Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 28.8.2019

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^2}{n^x} \qquad x \in \mathbf{R}$$

2. Si studi il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} dx$$

3. Si trovino, se esitono, il massimo e il minimo della funzione

$$g(x,y) = \frac{x^2}{y^2+1}$$

nell'insieme $A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 2\,,\ x \leqslant \sqrt{y^2+1}\,\big\}$.

4. Data la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) & t \in [0, 2\pi] \\ (4\pi - t + \operatorname{sen} t, \cos t - 1) & t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

- si dica se è chiusa;
- si dica se è semplice;
- si dica se la curva è di classe C^1, è regolare ed eventualmente si trovino i punti di non regolarità;
- si calcoli il versore tangente ove la curva è regolare e si dica se esiste, negli eventuali punti di non regolarità, il limite del versore tangente.

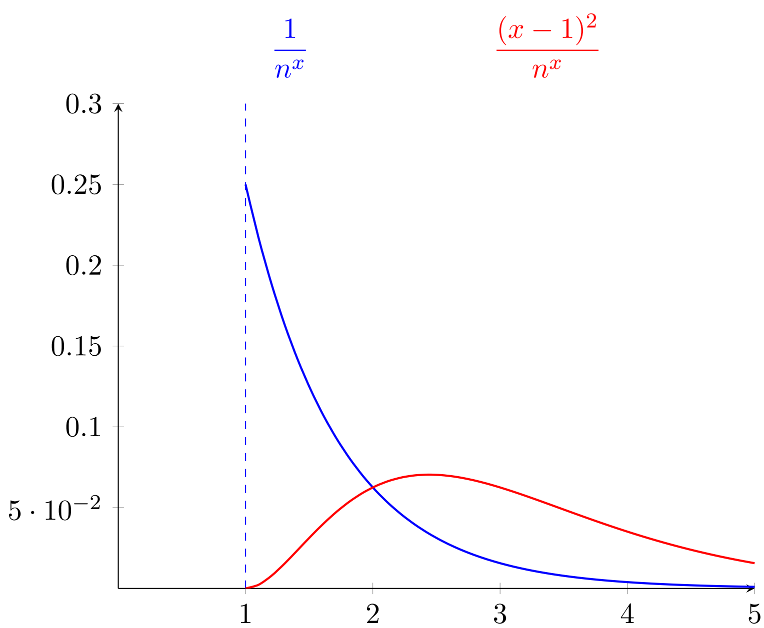
Si dica se è possibile rispondere alla seguente domanda: se la si parametrizzasse con il parametro d'arco negli eventuali punti di non regolarità la curva risulterebbe derivabile oppure no?

Soluzione della traccia del 28.8.2019

1. Converge puntualmente in $[1, +\infty)$. Vediamo la convergenza totale: annullando la derivata dell'n-esimo addendo si ottiene

$$
\begin{aligned}
&2(x-1)\frac{1}{n^x} + (x-1)^2 \frac{1}{n^x} \log \frac{1}{n} = \frac{x-1}{n^x}\big[2 - (x-1)\log n\big] = 0 \\
\iff \qquad & x = 1 \quad \vee \quad 2 = (x-1)\log n \\
\iff \qquad & x = 1 \quad \vee \quad x = 1 + \frac{2}{\log n}.
\end{aligned}
$$

Nella figura che segue è evidenziato il comportamento delle funzioni sommande



Detto x_n il termine $1 + \frac{2}{\log n}$ e detta f_n la funzione $f_n(x) = \frac{(x-1)^2}{n^x}$ si ha che

$$f_n(1) = 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}$$

e

$$f_n(x_n) = \left(\frac{2}{\log n}\right)^2 \frac{1}{n^{1+\frac{2}{\log n}}} < \left(\frac{2}{\log n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

e (per esempio usando il criterio di condensazione)

$$\sum_n \frac{4}{n(\log n)^2} < +\infty$$

per cui vi è convergenza totale, e di conseguenza uniforme, in $[1, +\infty)$.

2. Si sviluppa la funzione logaritmo al primo ordine e la funzione seno al terzo ordine:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) &= \log\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 + o\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) = \\ &= \frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x} - 1 + o\left(\frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x} - 1\right) = \\ &= -\frac{x^2}{6} + o(x^2)\end{aligned}$$

da cui si conclude che, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale dato ha lo stesso carattere di

$$-\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

che diverge negativamente.

