Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 16.9.2019

Le prove scritte in maniera reputata non leggibile non verranno valutate.
Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si denoti con $\tilde{\Gamma}$ la curva definita da

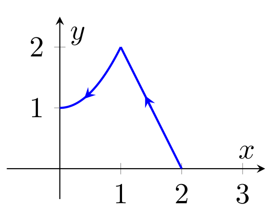
$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, z-\log x+\frac{7}{4}\log y=0\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x-y^2=0\right\} .$$

Si consideri la curva $\Gamma := \tilde{\Gamma}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, 0<x<1, 0<y<1\right\}$ e si calcoli la lunghezza di Γ.

2. Data la successione di funzioni $f_n(t)=t^2n^2e^{-nt}$, $t\in\mathbf{R}$, si studi la convergenza della successione $(f_n)_n$.

Dopodiché si studi la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$.

3.



Si considerino il campo di vettori $F(x,y)=(xy,x)$ e la curva γ il cui sostegno (rappresentato in figura) è il segmento che unisce il punto $(2,0)$ al punto $(1,2)$ unito all'arco di parabola che passa per i punti $(1,2)$ e $(0,1)$ e che ha retta tangente parallela all'asse delle x nel punto $(0,1)$, orientata come in figura.
Si calcoli l'integrale del campo F lungo tale curva.

4. Si trovino gli eventuali punti stazionari della funzione

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2z^2-x^2z-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y-\frac{(z-1)^3}{3}$$

e se ne discuta, se possibile, la loro natura.

Soluzione della traccia del 16.9.2019

1. La più semplice parametrizzazione di $\tilde{\Gamma}$ si ottiene scegliendo $y = t$ e le altre componenti di conseguenza ottenendo

$$\gamma(t) = \left(t^2, t, \log t^2 - \frac{7}{4}\log t\right) = \left(t^2, t, \frac{1}{4}\log t\right), \qquad \text{per } t > 0.$$

Poiché si devono limitare x e y tra 0 e 1 considereremo $t \in (0,1)$. Derivando si ottiene

$$\gamma'(t) = \left(2t, 1, \frac{1}{4}\frac{1}{t}\right) \qquad t \in (0,1)$$

e

$$\left|\gamma'(t)\right|^2 = 4t^2 + 1 + \frac{1}{16\,t^2} = \left(2\,t + \frac{1}{4\,t}\right)^2$$

da cui

$$\ell(\gamma) = \lim_{\alpha\to 0^+} \int_\alpha^1 \left(2\,t + \frac{1}{4\,t}\right) dt = 1 - \alpha^2 - \frac{1}{4}\log\alpha = +\infty.$$

per cui la curva non risulta rettificabile.

2. È facile vedere che vi è convergenza, a zero, solo per $t \geqslant 0$, mentre per $t < 0$ la successione diverge positivamente.
Valutiamo la convergenza uniforme nell'intervallo $[0, +\infty)$. Derivando la funzione

$$f_n(t) = t^2 n^2 e^{-nt}$$

si ottiene

$$f_n'(t) = tn^2 e^{-nt}\big(2 - tn\big)$$

che si annulla per $t = 0$, dove f_n si annulla, e per $t_n = 2/n$. Poiché $f_n(t) > 0$ per $t \in (0, +\infty)$, $f_n(0) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = 0$ si conclude che t_n è punto di massimo per f_n. Poiché

$$f_n(t_n) = \frac{4}{e^2} \tag{1}$$

non si ha convergenza uniforme in $[0, +\infty)$. Se si fissa $a > 0$, poiché t_n tende a zero, si ha che definitivamente $t_n < a$ e quindi, poiché f_n è definitivamente decrescente in $[a, +\infty)$, si deduce che

$$\sup_{t\in[a,+\infty)} f_n(t) = f_n(a) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Si conclude che $(f_n)_n$ converge puntualmente a zero in $[0, +\infty)$ e uniformemente a zero in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$, ma non in $[0, +\infty)$.

Passiamo ora allo studio della serie: per quanto riguarda la convergenza puntuale si raggiungono le stesse conclusioni riguardanti la successione: converge puntualmente in $[0, +\infty)$. Per quanto riguarda la convergenza totale, per quanto visto sopra, non può esserci convergenza totale in $[0, +\infty)$, ma ci sarà convergenza totale, e quindi uniforme, in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$. Volendo analizzare la convergenza uniforme in $[0, +\infty)$, o in $[0, a]$ per $a > 0$, si può concludere che questa non può esserci. Ricordiamo infatti che se una serie di funzioni $\sum g_n$ converge uniformemente in un certo insieme A in tale insieme si ha che g_n converge uniformemente a zero. Poiché nel nostro caso non vi è convergenza uniforme a zero di $(f_n)_n$ in $[0, a]$ si conclude che anche la serie $\sum_n f_n$ non può convergere uniformemente in $[0, a]$.

