Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 17.7.2019

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi il seguente integrale improprio al variare di $\alpha > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \, dx$$

2. Data la funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$$

se ne trovino gli eventuali i punti critici, se ne discuta eventualmente la loro natura e si discuta infine l'esistenza del minimo e del massimo per f.

3. Si studi la seguente serie di funzioni per $x \geqslant 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)^{nx+1}$$

4. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^k}{y^2 x^4 + y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

se ne studi continuità, derivabilità, differenziabilità al variare del parametro $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$.

****

Ricordo: per ogni numero reale positivo a vale l'uguaglianza $a = e^{\log a}$

Soluzione della traccia del 17.7.2018

1. La funzione integranda è limitata per cui l'integrale risulta improprio solo perché l'intervallo di integrazione è illimitato.
L'integrale è di tipo oscillante, ma i due criteri visti non si applicano in maniera diretta. La cosa più semplice è usare lo sviluppo di Taylor per la funzione arcotangente dopo aver sostituito y a x^α ottenendo

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} y \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\frac{1}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}}\,dy. \tag{1}$$

Si osservi che anche con questo cambio di variabile in 0 non c'è un problema in quanto

$$\operatorname{sen} y \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\frac{1}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\operatorname{sen} y}{y}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)y^{\frac{1}{\alpha}}$$

e quindi la funzione è limitata.
Ovviamente, poiché la funzione integranda non è positiva (o comunque è a segno variabile) non si può usare il criterio del confronto o il suo corollario (confronto asintotico), ma bisogno sviluppare ad un ordine superiore al primo (si veda un commento alla fine della risoluzione).
Lo sviluppo al terzo ordine è dato da

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

Scrivendo

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{1}{y^{\frac{3}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{y^{\frac{3}{\alpha}}}\right)$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\frac{1}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}} &= \left[\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{1}{3}\frac{1}{y^{\frac{3}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{y^{\frac{3}{\alpha}}}\right)\right]\frac{1}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \\ &= \frac{1}{y} - \frac{1}{3}\frac{1}{y^{1+\frac{2}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{y^{1+\frac{2}{\alpha}}}\right).\end{aligned}$$

A questo punto integrando si ottiene che

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}\operatorname{sen} y\,dy && \text{converge perché oscillante}\\ &\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^{1+\frac{2}{\alpha}}}\operatorname{sen} y\,dy && \text{converge assolutamente per ogni } \alpha > 0\end{aligned}$$

e infine, per confronto, converge assolutamente per ogni $\alpha > 0$ anche

$$\int_0^{+\infty} o\left(\frac{1}{y^{1+\frac{2}{\alpha}}}\right) \operatorname{sen} y \, dy.$$

Si osservi come in questo caso, ai fini dello studio della convergenza dell'integrale, non è determinante conoscere i coefficienti dello sviluppo di Taylor della funzione arcotangente: infatti si potrebbe anche scrivere

$$\operatorname{arctg} t = a_1 t + a_3 t^3 + o(t^3),$$

per concludere le stesse cose.
Si osservi inoltre come, in realtà, si potrebbe sviluppare la funzione anche solamente al primo ordine scrivendo, poiché la funzione arcotangente è dispari,

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t^2).$$

Infatti si avrebbe

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\frac{1}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}} &= \left[\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{1}{y^{\frac{2}{\alpha}}}\right)\right]\frac{1}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \\ &= \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right). \end{aligned}$$

Poiché

$$\left|\operatorname{sen} y \; o\left(\frac{1}{y^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{y^{1+\frac{1}{\alpha}}}$$

si conclude.
Si osservi come lo sviluppo al primo ordine, senza sfruttare l'informazione che l'o piccolo in realtà è del secondo ordine, non sia sufficiente per concludere. Infatti in tal caso

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t)$$

porta a

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\frac{1}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{y} + o\left(\frac{1}{y}\right)$$

e il termine

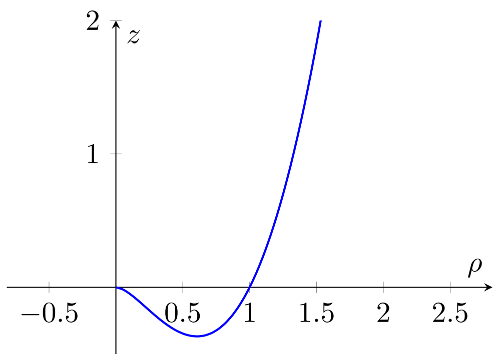
$$o\left(\frac{1}{y}\right)$$

non si gestisce.