3. La funzione assume valori costanti sugli insiemi determinati da:

$$x^2 = c\,(y^2 + 1)\,, \qquad (c \in \mathbf{R})\,.$$

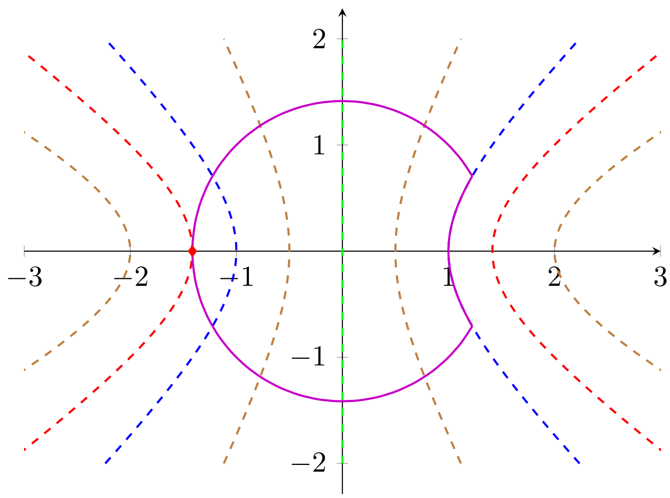
Si osservi che per $c < 0$ l'insieme di livello è il vuoto per cui, chiamando $c = k^2$ con $k \in \mathbf{R}$ possiamo scrivere

$$x^2 = k^2\,(y^2 + 1)\,, \qquad (k \in \mathbf{R})$$

dove k^2 è un possibile valore assunto da f. Ci si può quinid limitare a considerare $k \geqslant 0$ e riscrivere questi insiemi come l'unione delle curve

$$\begin{aligned} x &= k\,\sqrt{y^2+1}\,, \\ x &= -k\,\sqrt{y^2+1}\,, \end{aligned} \qquad \text{con } k \geqslant 0,$$

e tali insiemi sono rappresentati in figura (ad un colore corrisponde un insieme di livello, a destra una curva del tipo $x = k\,\sqrt{y^2+1}$, a sinistra una del tipo $x = -k\,\sqrt{y^2+1}$ per il medesimo valore di k)



In figura è rappresentato in violetto il bordo dell'insieme A e, tratteggiati, alcuni insiemi di livello (ad un colore corrisponde un insieme di livello). Al tratteggio verde corrisponde l'insieme di livello 0, e poiché la funzione è sempre non negativa, in tali punti la funzione assume il suo valore minimo, che è 0.
Il punto segnato con un diamante rosso, il punto $(-\sqrt{2}, 0)$, è invece il punto di massimo che sta sull'insieme di livello che corrisponde a $k = \sqrt{2}$ e $c = 2$, che è il valore massimo.

Volendo procedere facendo i conti si può fare così: derivando si ottiene il sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = \dfrac{2x}{y^2+1} = 0 \\ g_y(x,y) = -\dfrac{2x^2 y}{(y^2+1)^2} = 0 \end{cases}$$

che è soddisfatto da $x = 0$ (la linea verde tratteggiata in figura).
Troviamo ora i punti di spigolo del bordo: cerchiamo x e y tali che

$$x^2 + y^2 = 2 \qquad \text{e} \qquad x = \sqrt{y^2+1}.$$

Si trovano i due punti

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Sul bordo abbiamo: una prima parte può essere parametrizzata con

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{t^2+1}, t\right)$$

e

$$g \circ \gamma(t) = 1.$$

Sul resto del bordo possiamo parametrizzare con

$$\eta(\vartheta) = \sqrt{2}\,\big(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta\big)$$

e derivando

$$g \circ \eta(\vartheta) = \frac{2\,\cos^2\vartheta}{2\operatorname{sen}^2\vartheta + 1}$$

si ottiene

$$\frac{d}{d\vartheta}(g\circ\eta)(\vartheta) = -\frac{4\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,\big(2\operatorname{sen}^2\vartheta + 1 + 2\,\cos^2\vartheta\big)}{(2\operatorname{sen}^2\vartheta+1)^2}$$

che si annulla per $\vartheta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ($\vartheta = 0$ corrisponde ad un punto che non sta sul bordo di A). Infine va verificato il valore della funzione anche nei punti di spigolo:

$$g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 1\,.$$

A questo punto si verifica facilmente che $\vartheta = \pi$ corrisponde ad un punto di massimo, mentre gli altri due punti, con tutti i valori di A che soddisfano $x = 0$, sono di minimo.

