Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 17.6.2019

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} \sigma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen}^2 t\big) & t \in [0, \pi/2] \\ \eta(t) = \big(\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\big) & t \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$$

si dica se la curva è continua, semplice, chiusa.
Si parametrizzi poi con il parametro d'arco il secondo ramo

$$\eta(t) = \big(\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\big), \qquad t \in (\pi/2, \pi].$$

2. Si studi la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{x} \, \frac{n-1}{n} \right)^n .$$

3. Si studi il seguente integrale improprio al variare di $\alpha > 0$:

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x} \right)^{\alpha} dx$$

4. Dato il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{\alpha x y}{\big(y(1+x^2)-1\big)^2}, \frac{-(1+x^2)}{\big(y(1+x^2)-1\big)^2} \right)$$

si dica qual è il dominio massimale nel quale è definito F, quante e quali sono le sue componenti connesse e per quali valori del parametro α il campo in tali componenti è conservativo. Eventualmente se ne trovino i potenziali.

Soluzione della traccia del 17.6.2019

1. Sia il primo ramo, la curva σ, che il secondo, la curva η sono continui. L'unica cosa da verificare è che γ sia continua in $\pi/2$, cioè che

$$\lim_{t\to\pi/2^-}\gamma(t)=\lim_{t\to\pi/2^+}\gamma(t),$$

e ciò è facilmente verificabile. Che sia chiusa è altrettanto semplice: infatti

$$\gamma(0=\gamma(\pi).$$

Per vedere che la curva è semplice bisogna verificare che γ ristretta all'intervallo $(0,\pi)$ è iniettiva. Sia σ che η sono iniettive, per cui quello che rimane da verificare è che σ ed η abbiano sostegni disgiunti. Per verificarlo si supponga che esistano $t\in(0,\pi/2)$ ed $s\in(\pi/2,\pi)$ tali che

$$\big(\cos t,\operatorname{sen}^2 t\big)=\big(\cos^2 s,\operatorname{sen}^2 s\big).$$

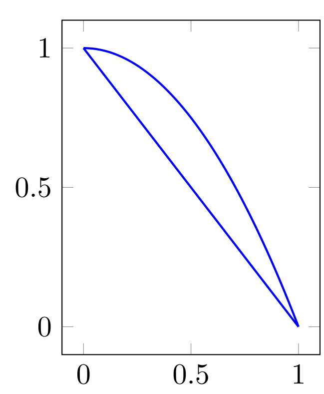
In tal caso si dovrebbe avere

$$\operatorname{sen}^2 t=\operatorname{sen}^2 s$$

da cui $s=\pi-t$. Ma questo non sarebbe possibile, in quanto

$$\cos t\neq\cos^2(\pi-t)=-\cos(t)\,.$$

Per completezza riportiamo il sostegno di γ in figura:



Infine parametrizziamo con il parametro d'arco la curva η: calcoliamo

$$s(t)=\int_{\pi/2}^{t}\big|\eta'(s)\big|ds=2\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{t}\big|\cos s\ \operatorname{sen} s\big|ds=\sqrt{2}\cos^2 t$$

da cui

$$t(s) = \arccos\sqrt{\frac{s}{\sqrt{2}}}, \qquad s \in [0,1].$$

Per cui la curva η riparametrizzata diventa

$$\eta\big(t(s)\big) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

2. La serie è definita per ogni $x \neq 0$, per cui analizzeremo la serie per $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Applicando il criterio della radice n-esima si conclude facilmente che la serie

$$\begin{array}{ll} \text{converge per} & \dfrac{1-x}{x} \in (-1,1), \\ \text{diverge per} & \dfrac{1-x}{x} \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty). \end{array}$$

Se si preferisce si può effettuare il cambio di variabile $y = (1-x)/x$ e studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(y\,\frac{n-1}{n} \right)^n \tag{1}$$

per la quale si deduce immediatamente che:

$$\begin{array}{rl} \text{converge per} & y \in (-1,1) \\ \text{non converge per} & y \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{array}$$

e in particolare

$$\begin{array}{rl} \text{diverge positivamente per} & y \in (1,+\infty) \\ \text{è indeterminata per} & y \in (-\infty,-1). \end{array}$$

Rimane da vedere cosa succede agli estremi. Cominciamo ad analizzare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n .$$

Poiché

$$\left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \to_{n\to+\infty} \frac{1}{e}$$

si deduce che la serie (1) è positivamente divergente per $y = 1$ e indeterminata per $y = -1$. Di conseguenze la serie di funzioni (1)

$$\begin{array}{ll} \text{converge puntualmente in} & (-1,1) \\ \text{converge uniformemente ed assolutamente in} & [a,b] \\ \qquad \text{qualunque siano } a,b \text{ con } -1 < a < b < 1 & \end{array}$$

Come al solito, la serie non può convergere uniformemente in $(-1,1)$. Si denoti con f_n la funzione $f_n(y) = (y(n-1)/n)^n$. La successione $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_n$ converge uniformemente in un intervallo I se è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme, cioè se fissato $\varepsilon > 0$ si riesce a trovare $N \in \mathbf{N}$ per il quale

$$\sup_{y\in I}\left|\sum_{k=0}^n f_k(y) - \sum_{k=0}^m f_k(y)\right| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n,m \geqslant N.$$

