Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 18.9.2018

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si trovi lo sviluppo di Taylor nel punto 0, studiandone poi la convergenza, della funzione $(*)$

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2}\, dt\,.$$

2. Si studino i seguenti integrali impropri per i valori di $\alpha = 0, 1, 2$:

$$\int_2^{+\infty} \left[\left(\frac{x \log x + \alpha + \operatorname{sen} x}{x \log x} \right)^{1/3} - 1 \right] dx\,.$$

3. Data la funzione

$$f(x, y) = y^2 + y^2 x^4 - x^2$$

se ne trovino gli insiemi di livello dopodiché si trovino, se esistono, il massimo e il minimo di f nell'insieme $E = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, |y| \leqslant 1, |x| \leqslant 1\big\}$.

4. Dato il campo

$$F(x, y) = \left(\frac{8(x-1)\big((x-1)^2 + y^2 - 1\big)}{2\big((x-1)^2 + y^2\big)^2 - 4\big((x-1)^2 + y^2\big)}\,, \frac{8y\big((x-1)^2 + y^2 - 1\big)}{2\big((x-1)^2 + y^2\big)^2 - 4\big((x-1)^2 + y^2\big)} \right)$$

si dica dove è definito e si calcoli il lavoro svolto dal campo lungo il cammino C orientato positivamente, dove $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, (x-1)^2 + y^2 = 4\}$. F è conservativo?

****

$(*)$ **Ricordo -** $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ in un opportuno intorno di 0

Soluzione della traccia del 18.9.2018

1. Usando lo sviluppo della funzione arcotangente si ha che

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{1}$$

$$\operatorname{arctg} t^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{2n+1} = t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{2n+1}\,. \tag{2}$$

Si osservi che il secondo sviluppo è un $O(t^2)$. Di conseguenza ha senso valutare in $t = 0$ la funzione $t \mapsto \frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2}$ e si ottiene il seguente sviluppo:

$$\frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{2n+1}\,. \tag{3}$$

Il primo sviluppo, il (1), converge per $x \in (-1, 1]$ e uniformemente in $[a, 1]$ per ogni $a \in (-1, 1)$. Gli altri due sviluppi, (2) e (3), convergono, puntualmente e uniformemente, in $[-1, 1]$. La convergenza uniforme segue dal teorema di Leibniz (o anche dal teorema di Abel). Allora possiamo scrivere

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{2n+1}\, dt \qquad \text{per } x \in -[1, 1]\,.$$

Poiché c'è convergenza uniforme della serie integranda in $[-1, 1]$ si ha che per ogni $x \in [-1, 1]$ vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{4n}}{2n+1}\, dt\,.$$

Integrando termine a termine infine si ha, per $x \in [-1, 1]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^x t^{4n}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$

La convergenza è uniforme e totale in $[-1, 1]$.

2. Poiché vale lo sviluppo

$$(1 + t)^\beta = 1 + \beta\, t + o(t)$$

e $\lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha + \operatorname{sen} x}{x \log x} = 0$ si può scrivere

$$\left(1 + \frac{\alpha + \operatorname{sen} x}{x \log x}\right)^{1/3} - 1 = \frac{1}{3} \frac{\alpha + \operatorname{sen} x}{x \log x} + o\left(\frac{\alpha + \operatorname{sen} x}{x \log x}\right)\,.$$

Cominciamo da $\alpha = 0$: il primo dei due termini si integra facilmente, in quanto la funzione $x \mapsto \frac{1}{x \log x}$ è decrescente e si può quindi usare il risultato generale sugli integrali oscillanti. Per quanto riguarda il secondo termine invece la cosa è più delicata, un o piccolo di $\frac{\operatorname{sen} x}{x \log x}$ non necessariamente è integrabile in senso improprio. Ad esempio,

$$g(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x \log x \log \log x} \qquad \text{è } o \text{ piccolo di } \frac{\operatorname{sen} x}{x \log x},$$

ma non è integrabile in senso generalizzato in $(2, +\infty)$.
Per essere sicuri dell'integrabilità in senso generalizzato è meglio sviluppare ulteriormente la funzione integranda:

$$(1+t)^{\beta} = 1 + \beta\, t + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)\, t^2 + o(t^2)\,.$$

In tal modo si ha che

$$\left(1 + \frac{\alpha + \operatorname{sen} x}{x \log x}\right)^{1/3} - 1 = \frac{1}{3}\,\frac{\alpha + \operatorname{sen} x}{x \log x} - \frac{1}{9}\,\frac{(\alpha + \operatorname{sen} x)^2}{x^2 \log^2 x} + o\left(\frac{(\alpha + \operatorname{sen} x)^2}{x^2 \log^2 x}\right). \quad (4)$$