4. La curva è chiusa. Per vedere che è semplice ci chiediamo se esistono $t, s \in (0, 4\pi)$, diversi tra loro, tali che

$$\gamma(t) = \gamma(s). \tag{1}$$

Supponiamo dapprima che $t, s \in (0, 2\pi]$. Affinché (1) sia vera si dovrebbe avere

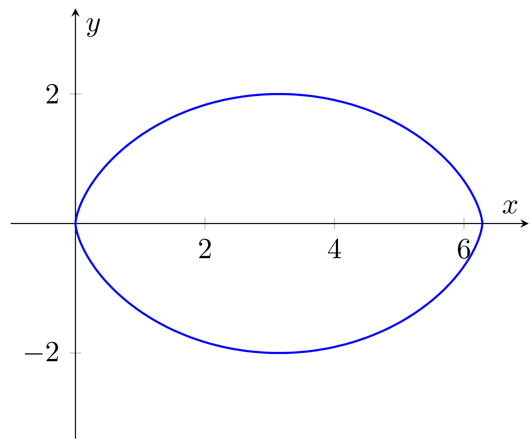
$$\begin{aligned}
&1 - \cos t = 1 - \cos s \qquad \Longrightarrow \qquad s = 2\pi - t \quad \text{con } t \in (0,\pi)\\
&\Longrightarrow \qquad t - \operatorname{sen} t = 2\pi - t - \operatorname{sen}(2\pi - t)\\
&\Longrightarrow \qquad t - \operatorname{sen} t = 2\pi - t + \operatorname{sen} t\\
&\Longrightarrow \qquad t = \pi + \operatorname{sen} t > \pi \quad \text{(il che non è possibile).}
\end{aligned}$$

In maniera analoga si esclude la possibilità che (1) sia vera con $t, s \in (2\pi, 4\pi)$.
Si supponga ora che $t \in (0, 2\pi]$ e $s \in (2\pi, 4\pi)$. Nuovamente si avrebbe

$$1 - \cos t = \cos s - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos s + \cos t = 2$$

il che è impossibile.

Nella figura che segue è rappresentato il sostegno della curva.



$$\gamma(t) = \begin{cases} (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) & t \in [0, 2\pi] \\ (4\pi - t + \operatorname{sen} t, \cos t - 1) & t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

Ora valutiamo la regolarità: innanzitutto verifichiamo che sia continua, cosa per la quale è sufficiente verificare che

$$\gamma(2\pi) = \lim_{t \to 2\pi^+} \gamma(t).$$

Ovviamente γ è quantomeno C^1 a tratti, visto che è continua ed è evidente che sia C^1 nei tratti $(0, 2\pi)$ e $(2\pi, 4\pi)$. Ora valutiamo la derivata

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1 - \cos t, \operatorname{sen} t) & t \in [0, 2\pi] \\ (-1 + \cos t, -\operatorname{sen} t) & t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

che ha modulo nullo per (e solo per) $t = 0$ e $t = 2\pi$ e $t = 4\pi$. Si ottiene

$$\lim_{t \to 2\pi^+} \gamma'(t) = (0, 0),$$

di conseguenza la curva è C^1, ma non è regolare in $t = 0$ (o $t = 4\pi$ visto che è chiusa) e $t = 2\pi$. Ciononostante se valutiamo il versore tangente

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}} \gamma'(t)$$

si ha che

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}} \gamma'(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}} (1 - \cos t, \operatorname{sen} t) =$$
$$= \left(\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - \cos t}{\sqrt{1 - \cos t}}, \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1 - \cos t}} \right).$$

Il limite del primo termine si risolve osservando che $1 - \cos t = \sqrt{1 - \cos t}\sqrt{1 - \cos t}$, il limite del secondo sviluppando

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} t = t + o(t^2), \\
&\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)} = t\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{o(t^3)}{t^2}}.
\end{aligned}$$

Si ottiene che

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}}\,\gamma'(t) = (0, 1).$$

Lo stesso risultato si ottiene se si valuta

$$\lim_{t \to 4\pi^-} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}}\,\gamma'(t).$$

Se invece si valutano i due limiti

$$\lim_{t \to 2\pi^-} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}}\,\gamma'(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 2\pi^+} \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}}\,\gamma'(t)$$

si ottiene in entrambi i casi il vettore $(0, -1)$.

All'ultima domanda è possibile rispondere proprio perché esistono in $t = 0$ e in $t = 2\pi$ i limiti di $\tau(t)$: se la curva non fosse derivabile in quei punti tali limiti non esisterebbero (si potrebbe avere l'esistenza dei limiti sinistro e destro, ma in tal caso questi sarebbero diversi).