che sia asintotica a

$$b_N := \sum_{n=N}^{+\infty}\left(e - e^{\cos\frac{\sqrt{\log n}}{n}}\right)$$

cioè per la quale esiste $\lambda \in (0, +\infty)$ tale che $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{a_N}{b_N} = \lambda$.

2. Si denoti con $\tilde{\Gamma}$ la curva (illimitata) definita da

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, 9z^2 - 16xy = 0\right\} \cap \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 - y = 0\right\}.$$

Una volta definita la curva (limitata) $\Gamma := \tilde{\Gamma} \cap \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x \geqslant 0, x \leqslant 1\right\}$

- se ne calcoli la lunghezza,
- si verifichi che $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) \in \Gamma$ e si calcoli la retta tangente a Γ in tale punto,
- si parametrizzi Γ con il parametro d'arco.

3. Si studi il comportamento della successione di funzioni definite da

$$f_n(x) = \frac{2n^\alpha x}{1 + n^2x^2}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$. Si calcolino poi i limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} x\, f_n(x)\, dx \qquad \text{per i due valori di } \alpha \quad \frac{1}{2} \text{ e } 1\,.$$

4. Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}x^2\,.$$

Soluzione della traccia del 28.8.2018

1. Sviluppiamo dapprima la funzione coseno in 0, poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\log n}}{n^\alpha} = 0$ per ogni $\alpha > 0$, si ha

$$\cos\frac{\sqrt{\log n}}{n^\alpha} = 1 - \frac{\log n}{2\,n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\log n}{n^{2\alpha}}\right).$$

Riscrivendo e sviluppando successivamente la funzione esponenziale si ha

$$\begin{aligned} e - e^{\cos\frac{\sqrt{\log n}}{n^\alpha}} &= e - e^{1-\frac{1}{2}\frac{\log n}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{\log n}{n^{2\alpha}}\right)} = \\ &= e\left[1 - e^{-\frac{1}{2}\frac{\log n}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{\log n}{n^{2\alpha}}\right)}\right] = \\ &= \frac{e}{2}\left[\frac{\log n}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\log n}{n^{2\alpha}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Di conseguenza la serie converge per $\alpha > 1/2$ e solo per $\alpha > 1/2$ (la cosa si può verificare facilmente, ad esempio, con il criterio di condensazione).
Per $\alpha = 1$, valore per il quale la serie è convergente, il termine n-esimo è asintotico a

$$\frac{\log n}{n^2}.$$

Poiché

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

è definitivamente decrescente si ha che

$$\frac{\log n}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

sono confrontabili, nel senso che (per $n \geqslant 2$)

$$\frac{\log n}{n^2} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \frac{\log(n+1)}{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x^2}\,dx\,.$$

Per cui una successione $(a_n)_n$ che soddisfa la richiesta fatta è

$$\begin{aligned} a_N = \sum_{n=N}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x^2}\,dx &= \int_N^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx = \\ &= -\frac{\log x}{x}\Bigg|_N^{+\infty} + \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\log N}{N} + \frac{1}{N}\,. \end{aligned}$$

Questa quantità stima l'errore che si commette considerando il termine N-esimo delle somme parziali

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \left(e - e^{\cos\frac{\sqrt{\log n}}{n^\alpha}}\right)$$

rispetto alla somma della serie $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - e^{\cos \frac{\sqrt{\log n}}{n^\alpha}} \right)$, cioè

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{S - s_N}{a_N} = 1\,.$$

2. La più semplice parametrizzazione di Γ è data da

$$\gamma(t) = \left(t, t^2, \frac{4}{3}\, t^{3/2} \right)\,, \qquad t \in [0,1]\,. \tag{1}$$

Si ha che

$$\gamma'(t) = \left(1, 2\,t, 2\,t^{1/2}\right)\,, \qquad \big|\gamma'(t)\big| = 2t + 1\,.$$

Di conseguenza

$$s(t) = \int_0^t (2\tau + 1)\; d\tau = t^2 + t\,. \tag{2}$$

Da ciò è possibile ricavare t in termini di s scrivendo

$$s(t) + \frac{1}{4} = t^2 + t + \frac{1}{4} = \left(t + \frac{1}{2} \right)^2$$

da cui

$$t(s) = \sqrt{s + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\,.$$

La parametrizzazione di Γ con il parametro d'arco è quindi

$$\eta(s) = \gamma\big(t(s)\big) = \left(\sqrt{s + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2} - \sqrt{s + \frac{1}{4}}, \frac{4}{3} \left(\sqrt{s + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right)\,.$$

Da (2) si ricava che la lunghezza di Γ è

$$\ell = \int_0^1 (2\tau + 1)\; d\tau = 2\,.$$

Per valutare la retta tangente alla curva nel punto richiesto è sufficiente considerare $t = 1/2$ nella parametrizzazione (1) e valutare γ' in $1/2$. Una possibile forma parametrica della retta è

$$r(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3\sqrt{2}} \right) + \left(t - \frac{1}{2} \right) \left(1, 1, \frac{1}{2} \right)\,.$$