Stimiamo il secondo termine come segue:

$$\left|\frac{(\alpha + \operatorname{sen} x)^2}{x^2 \log^2 x}\right| \leqslant \frac{(1+\alpha)^2}{x^2 \log^2 x} \leqslant \frac{(1+\alpha)^2}{x^2}\,.$$

Poiché il termine a destra risulta integrabile lo sono anche i termini

$$\frac{(\alpha + \operatorname{sen} x)^2}{x^2 \log^2 x} \qquad \text{e} \qquad o\left(\frac{(\alpha + \operatorname{sen} x)^2}{x^2 \log^2 x}\right).$$

Questi risultati valgono per qualunque valore di $\alpha \geqslant 0$, non solo per $\alpha = 0$.
Passiamo ora al caso $\alpha = 2$: tenendo presente lo sviluppo (4) e visto lo studio appena fatto per il secondo e terzo termine è sufficiente studiare il primo. Si ha

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{x \log x} \leqslant \frac{1}{3}\,\frac{2 + \operatorname{sen} x}{x \log x}$$

e poiché

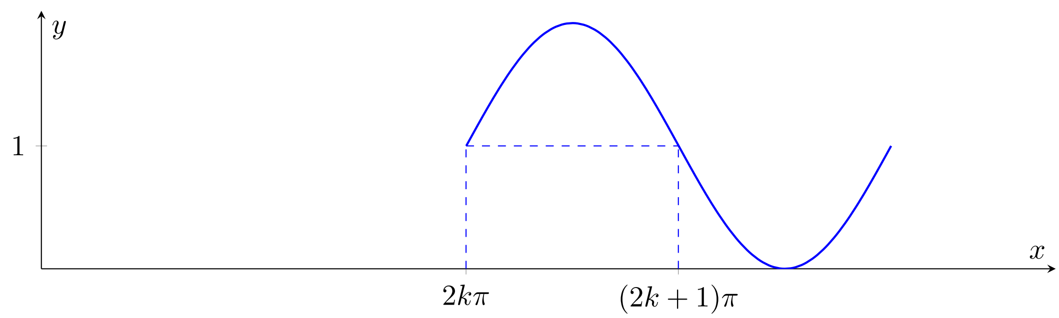
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx = +\infty \qquad (5)$$

si conclude che anche l'integrale dato, per $\alpha = 2$, diverge. Per vedere (5) è sufficiente integrare. Alternativamente si può usare il criterio integrale per le serie e poi il criterio di condensazione di Cauchy.
L'ultimo caso è quello, per $\alpha = 1$, di

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{x \log x}$$

per il quale non può valere la stima dal basso usata prima. Però si osservi che (si veda anche la figura) in questo caso

$$\int_2^{+\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x\log x}\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x\log x}\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi\log((2k+1)\pi)} = +\infty$$



dove si è stimato

$\operatorname{sen} x + 1 \geqslant 1$ per $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, $\qquad \operatorname{sen} x + 1 \geqslant 0$ per $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$.

3. Cominciamo analizzando gli insiemi di livello della funzione f. Fissando $c \in \mathbf{R}$ si ha

$$y^2 + y^2x^4 - x^2 = c.$$

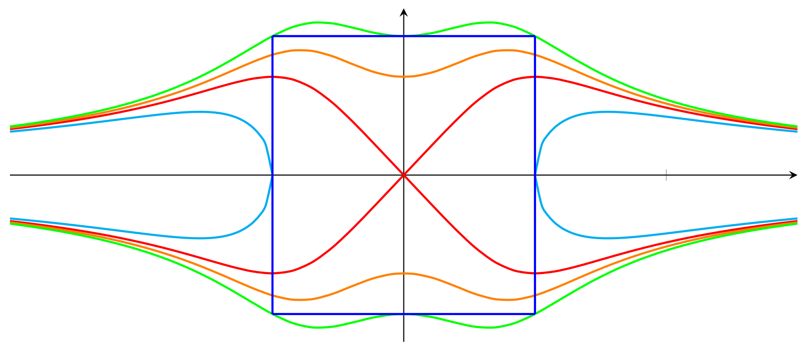
Si ottiene quindi

$$y^2 = \frac{k+x^2}{1+x^4},$$

cioè le due curve

$$y = \sqrt{\frac{k+x^2}{1+x^4}} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{\frac{k+x^2}{1+x^4}}\,.$$

Alcuni esempi sono riportati nelle figure che seguono. In celeste per un valore di c negativo, in rosso per il valore di c uguale a zero, gli altri colori per alcuni valori di c positivi.



