

**12/02/2021**

**1. Serie di potenze**

Si consideri lo sviluppo di  $\arctan(x - \frac{5}{3}x^3)$  in serie di potenze (centro  $x_0 = 0$ ), ovvero

$$\arctan\left(x - \frac{5}{3}x^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Determinare  $a_3$ .

(si ricordi che  $\arctan(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}$  per  $|y| \leq 1$ ).

- -2 ✓

**2. Serie**

Si dica per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n^2}$$

- (a)  $\alpha > 0$  ✓
- (b)  $\alpha \geq 0$
- (c)  $\alpha < 0$
- (d)  $\alpha \leq -1$
- (e) per ogni valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$
- (f) per nessun valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$

**3. Successioni**

Si consideri la successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$  così definita:

$$x_n = \left(n(-1)^n, 2/n, (-1)^{n+2}\right)$$

- (a)  $x_n$  è limitata
- (b)  $x_n$  ammette (almeno) una sottosuccessione convergente in  $\mathbb{R}^3$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  non esiste ✓
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$
- (e) tutte le altre affermazioni sono false

**4. Insiemi**

L'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 \neq 0\} \setminus \{(0, 0)\}$$

è costituito da

- (a) 3 componenti connesse, di cui due semplicemente connesse ✓
- (b) 3 componenti connesse, tutte semplicemente connesse
- (c) 2 componenti connesse, tutte semplicemente connesse
- (d) 2 componenti connesse, di cui una non è semplicemente connessa
- (e) tutte le altre affermazioni sono false

### 5. Campi vettoriali

Sia  $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$  e si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{\partial U}{\partial x} + (\alpha - 1) \cos x, \frac{\partial U}{\partial y} - \sin y \right)$$

- (a)  $F$  è conservativo per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . ✓
- (b)  $F$  è conservativo se e solo se  $\alpha = 0$ .
- (c)  $F$  è conservativo se e solo se  $\alpha = 1$ .
- (d)  $F$  è conservativo se e solo se  $\alpha = 2$ .
- (e) Senza ulteriori informazioni su  $U$  non si può stabilire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  il campo  $F$  è conservativo.
- (f) tutte le altre affermazioni sono false

### 6. Integrali impropri

Il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{e^t - 1 - t}{\sin t^\alpha} dt.$$

- (a) diverge per  $\alpha = 3$  ✓
- (b) converge per  $\alpha = 3$
- (c) converge per  $\alpha \leq 3$
- (d) diverge per  $\alpha = 2$
- (e) converge per  $\alpha = 4$
- (f) tutte le altre affermazioni sono false

## 7. Funzioni

Siano  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_o \in \mathbb{R}^2$  tali che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = v_1 + v_2 + v_1 v_2, \quad \forall v = (v_1, v_2) \text{ vettore di modulo } 1.$$

Allora:

- (a)  $f$  è necessariamente discontinua in  $x_o$  (0%)
- (b)  $f$  è derivabile in  $x_o$  (50%)
- (c)  $f$  non è differenziabile in  $x_o$  (50%)
- (d)  $f$  ammette derivate parziali continue in  $x_o$  (0%)
- (e)  $f$  è differenziabile in  $x_o$  (0%)
- (f) tutte le altre affermazioni sono false (0%)