3. Troviamo innanzitutto una parametrizzazione per la curva. Per il tratto di parabola: essendo la curva cartesiana può essere scritta come (parte del) grafico di

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

per qualche a, b, c da trovare. Imponendo le condizioni si ha

$$\begin{array}{l} \text{retta tangente orizzontale in } (0,1) \\ (0,1) \text{ appartiene al grafico di } p \\ (1,2) \text{ appartiene al grafico di } p \end{array} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \\ a + c = 2 \end{cases}$$

da cui $a = 1, b = 0, c = 1$, per cui una possibile parametrizzazione (con orientazione sbagliata!) del primo tratto di curva può essere

$$[0, 1] \ni t \mapsto (t, t^2 + 1).$$

Il secondo tratto è una parte del grafico della retta $r(x) = -2x + 4$ che si ricava facilmente imponendo le condizioni (se $r(x) = mx + q$)

$$\begin{array}{l} (1,2) \text{ appartiene al grafico di } r \\ (2,0) \text{ appartiene al grafico di } r \end{array} \qquad \begin{cases} m + q = 2 \\ 2m + q = 0 \end{cases}$$

da cui $m = -2, q = -4$, per una possibile parametrizzazione (anche questa volta e per ora con orientazione sbagliata) del primo tratto

$$[1, 2] \ni t \mapsto (t, -2t + 4).$$

A questo punto per trovare il lavoro richiesto è sufficiente valutare l'integrale di F lungo la parametrizzazione trovata (che orienta il sostegno di γ in senso opposto),

$$\eta(t) = \begin{cases} (t, t^2 + 1) & t \in [0, 1) \\ (t, -2t + 4) & t \in [1, 2] \end{cases}$$

dopodiché cambiare segno al risultato:

$$\begin{aligned} \int_\gamma (F_1 dx + F_2 dy) &= -\int_\eta (F_1 dx + F_2 dy) = \\ &= -\int_0^1 \big(t^3 + t + 2t^2\big) dt - \int_1^2 \big(t(-2t + 4) - 2t\big) dt = \\ &= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{16}{3} + \frac{2}{3} + 4 - 1\right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4. La funzione è derivabile in tutto $\mathbf{R}^3$, quindi cerchiamo gli eventuali punti di massimo e minimo tra i punti crititci. Valutiamo quindi le derivate parziali e studiamo il sistema delle derivate uguagliate a zero. Si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = xz^2 - 2xz - 3x = 0 \\ f_y(x,y,z) = y^2 - 3y + 2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = zx^2 - x^2 - (z-1)^2 = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x(z-3)(z+1) = 0 \\ (y-1)(y-2) = 0 \\ (z-1)x^2 = (z-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \ \vee \ z = 3 \ \vee \ z = -1 \\ y = 1 \ \vee \ y = 2 \\ z = 1 \ \vee \ z = 1 + x^2 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$P_1 = (0,1,1), \quad P_2 = (0,2,1), \quad P_3 = \left(\sqrt{2},1,3\right),$$
$$P_4 = (\sqrt{2},2,3), \quad P_5 = \left(-\sqrt{2},1,3\right), \quad P_6 = \left(-\sqrt{2},2,3\right).$$

La matrice hessiana di f è

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 - 2z - 3 & 0 & 2xz - 2x \\ 0 & 2y - 3 & 0 \\ 2xz - 2x & 0 & x^2 - 2(z-1) \end{pmatrix}.$$

Valutata nei punti stazionari fornisce

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 4\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$H_f\left(P_5\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -4\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$H_f\left(P_6\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -4\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il punto P_2 è chiaramente un punto di sella, visto che un autovalore è positivo e uno negativo.
Per quanto riguarda i punti P_3 e P_5 si ha che le matrici hessiane $H_f(P_3)$ e $H_f(P_5)$ hanno determinante positivo e traccia negativa, da cui si deduce che almeno un autovalore è positivo e almeno un autovalore è negativo, di conseguenza anche questi punti sono di sella.

Per quanto riguarda il punto P_1, dalla matrice hessiana relativa non si può dedurre nulla, ma guardando la funzione ristretta all'asse y si ha

$$\varphi(y):=f(0,y,1)=\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2$$

che ha chiaramente un flesso in $y=0$. Per cui il punto P_1 è di sella.
Per i punti P_4 e P_6 si ha che sia il determinante che la traccia sono negativi, cioè ci sono autovalori negativi, il che non aiuta a concludere. Trovando le radici del polinomio caratteristico di $H_f(P_4)$

$$(1-\lambda)\Big[-\lambda(-2-\lambda)-32\Big]=0$$

ci si accorge che $\lambda=1$ è un autovalore, cioè c'è anche un autovalore positivo, per cui P_4 è di sella.
In maniera analoga si conclude che P_6 è di sella.