Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 15.6.2017

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

A. Si studi la serie di potenze

$$\sum \frac{(1+3i)^n}{(2n+1)^3}\,(z-1)^n$$

dicendo quali sono gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale. Qulacosa sulle derivate e/o integrali

B. Si studi la serie di funzioni

$$\sum \frac{1}{n^x \log^\alpha n}$$

C. Si studi, al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, la serie di funzioni definite per $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha + x^\alpha}\,.$$

C. È difficile la convergenza uniforme

Innanzitutto si osservi che la serie non ha termini a segno costante ed è a termini definitivamente negativi.
Poi si osservi che la serie chiaramente diverge (a $-\infty$) per $\alpha \leqslant 0$. Limitandosi ad α positivo e detta f_n la funzione $x \mapsto \log\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha + x^\alpha}$, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x)}{-\frac{\log n}{n^\alpha}} = 1.$$

Dal criterio del confronto si deduce che la serie converge in $(0, +\infty)$ per $\alpha > 1$.
Per quanto riguarda la converge uniforme si che

$$f_n \quad \text{non converge uniformemente a zero in } (0, +\infty)\,.$$

Infatti

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x)| = +\infty\,.$$

Di conseguenza la serie $\sum_n f_n$ non può convergere uniformemente in $(0, +\infty)$.
Si ha però che la serie converge uniformemente in $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$. Infatti ...
qui non è facile