3. Per $\alpha > 2$ la successione di funzioni non converge, se non in zero. Infatti

$$\begin{array}{lll}
\text{per } x > 0 & f_n(x) \geqslant \dfrac{2n^\alpha x}{2n^2 x^2} = \dfrac{n^{\alpha-2}}{n^2 x} \to_{n \to +\infty} +\infty \\
\text{per } x = 0 & f_n(x) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}\,, \\
\text{per } x < 0 & f_n(x) \leqslant \dfrac{2n^\alpha x}{2n^2 x^2} = \dfrac{n^{\alpha-2}}{n^2 x} \to_{n \to -\infty} -\infty\,.
\end{array}$$

Per $\alpha = 2$ si ha

$$\begin{aligned} &\text{per } x = 0 \qquad f_n(x) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}\,, \\ &\text{per } x \neq 0 \qquad f_n(x) = \frac{2x}{\frac{1}{n^2} + x^2} \to_{n \to -\infty} \frac{2}{x}\,. \end{aligned}$$

In questo caso la convergenza non può essere uniforme su $\mathbf{R}$, in quanto il limite non è continuo su $\mathbf{R}$.

Infine per $\alpha \in (0, 2)$ si verifica facilmente che f_n converge puntualmente a zero su $\mathbf{R}$. Infatti

$$\begin{aligned} &\text{per } x = 0 \qquad f_n(x) = 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}\,, \\ &\text{per } x \neq 0 \qquad \big|f_n(x)\big| \leqslant \left|\frac{2n^\alpha x}{n^2 x^2}\right| = \left|\frac{2}{n^{2-\alpha} x}\right| \to_{n \to +\infty} 0\,. \end{aligned}$$

Studiamo più in dettaglio f_n per $\alpha \in (0, 2]$. Si ottiene facilmente che f_n ha due punti stazionari, $x = -1/n$ di minimo, $x = 1/n$ di massimo, si annulla in 0 e decade a zero all'infinito. Poiché

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha - 1},$$

e per simmetria nel punto di minimo il valore assoluto di f_n assume il medesimo valore, si deduce immediatamente che

$$\text{per } \ \alpha \in (0, 1) \qquad f_n \quad \text{converge uniformemente a zero in } \mathbf{R}.$$

Per $\alpha \in [1, 2)$ si osservi che non appena si considera $a > 0$ si ha che f_n ristretta alla semiretta $[a, +\infty)$ assume (definitivamente) massimo nel punto a. Per cui (ragionando in maniera analoga per $x < 0$) si deduce che

$$\text{per } \ \alpha \in [1, 2) \qquad f_n \quad \text{converge uniformemente a zero in } (-\infty, b] \cup [a, +\infty)$$

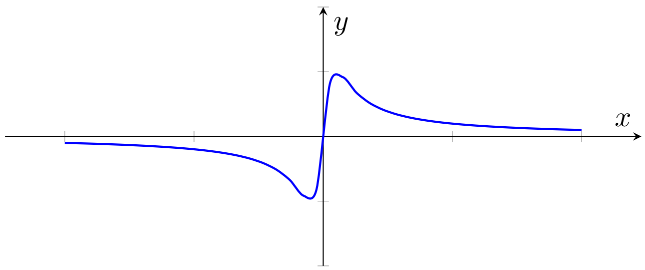
per ogni $b < 0$ e $a > 0$.
Per $\alpha = 2$ (e $x \neq 0$) si ha

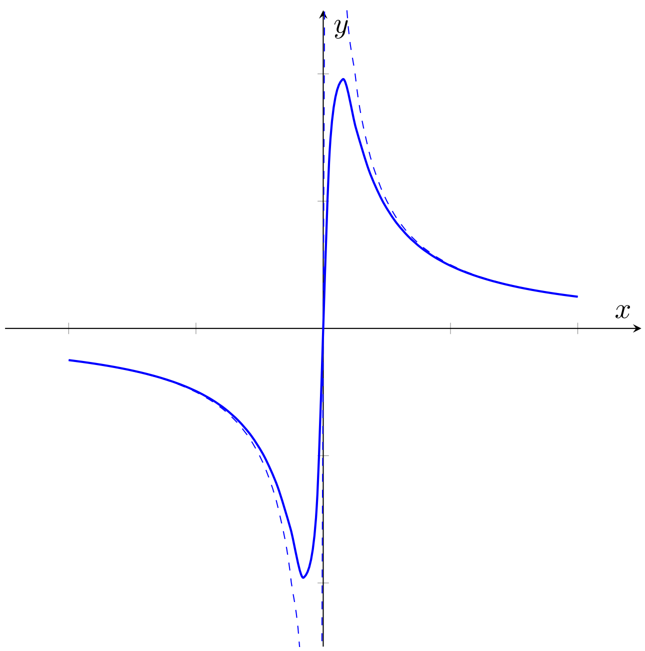
$$\left|f_n(x) - \frac{2}{x}\right| = \left|\frac{2n^2x^2 - 2 - 2n^2x^2}{(1 + n^2x^2)x}\right| = \frac{2}{(1 + n^2x^2)|x|}$$