2. La funzione è radiale: è sufficiente quindi studiare

$$g(\rho) = \rho^2 \log \rho^2 \qquad \text{con } \rho > 0\,,$$

il cui grafico è parzialmente riportato in figura.



Gli insiemi di livello sono quindi circonferenze (se il livello è positivo o nullo) o coppie di circonferenze (se il livello è negativo e non inferiore al valore $-e^{-1}$, valore minimo assunto da g). Negli altri casi, cioè per il livello inferiore a $-e^{-1}$, l'insieme è ovviamente vuoto. Un caso a parte merita il livello zero che potrebbe essere la circonferenza di raggio 1 oppure la stessa circonferenza unita a $\{(0,0)\}$ nel caso si volesse estendere f per continuità a tutto $\mathbf{R}^2$ (si veda più in basso). Derivando g si ha

$$g'(\rho) = 2\rho \log \rho^2 + 2\rho$$

che si annulla solo per $\rho^2 = e^{-1}$ $(!\rho > 0)$. Questo corrisponde, per la funzione f, alla circonferenza definita da $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$. Infatti f ha derivate parziali date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \log(x^2 + y^2) + 2x \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y \log(x^2 + y^2) + 2y \tag{3}$$

che si annullano, nel dominio dato, solo per $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$.
Continuando a studiare g è sufficiente fare la derivata seconda

$$g''(\rho) = 2 \log \rho^2 + 4.$$

Valutandola in $\rho = 1/\sqrt{e}$ si ha che $g''(1/\sqrt{e}) > 0$, da cui $1/\sqrt{e}$ punto di minimo locale. Facendo i limiti all'infinito e nell'origine si ha facilmente che

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y) = +\infty, \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0\,.$$

Poiché $g(1/\sqrt{e}) < 0$ si ha che tale punto è di minimo assoluto. Di conseguenza tutti i punti che soddisfano $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$ sono di minimo assoluto, mentre la funzione non ha massimo.
È chiaro che, essendo radiale, la matrice hessiana in tutti i punti della circonferenza

definita da $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$ avrà allora un autovalore positivo e uno nullo. Volendolo verificare si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\log(x^2+y^2) + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\log(x^2+y^2) + \frac{4y^2}{x^2+y^2} + 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{4xy}{x^2+y^2}$$

per cui

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4ex^2 & 4exy \\ 4exy & 4ey^2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è zero. Poiché la traccia è positiva, un autovalore è positivo e l'altro è nullo.

Si noti come la funzione può essere estesa per continuità anche all'origine.
In realtà è sufficiente estendere g nel seguente modo e poi di conseguenza la f:

$$\tilde{g} := \begin{cases} g(\rho) & \text{se } \rho > 0 \\ 0 & \text{se } \rho = 0 \end{cases}$$

Tale funzione risulta di classe $C^1([0,+\infty))$ (oppure la sua estensione pari risulta di classe $C^1(\mathbf{R})$), ma la sua derivate seconda non è continua nell'origine (lo si verifichi per esercizio).
Di conseguenza, detta $\tilde{f}$ l'estensione radiale tramite $\tilde{g}$, cioè la funzione

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) & \text{se } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

si ha che nell'origine il gradiente di $\tilde{f}$ si annulla (si vedano in (2) e (3)). Tale punto sarà solamente un punto di massimo locale per $\tilde{f}$.

3. Applicando il criterio della radice n-esima e definita

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^{nx+1}$$

(si osservi che i termini sono tutti non negativi) si ottiene che la quantità

$$\sqrt[n]{f_n(x)} = \sqrt[n]{\left(x+\frac{1}{n}\right)^{nx+1}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)^{x+\frac{1}{n}}$$

ammette limite e tale limite è x^x. La serie converge quindi quando x^x è minore di 1 e diverge positivamente quando x^x è maggiore di 1. Scrivendo $x^x = e^{x\log x}$ si ottiene

$$x^x < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x\log x < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (0,1).$$

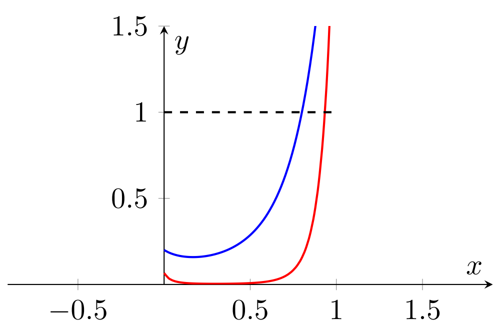
Quindi la serie converge per $x \in (0,1)$ e diverge per $x > 1$; rimane da vedere che succede per $x = 0$ e $x = 1$. Per $x = 0$ la serie si riduce $\sum \frac{1}{n}$, che diverge, per $x = 1$ la serie è
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$
che ovviamente diverge positivamente poiché il generico termine non è infinitesimo (converge ad e).
Per studiare la convergenza uniforme studiamo prima il comportamento di f_n, il cui grafico (per $n = 5$ in blu e $n = 15$ in rosso) è riportato in figura. Si ha che

