Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 24.1.2019

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\frac{(x^2+x+1)^n}{(x^2+1)^{n+1}}$$

e, se possibile, se ne calcoli la somma.

2. Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(x-1) - \operatorname{arctg}(x-1)}{|x^2-4x+3|^\alpha}\,dx\,.$$

3. Data $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2+4}$, si parametrizzi la curva definita da

$$\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+2y-\frac{1}{2}z^2 = 0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, z - \frac{x}{\sqrt{2}} = 0\right\}\,,$$

dopodiché si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma f\,ds\,.$$

4. Dato $a \in \mathbf{R}$ si consideri il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{ax+2x^2y-2y^2+2y}{x^2-y+1}, \frac{2x^3-2xy+2x-1}{x^2-y+1}\right).$$

Si trovi il suo dominio naturale (o massimale) e si dica se ed eventualmente per quali valori del parametro a il campo è conservativo. In tal caso si trovino i potenziali di F.

Soluzione della traccia del 24.1.2019

1. Si può scrivere (perché?)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\frac{(x^2+x+1)^n}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{x^2+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\frac{(x^2+x+1)^n}{(x^2+1)^n} \tag{1}$$

per cui è possibile studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^n$$

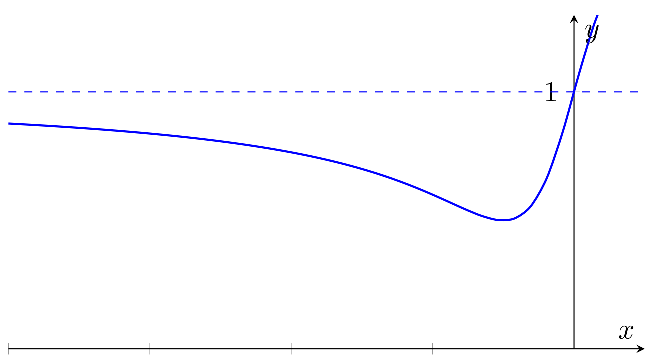
che può essere trattata come una serie di potenze se alla quantità $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ si sostituisce una nuova variabile, ad esempio y. Il grafico della funzione

$$f(x) = 1+\frac{x}{x^2+1}$$

è riportato in figura. Ci si riduce quindi a studiare

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)y^n$$

che converge (puntualmente) per $y \in (-1,1)$ e converge uniformemente e totalmente in qualunque intervallo $[a,b] \subset (-1,1)$.



In conclusione si ottiene che per ogni $a, b \in (-1,1)$ con $a < b$ si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} (n-2) y^n && \text{converge in } (-1,1), \\
& && \text{converge uniformemente e totalmente in } [a,b] \subset (-1,1); \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\, y^n && \text{converge in } [-1,1), \\
& && \text{converge uniformemente in } [-1,b] \subset (-1,1), \\
& && \text{converge totalmente in } [a,b] \subset (-1,1).
\end{aligned}$$

Poiché

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{x^2+1} \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant 0$$

si ha che

$$\begin{gathered}
-1 < 1 + \frac{x}{x^2+1} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 0 \\
-1 + \frac{x}{x^2+1} \geqslant \frac{1}{2} > -1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}\,.
\end{gathered}$$

Traducendo questo per le serie originali si ha che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n-2) \frac{(x^2+x+1)^n}{(x^2+1)^{n+1}}$$

converge puntualmente per $x \in (-\infty, 0)$ e uniformemente e totalemente (solo) in tutti gli intervalli chiusi e limitati $[a,b] \subset (-\infty,0)$. Infatti la funzione f tende a 1 quando $x \to -\infty$ (e ovviamente anche per $x \to 0^-$), quindi non può esserci convergenza uniforme in intervalli del tipo $(-\infty, b]$ oppure $[a, 0)$, e qundi tantomeno quella totale. Dove c'è convergenza uniforme, e quindi per $y \in [a,b]$ per qualche intervallo $[a,b]$ contenuto in $(-1,1)$, si può ulteriormente scrivere e poi continuare nel calcolo come segue:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} (n-2)\, y^n &= -2 - y + y^3 \frac{d}{dy} \sum_{k=1}^{+\infty} y^k = \\
&= -2 - y + y^3 \frac{d}{dy} \frac{y}{1-y} = \\
&= -2 - y + y^3 \frac{1}{(1-y)^2}\,.
\end{aligned}$$

Ritornando a (1) si ottiene che

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\frac{(x^2+x+1)^n}{(x^2+1)^{n+1}} &= \frac{1}{x^2+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(n-2)\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^n = \\
&= \frac{1}{x^2+1}\left[-2-\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^3\frac{(x^2+1)^2}{x^2}\right] = \\
&= \frac{1}{x^2+1}\left[-3-\frac{x}{x^2+1}+\frac{(x^2+x+1)^3}{(x^2+1)x^2}\right].
\end{aligned}$$

