Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 23.1.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{x-1}{x}\right)^n \qquad \text{dove } a_n = e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 1.$$

2. Si studi la convergenza della successione di funzioni

$$g_n(t) = n^7\, t^7\, e^{-nt} + 1, \qquad t \in \mathbf{R},$$

dopodiché si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 g_n(t)\, dt$.

3. Dato il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{\alpha x + \beta y}{x^2+y^2-1}, \frac{y}{x^2+y^2-1}\right)$$

si trovi il dominio massimale $D \subset \mathbf{R}^2$ di F, si dica da quante componenti connesse è composto D e se tali (o tale) componenti sono semplicemente connesse.
Si trovino poi i valori reali di α e β per i quali il campo $F : D \to \mathbf{R}^2$ è irrotazionale e per tali valori si dica se il campo è conservativo e se ne trovino i potenziali.
Infine si calcoli il lavoro del campo lungo il cammino, orientato in senso antiorario, definito implicitamente da

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \right\}.$$

4. Data la funzione $f(x,y) = 2|x| - |y|$ si dica se f ammette massimo e minimo nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 = 1\}$$

e in caso affermativo li si trovi.

Soluzione della traccia del 23.1.2020

1. Sviluppando con Taylor al primo ordine si ha

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\
\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

per cui si avrebbe

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Sviluppando al secondo ordine la funzione esponenziale e osservando che le informazioni sull'o piccolo nello sviluppo del seno al primo ordine sono in realtà migliori si ha

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\\
&= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\\
&= 1+\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

da cui

$$a_n = \frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Scrivendo, per semplicità,

$$y = \frac{x-1}{x}$$

si ottiene quindi che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, y^n$$

converge puntualmente e totalmente per $y \in [-1,1]$, quindi anche uniformemente in $[-1,1]$, mentre non converge per $y \notin [-1,1]$. Risolvendo

$$-1 \leqslant \frac{x-1}{x}$$

si ottiene l'insieme $(-\infty,0)\cup[1/2,+\infty)$, risolvendo

$$\frac{x-1}{x} \leqslant 1$$

si ottiene l'insieme $(0, +\infty)$. Intersecandoli si ottiene infine l'insieme di convergenza

$$[1/2, +\infty) = \big((-\infty, 0) \cup [1/2, +\infty)\big) \cap (0, +\infty).$$

La serie data converge totalmente in $[1/2, +\infty)$, non converge in $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$ (in 0 non è definita).

2. La successione di funzioni $g_n(t) = n^7\, t^7\, e^{-nt} + 1$ converge puntualmente a 1 per ogni $t \geqslant 0$ e diverge a $-\infty$ per $t < 0$. Per studiare la converge uniforme deriviamo g_n:

$$g_n'(t) = n^7\, t^6\, e^{-nt}\left[7 - nt\right]$$

che si annulla per $t = 0$ e per $t = 7/n$. Poiché $g_n(0) = 1$, $\lim_{t\to+\infty} g_n(t) = 1$ e $g_n \geqslant 1$ per ogni $t \geqslant 0$ si conclude che $t = 7/n$ è il punto di massimo (assoluto) per g_n in $[0, +\infty)$. Valutandone il valore si ottiene

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{7^7}{e} + 1$$

per cui si deduce che g_n non converge uniformemente a 1 in $[0, +\infty)$. Si ha però che, poiché g_n è definitivamente decrescente in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$, il massimo di g_n è assunto (definitivamente) in a, visto che $7/n$ tende a 0. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(a) = 1$$

si deduce che vi è convergenza uniforme in $[a, +\infty)$ a 1.
Valutiamo ora l'integrale: poiché per ogni $\delta > 0$

$$\int_0^1 g_n(t)\, dt = \int_0^\delta g_n(t)\, dt + \int_\delta^1 g_n(t)\, dt$$

valutiamo separatamente ognuno dei due integrali. Si osservi che il primo può essere stimato come segue

$$\left|\int_0^\delta g_n(t)\, dt\right| \leqslant \left(\frac{7^7}{e} + 1\right)\delta$$

mentre per quanto riguarda il secondo, per la convergenza uniforme a 1 in $[\delta, 1]$ di g_n, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\delta^1 g_n(t)\, dt = \int_\delta^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\, dt = 1 - \delta.$$

Poiché $g_n \geqslant 1$ si ha che

$$1 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\, dt \leqslant \left(\frac{7^7}{e} + 1\right)\delta + (1 - \delta)$$

e poiché ciò è vero per ogni $\delta > 0$ si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\, dt = 1.$$

3. Il campo è definito in $D = \mathbf{R}^2 \setminus \Delta$ dove Δ è l'insieme dei punti appartenenti alla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine, cioè

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 1 = 0\}\,.$$

Di conseguenza il dominio D è diviso in due componenti connesse,

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}, \qquad D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 1\}.$$

Attenzione! La prima componente, D_1, è semplicemente connessa, la seconda no.
Verifichiamo se in D_1 e in D_2 il campo è irrotazionale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)^2} \big[\beta(x^2 + y^2 - 1) - 2y(\alpha x + \beta y - 1)\big], \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}, \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

Per tali valori si trova il potenziale

$$\phi(x, y) = \log \sqrt{|x^2 + y^2 - 1|} + c_1 \chi_{D_1}(x, y) + c_2 \chi_{D_2}(x, y), \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

per cui il campo è conservativo sia in D_1 che in D_2, anche se definito in un insieme (D_2) non semplicemente connesso.
Poiché la curva Γ è chiusa ed è contenuta interamente in una delle due componenti del dominio di F il lavoro lungo quel cammino è nullo.

4. La funzione è continua e definita in un insieme chiuso e limitato, per cui ammette sia minimo che massimo. Parametrizzando l'insieme E, che è una ellisse, nel modo che segue

$$\gamma(\vartheta) = \left(\frac{1}{2}\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta\right)$$

si ha che

$$f \circ \gamma(\vartheta) = |\cos\vartheta| - |\operatorname{sen}\vartheta|\,, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

La sua derivata è

$$\frac{d}{d\vartheta}(f \circ \gamma)(\vartheta) = -\operatorname{sen}\vartheta\ \frac{|\cos\vartheta|}{\cos\vartheta} - \cos\vartheta\frac{|\operatorname{sen}\vartheta|}{\operatorname{sen}\vartheta}, \qquad \vartheta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

Poiché tale derivata non si annulla mai (dove è definita) rimane da confrontare i valori di f nei quattro punti corrispondenti ai quattro valori di ϑ nei quali $f \circ \gamma$ non è derivabile. Si ha

$$\begin{aligned} f \circ \gamma\,(0) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= 1 \\ f \circ \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\,(0,1) &= -1 \\ f \circ \gamma\,(\pi) = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) &= 1 \\ f \circ \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\,(0,-1) &= -1 \end{aligned}$$

da cui $(0,1)$ e $(0,-1)$ punti di minimo, $(1/2,0)$ e $(-1/2,0)$ di massimo.
Lo stesso risultato si ottiene studiando gli insiemi di livello.