In particolare se avessimo convergenza uniforme in $(-1,0]$ si avrebbe

$$\sup_{y\in(-1,0]}\left|\sum_{k=0}^n f_k(y) - \sum_{k=0}^m f_k(y)\right| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n,m \geqslant N,$$

ma dalla continuità di f_k

$$\sup_{y\in(-1,0]}\left|\sum_{k=0}^n f_k(y) - \sum_{k=0}^m f_k(y)\right| = \sup_{y\in[-1,0]}\left|\sum_{k=0}^n f_k(y) - \sum_{k=0}^m f_k(y)\right|$$

per cui in particolare si dovrebbe avere

$$\left|\sum_{k=0}^n f_k(-1) - \sum_{k=0}^m f_k(-1)\right| \leqslant \sup_{y\in[-1,0]}\left|\sum_{k=0}^n f_k(y) - \sum_{k=0}^m f_k(y)\right| < \varepsilon$$

per ogni $n,m \geqslant N$. Ma non essendo la successione $\left(\sum_{k=0}^n f_k(-1)\right)_n$ di Cauchy (perché è indeterminata) questo non è possibile.
Un analogo discorso si può fare in $y = 1$, per cui non vi è convergenza uniforme nemmeno in $[0,1)$.
Venendo alle serie data si ha che

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x} &\neq -1 \quad \text{per ogni } x \neq 0,\\ \frac{x-1}{x} &> -1 \quad \text{per } x > \frac{1}{2},\\ \frac{x-1}{x} &< 1 \quad \text{per } x > 0,\end{aligned}$$

per cui il meglio che si può concludere riguardo la serie è che

$$\begin{aligned}&\text{la serie converge puntualmente per} \quad x > \frac{1}{2}\\ &\text{la serie converge uniformemente e totalmente in} \quad [a,b]\end{aligned}$$

per ogni intervallo $[a,b] \subset (1/2,+\infty)$.

3. L'integrale va risolto dividendo in due parti l'intervallo poiché il denominatore si

annulla sia in 0 che in π, ma il numeratore non ha un comportamento altrettanto simmetrico. Innanzitutto si osservi che la quantità in gioco è sempre positiva, per cui l'integrale sarà finito o infinito, ma non indeterminato.
Dividiamo per semplicità l'intergrale nel modo seguente

$$\int_0^\pi \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha dx + \int_{\pi/2}^\pi \left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha dx.$$

Per il primo dei due bisogna fare i due seguenti sviluppi di Taylor:

$$\log(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)$$
$$\operatorname{sen} x = x + o(x) = x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)$$

da cui

$$\left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha = \frac{1}{x^{\alpha/2}}\left(\frac{1+\frac{o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}{1+\frac{o(x)}{x}}\right)^\alpha$$

che è chiaramente confrontabile con $1/x^{\alpha/2}$, per cui il primo dei due integrali è finito per $\alpha < 2$. Per quanto riguarda il secondo la cosa è più semplice in quanto il numeratore è una quantità compresa fra i due numeri positivi $(\log(1+\sqrt{\pi/2}))^\alpha$ e $(\log(1+\sqrt{\pi}))^\alpha$ e quindi è sufficiente analizzare il denominatore. Lo sviluppo di $x \mapsto \operatorname{sen} x$ nel punto π è

$$\operatorname{sen} x = -(x-\pi) + o(|x-\pi|) = -(x-\pi)\left(1 + \frac{o(|x-\pi|)}{(\pi - x)}\right).$$

Si osservi che la quantità $-(x-\pi)$ è positiva per $x \in (\pi/2, \pi)$, per cui ha senso elevarla ad α reale.
In conclusione la funzione integranda è confrontabile con $1/(-(x-\pi))^\alpha$ in quanto

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\left(\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\operatorname{sen} x}\right)^\alpha}{\frac{1}{(-(x-\pi))^\alpha}} = \left(\log(1+\sqrt{\pi})\right)^\alpha$$

e quindi integrabile in senso generalizzato per $\alpha < 1$, che è anche la limitazione su α affinché tutto l'integrale risulti finito.

4. Il campo non è definito per

$$\left(y(1+x^2)-1\right)^2 \neq 0$$

cioè per

$$y \neq \frac{1}{(1+x^2)}$$

per cui il campo è definito in $\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,y\neq(1+x^2)^{-1}\}$ che è dato dall'unione delle due componenti connesse

$$D_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,y>(1+x^2)^{-1}\},$$
$$D_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,y<(1+x^2)^{-1}\}.$$

Calcolando le derivate

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{1}{\big(y(1+x^2)-1\big)^4}\Big[\alpha x\big(y(1+x^2)-1\big)^2-2\alpha xy\big(y(1+x^2)-1\big)(1+x^2)\Big]=\\ &= \frac{1}{\big(y(1+x^2)-1\big)^3}\Big[\alpha x\big(y(1+x^2)-1\big)-2\alpha xy(1+x^2)\Big]\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{1}{\big(y(1+x^2)-1\big)^4}\Big[-2x\big(y(1+x^2)-1\big)^2+2\big(y(1+x^2)-1\big)2xy(1+x^2)\Big]=\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{1}{\big(y(1+x^2)-1\big)^3}\Big[-2x\big(y(1+x^2)-1\big)+4xy(1+x^2)\Big]\end{aligned}$$

si conclude che il campo è irrotazionale (in ognuna delle due componenti connesse) se

$$\alpha=-2.$$

I potenziali sono dati da

$$f(x,y)=\frac{1}{y(1+x^2)-1}+c_1\chi_{D_1}(x,y)+c_2\chi_{D_2}(x,y)$$

con $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.