Poiché la funzione è continua e definita in un compatto il problema avrà soluzione. In corrispondenza alla curva di livello celeste si possono già indovinare i punti di minimo che saranno $(-1,0)$ e $(1,0)$, mentre in corrispondenza alla curva verde si possono indovinare quali saranno i punti di massimo, i punti $(-1,1),(0,1),(1,1)$, $(-1,-1)$, $(0,-1),(1,-1)$.
Volendo trovare tali punti con il metodo delle curve di livello, una volta capite quali sono, si possono trovare facilmente i punti di minimo richiedendo che

$$y^2 = \frac{k+x^2}{1+x^4} = 0 \qquad \text{cioè } x^2 = -k$$

e quindi $-k = 1$. Per i punti di massimo la cosa è più delicata in quanto, a priori, non si conosce il numero di intersezioni delle curve di livello positivo con il segmento che unisce i due punti $(-1,1)$ e $(1,1)$, anche se si può fare ugualmente (cosa che qui non facciamo).
Procediamo quindi derivando f all'interno di E e poi studiandola sul bordo. Si ha che l'unico punto critico interno è $(0,0)$. Sul bordo dividiamo in quattro pari lo studio. Valutiamo

$$f(x,1) = f(x,-1) = 1 + x^4 - x^2,$$
$$f(1,y) = f(-1,y) = 2\,y^2 - 1.$$

Annullando le derivate si ottengono i punti

$$(0,1), (-1/\sqrt{2},1), (1/\sqrt{2},1), (0,-1), (-1/\sqrt{2},-1), (1/\sqrt{2},-1), (1,0), (-1,0).$$

Aggiungendo a questi $(0,0)$ e i quattro vertici del quadrato si trovano i punti già menzionati in precedenza.

4. Il campo è definito nei punti $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ per i quali vale

$$2\big((x-1)^2+y^2\big)^2 - 4\big((x-1)^2+y^2\big) \neq 0$$

cioè

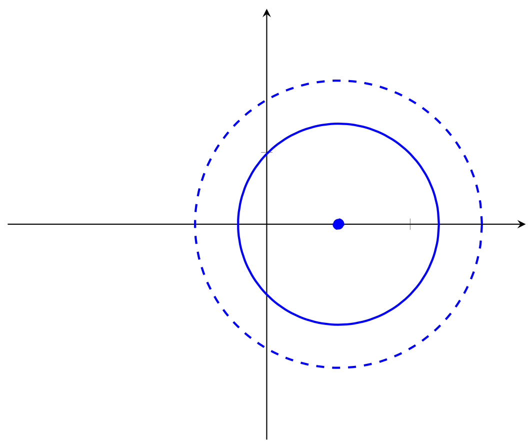
$$2\big((x-1)^2+y^2\big)\Big[\big((x-1)^2+y^2\big)-2\Big]\neq 0\,.$$

Il dominio è quindi l'insieme

$$D=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\big|\,(x,y)\neq(1,0)\big\}\cap\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\big|\,(x-1)^2+y^2\neq 2\big\}\,.$$

In figura sono mostrate in blu le parti che vanno sottratte a $\mathbf{R}^2$ per ottenere D, la parte tratteggiata è il sostegno della curva C.

Dominio D



Il dominio D è l'unione di due insiemi D_1 e D_2, ognuno dei quali non è semplicemente connesso.

$$D_1=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\big|\,0<|(x-1,y)|<\sqrt{2}\big\}\,,$$
$$D_2=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\big|\,|(x-1,y)|>\sqrt{2}\big\}\,.$$

Il cammino C è completamente contenuto in D_2. Parametrizzando C (positivamente) con

$$\gamma(t)=\big(1+\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\big),\qquad t\in[0,2\pi],$$

si ottiene che il lavoro del campo lungo tale cammino è nullo. Infatti

$$\int_\gamma\langle F(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{16}\Big(-48\cos t\,\mathrm{sen}\,t+48\cos t\,\mathrm{sen}\,t\Big)dt\,.$$

Si verifica facilmente che il campo è irrotazionale. Per questo motivo, poiché il lavoro lungo C è nullo e poiché togliendo una qualunque semiretta al sottodominio D_2 si ottiene un insieme semplicemente connesso è possibile dimostrare (!! ma non è immediato) che il campo è conservativo.

Diversamente si può procedere a cercare un potenziale e poiché F ammette potenziale risulta conservativo.
I potenziali sono

$$f(x,y) = \log\left(2\big((x-1)^2+y^2\big)^2 - 4\big((x-1)^2+y^2\big)\right) + c, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$