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{d}{dx} e^{(nx+1)\log\left(x+\frac{1}{n}\right)} = \\ &= e^{(nx+1)\log\left(x+\frac{1}{n}\right)} \left[n \log\left(x + \frac{1}{n}\right) + n \right] \end{aligned}$$

per cui f_n' si annulla se e solo se

$$n \log\left(x + \frac{1}{n}\right) + n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log\left(x + \frac{1}{n}\right) = -1$$

e cioè per il valore
$$x_n = \frac{1}{e} - \frac{1}{n}.$$



Per $x \in (0, x_n)$ si ha che f_n è descrescente, per $x \in (x_n, 1)$ che f_n è crescente, per cui x_n risulta essere di minimo. Di conseguenza, fissato $[a,b] \subset (0,1)$, poiché $f_n > 0$ si ha che
$$\max_{x\in[a,b]} f_n(x) = \max\left\{f_n(a), f_n(b)\right\}$$
e poiché $\sum_n f_n$ converge sia per $x = a$ che per $x = b$ se ne deduce che converge totalmente ed uniformemente in $[a,b]$. Non converge uniformemente in $(0,b]$ poiché, per ogni $N \in \mathbf{N}$
$$\sup_{x\in(0,b]} \sum_{n=N}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{nx+1} = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$
Analogo discorso vale per l'intervallo $[a,1)$ e quindi per $(0,1)$.

4. In realtà la funzione avrebbe dovuto essere definita nel modo seguente

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^k}{y^2 x^4 + y^6} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

e per errore è stata inserita invece quella riportata nel compito. È una questione formale e non sostanziale, visto che comunque ci si può ridurre a studiare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^{k-2}}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Vediamo ora lo svolgimento.
È sufficiente verificare la regolarità nell'origine. Usando la disguaglianza $2ab \leqslant a^2 + b^2$ si deduce che $\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ è limitata. Di conseguenza, poiché

$$\frac{x^3 y^k}{y^2 x^4 + y^6} = \frac{x^3 y^{k-2}}{x^4 + y^4} = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}\, x\, y^{k-4}$$

si ha che sicuramente la funzione è continua nell'origine per $k \geqslant 4$.
Verifichiamo che non lo è per $k < 4$: considerando, per esempio, $x = y$ si ottiene che per $x \neq 0$

$$f(x,x) = \frac{x^{3+k}}{2x^6}$$

quantità che non tende a zero se $k < 4$ (si ricordi che il parametro k è naturale).
Vediamo se è derivabile: denotato con $v = (v_1, v_2)$ un vettore unitario si ha

$$\frac{1}{t}\left[f(tv) - f(0,0)\right] = \frac{t^{3+k} v_1^3 v_2^k}{t^7 (v_1^4 v_2^2 + v_2^6)} = t^{k-4} \frac{v_1^3 v_2^k}{v_1^4 v_2^2 + v_2^6}.$$

Tale quantità è nulla se $v_1 = 0$ oppure $v_2 = 0$ qualunque sia il valore di $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$.
Negli altri casi il limite non esiste finito se $k = 2$ o $k = 3$, esiste finito ed è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{v_1^3 v_2^k}{v_1^4 v_2^2 + v_2^6} \tag{5}$$

se $k = 4$, è 0 per tutti i valori di k maggiori o uguali di 5.
Riassumendo: per $k = 2, 3$ la funzione è derivabile in $(0,0)$ solo rispetto alle direzioni $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$; per $k \geqslant 4$ è derivabile in tutte le direzioni.
Da (5) si deduce anche che per $k = 4$ la funzione non è differenziabile. Vediamo che lo è per $k \geqslant 5$.

$$\begin{aligned} \lim_{|h| \to 0} \frac{h_1^3 h_2^k}{h_1^4 h_2^2 + h_2^6} \frac{1}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} &= \lim_{|h| \to 0} \frac{h_1^3 h_2^{k-2}}{h_1^4 + h_2^4} \frac{1}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} = \\ &= \lim_{|h| \to 0} \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^4 + h_2^4} \frac{h_1 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}}\, h_2^{k-5} \end{aligned}$$

e passando alle coordinate polari poiché il primo e il secondo fattore sono limitati e il terzo tende a zero si conclude.