2. La funzione a numeratore è limitata, quella a denominatore si annulla nel punto 1 e per questo (e solo per questo) l'integrale risulta improprio. In effetti il denominatore può essere riscritto come

$$|(x-1)(x-3)|^\alpha = |(x-1)|^\alpha|(x-3)|^\alpha$$

per cui il denominatore, per $x \to 1$, è un infinitesimo di ordine α.
Analizziamo il numeratore. Prima di tutto ricordiamo gli sviluppi, intorno a 0, delle funzioni seno ed arcotangente, che ci basteranno fino al terzo ordine:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} y &= y-\frac{1}{6}y^3+o(y^3),\\
\operatorname{arctg} y &= y-\frac{1}{3}y^3+o(y^3),
\end{aligned}$$

dai quali ricaviamo anche gli sviluppi (mettendo $x-1$ al posto di y)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x-1) &= (x-1)-\frac{1}{6}(x-1)^3+o\big((x-1)^3\big),\\
\operatorname{arctg}(x-1) &= (x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^3+o\big((x-1)^3\big)
\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x-1)-\operatorname{arctg}(x-1) &= -\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{3}(x-1)^3+o\big((x-1)^3\big),\\
&= \frac{1}{6}(x-1)^3+o\big((x-1)^3\big).
\end{aligned}$$

Di conseguenza il confronto asintotico

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)-\operatorname{arctg}(x-1)}{|x^2-4x+3|^\alpha}}{\dfrac{1}{|x-1|^{\alpha-3}}} = 1$$

fornisce la risposta alla domanda: l'integrale converge per $\alpha-3<1$, cioè per valori di α che soddisfano

$$\alpha < 4.$$

3. Mettendo a sistema le due espressioni implicite (che definiscono rispettivamente un iperboloide ad una falda ed un piano)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}z^2 = x^2 + y^2 + 2y \\ z = \frac{x}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

si ottiene

$$\frac{1}{4}x^2 = x^2 + y^2 + 2y$$

da cui

$$\frac{3}{4}x^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Questa rappresenta un'ellisse (la proiezione sul piano $x - y$ della curva Γ) che si può parametrizzare come

$$\eta(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t, \operatorname{sen} t - 1\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Per parametrizzare la curva Γ (che è anch'essa un'ellisse) è sufficiente considerare la terza coordinata data da $z = x/\sqrt{2}$

$$\gamma(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t, \operatorname{sen} t - 1, \frac{2}{\sqrt{6}}\cos t\right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ora valutando

$$f(\gamma(t)) = \left[\frac{4}{3}\cos^2 t + \frac{4}{6}\cos^2 t + 4\right]^{1/2} = \left[2\cos^2 t + 4\right]^{1/2} = \sqrt{2\operatorname{sen}^2 t + 2}$$

e

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 1}.$$

L'integrale richiesto non si calcolava per un errore nel testo: la funzione integranda avrebbe dovuto essere

$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - z^2}.$$

In tal modo

$$f(\gamma(t)) = \left[4 - 2\cos^2 t\right]^{1/2} = \sqrt{2\operatorname{sen}^2 t + 2}$$

e l'integrale richiesto si riduce a

$$\int_\gamma f\, ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen}^2 t)\, dt = 3\sqrt{2}\,\pi.$$

4. Il campo non è definito lungo la curva $y = x^2 + 1$ che divide in due parti semplicemente connesse lo spazio $\mathbf{R}^2$. Eventualmente il campo risulterà conservativo in ognuna delle due parti. Data la regolarità del campo calcolando le derivate

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{ax + 2x^2y - 2y^2 + 2y}{x^2 - y + 1} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\frac{ax + 2y(x^2 - y + 1)}{x^2 - y + 1} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ax}{x^2 - y + 1} + 2y\right) = \frac{ax}{(x^2 - y + 1)^2} + 2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x^3 - 2xy + 2x - 1}{x^2 - y + 1} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x(x^2 - y + 1) - 1}{x^2 - y + 1} = 2 + \frac{2x}{(x^2 - y + 1)^2}
\end{aligned}$$

ci si rende conto che il campo è irrotazionale per, e solo per, $a = 2$. Allora nei due domini

$$D_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - y + 1 < 0\}$$
$$D_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - y + 1 > 0\}$$

il campo ammette potenziali. Per trovarli è sufficiente integrare (per il valore di a uguale a 2)

$$f(x, y) = \int \left[\frac{2x}{x^2 - y + 1} + 2y\right] dx = \log(x^2 - y + 1) + 2xy + g(y)$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x^2 - y + 1} + 2x + g'(y)$$

e imponendp $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ si trova che g è costante e quindi

$$\begin{aligned}
f_1 &:= \log(x^2 - y + 1) + 2xy + c_1 \qquad \text{in } D_1, \\
f_2 &:= \log(x^2 - y + 1) + 2xy + c_2 \qquad \text{in } D_2,
\end{aligned}$$

con c_1, c_2 costanti.