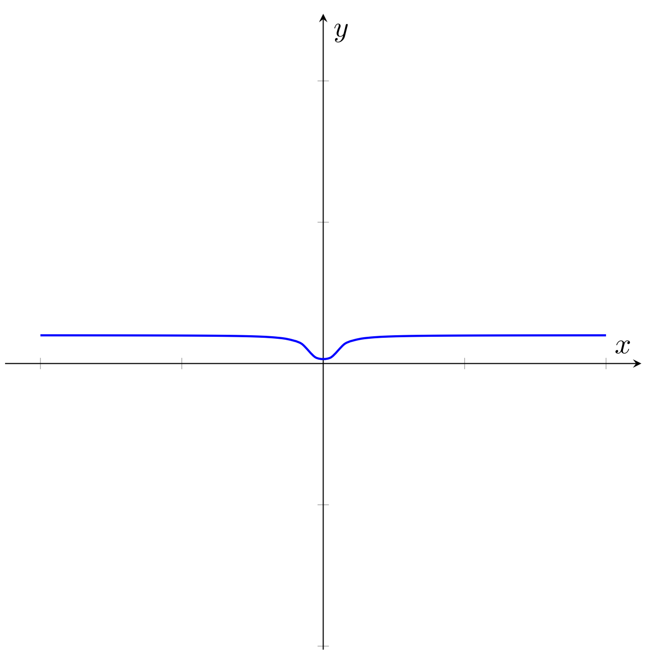
per cui, per ogni $a > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty)} \left|f_n(x) - \frac{2}{x}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(1 + n^2a^2)|a|} = 0\,.$$

Analogo discorso si può fare in $(-\infty, b])$ con $b < 0$.
Nella prima figura è rappresentato un grafico di una f_n per $\alpha < 2$, nella seconda f_n per $\alpha = 2$ e, tratteggiato, il grafico della funzione $2/x$.


y
x


y
x


y
x

Valutiamo ora i limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} x\, f_n(x)\, dx\,.$$

Si ha che per $\alpha = 1/2$, poichè f_n converge uniformemente in $\mathbf{R}$ e l'intervallo di integrazione è limitato, il limite è zero. Anche per $\alpha = 1$ il limite è zero, però bisogna procedere in maniera diversa. Si fissi $\delta > 0$: si ha che in $[-1,-\delta]\cup[\delta,1]$ f_n convergono uniformemente a zero, per cui anche il limite di

$$g_n(x) := x f_n(x)$$

in tale insieme è nullo. Rimane da valutare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta} x\, f_n(x)\, dx\,.$$

Poiché

$$g_n(x) := x f_n(x) = \frac{2\,n\,x^2}{1+n^2x^2}$$

ha come unico punto critico $x = 0$, significa che g_n è non negativa e crescente per $x \geqslant 0$, per cui g_n (che è pari) ammette massimo negli estremi dell'intervallo $[-1,1]$. Di conseguenza

$$|x f_n(x)| = \left|\frac{2\,n\,x^2}{1+n^2x^2}\right| \leqslant g_n(1) = \frac{2\,n}{1+n^2} \leqslant 1$$

si ha che

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} x\, f_n(x)\, dx\right| \leqslant 2\delta\,.$$

Poiché ciò è indipendente dalla scelta di δ concludiamo che il limite è zero.

Altro modo di vederlo è scrivere

$$x f_n(x) = \frac{2\,n\,x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n}\frac{2\,n^2\,x^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n}\frac{2\,n^2\,x^2+2-2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n}\frac{2(1+n^2\,x^2)-2}{1+n^2x^2}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\, f_n(x)\, dx &= \frac{2}{n}\left[\int_{-1}^{1} dx - 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+n^2x^2}\, dx\right] = \\ &= \frac{2}{n}\left[2-\frac{2}{n}\mathrm{arctg}\,(nx)\Big|_{-1}^{1}\right] \to_{n\to+\infty} 0\,.\end{aligned}$$

4. Studiando il sistema $\nabla f = (0,0,0)$, cioè

$$\begin{cases} yx - x = 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - y = 0 \\ z^2 + z = z(z+1) = 0, \end{cases}$$

si ottengono i punti

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (0,0,-1), \quad P_3 = (\sqrt{2},1,0),$$
$$P_4 = (\sqrt{2},1,-1), \quad P_5 = (-\sqrt{2},1,0), \quad P_6 = (-\sqrt{2},1,-1)\,.$$

La matrice hessiana di f è data da

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-1 & x & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z+1 \end{pmatrix}.$$

Valutandola nei punti critici si ottiene

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_6) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Da ciò si ricava immediatamente che P_1 è un punto di sella e P_2 è di massimo locale. Per P_3 si osservi che il determinanate è diverso da zero, per cui tutti gli autovalori sono non nulli, e che la traccia è nulla, quindi almeno un autovalore è positivo e almeno uno è negativo: il punto è di sella.
Il punto P_4 è di sella: il determinante è positivo, per cui almeno un autovalore è positivo, la traccia negativa, per cui almeno uno è negativo. In maniera analoga si ragiona per gli altri due punti, che sono tutti di sella.