14/09/2020

1. **Serie**

   Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ soddisfi

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n \log n} = 3,$$

   e consideriamo la serie

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) La serie converge per ogni $\alpha > 0$ ✓
   (b) La serie diverge per ogni $\alpha \leq 1$
   (c) La serie converge per ogni $\alpha \geq 0$
   (d) La serie è indeterminata per $\alpha = -1$
   (e) tutte le altre affermazioni sono false

2. **Campi vettoriali**

   Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente campo risulta conservativo

   $$F(x, y) = \left(e^{2y} \cos(xe^{2y}), [\alpha^2 - \alpha]xe^{2y} \cos(xe^{2y})\right)$$

   (a) per $\alpha = -2$
   (b) per $\alpha = 0$
   (c) per $\alpha \in \{-1, 2\}$ ✓
   (d) per $\alpha \in \{-1, 0\}$
   (e) per nessun valore di α
   (f) tutte le altre affermazioni sono false

3. **Funzioni**

   Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x_o \in \mathbb{R}^2$ tali che

   $$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = v_1^2 + v_2, \qquad \forall v = (v_1, v_2) \text{ vettore di modulo 1.}$$

   Allora:

   (a) f è necessariamente discontinua in x_o (0%)
   (b) f è derivabile in x_o (50%)

(c) f non è differenziabile in x_o (50%)
(d) f ammette derivate parziali continue in x_o (0%)
(e) f è differenziabile in x_o (0%)
(f) tutte le altre affermazioni sono false (0%)

4. **Curve**

   Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Riparametrizzata con il parametro d'arco si ottiene $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^n$. È possibile dire quant'è la sua lunghezza senza conoscerne la parametrizzazione?

   (a) non è possibile
   (b) sì, ed è $b - a$
   (c) sì, ed è $\tilde{b} - \tilde{a}$ ✓
   (d) si potrebbe solo se si conoscesse la sua orientazione
   (e) tutte le altre affermazioni sono false

5. **Insiemi**

   Sia

   $$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^{2020} + y^{2020} < 14.09\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0\}$$

   (a) E è aperto ✓
   (b) E è compatto
   (c) E è connesso
   (d) E è illimitato
   (e) tutte le altre affermazioni sono false

6. **Successione di funzioni**

   Si consideri la successione di funzioni così definita:

   $$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & x \in [0, 1/n] \\ 0 & x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

   Allora, posto $L = \lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$,

   (a) $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a zero in $[0, 1]$ (50%)
   (b) $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a zero in $[0, 1]$ (0%)
   (c) $L = 0$ (0%)

(d) L esiste ed è finito. (0%)
(e) $L = +\infty$ (50%)
(f) tutte le altre affermazioni sono false (0%)

7. **Integrale improprio**

Siano $\alpha, \beta > 0$. L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} (\arctan x)^\alpha \left(\arctan \frac{1}{x}\right)^\beta dx$$

(a) converge per ogni $\alpha, \beta > 0$
(b) converge per ogni $\alpha > 0$ e $\beta > 1$ ✓
(c) converge per ogni $\alpha > 1$ e $\beta > 0$
(d) diverge per ogni $\alpha > 0$ e $\beta \in (0, 1)$ ✓
(e) tutte le altre affermazioni sono false