Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 17.6.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la convergenza della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} (x^2-1)^n,$$

dopodiché, detta S tale somma (definita dove la serie converge) si studi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{\sqrt{2}} \big(S(x)\big)^{\alpha} \log\big(3-x^2\big)\, dx$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

2. Data la funzione

$$f : E \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = \frac{2x-1}{x^2+y^2}$$

dove

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, 0 < x^2+y^2 \leqslant 2\big\}$$

se ne studino le curve di livello, dopodiché se ne trovino gli eventuali punti critici, se ne discuta eventualmente la loro natura e si discuta infine l'esistenza del minimo e del massimo per f.

Soluzione della traccia del 17.6.2020

1. La convergenza puntuale è immediata: la serie converge per

$$|x^2 - 1| < 1$$

e non converge per

$$|x^2 - 1| \geqslant 1.$$

Per fare ciò è sufficiente utilizzare il criterio della radice n-esima oppure applicare quanto visto sulla serie geometrica applicando il cambio di variabile $y = x^2 - 1$. In dettaglio di avrà che

$$\begin{array}{lll}
\text{la serie converge per} & 0 < x^2 < 2 \iff x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}), \\
\text{la serie diverge positivamente per} & x^2 \geqslant 2 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty), \\
\text{la serie diverge è indeterminata per} & x = 0.
\end{array}$$

La convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\, y^n$$

risulta uniforme e totale negli insiemi $[\alpha, \beta] \subset (-1, 1)$, per cui la serie data converge uniformemente e totalmente negli insiemi

$$[a, b] \cup [c, d] \qquad \text{con} \quad [a, b] \subset (-\sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad [c, d] \subset (0, \sqrt{2}).$$

Si osservi inoltre che, per $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$$

da cui si ottiene che, per i valori di x per i quali vi è convergenza,

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (x^2 - 1)^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\, (x^2 - 1)^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} (x^2 - 1)^n. \tag{1}$$

Di conseguenza la somma S della serie data soddisferà

$$\frac{1}{2} \frac{x^2 - 1}{2 - x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{x^2 - 1}{2 - x^2} = \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}.$$

Poiché

$$\log(1 + t) = t + o(t) \qquad \text{e} \qquad 3 - x^2 = 1 + (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$$

si ha che

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{\log(3 - x^2)}{\sqrt{2} - x} = 2\sqrt{2} \tag{2}$$

Per studiare l'integrale generalizzato l'unico punto che può creare problemi è l'estremo destro dell'intervallo dove S, si veda (1), va all'infinito.
Per il criterio del confronto (dalla stima (1)) si ha che

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}\right)^{\alpha}\log(3-x^2)\leqslant\big(S(x)\big)^{\alpha}\log(3-x^2)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{x^2-1}{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}\right)^{\alpha}\log(3-x^2)$$

quindi per capire il carattere dell'integrale ci si può limitare a studiare l'integrale della funzione

$$\left(\frac{x^2-1}{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}\right)^{\alpha}\log(3-x^2).$$

A sua volta questa funzione è confrontabile (si veda (2)) con

$$\frac{1}{(\sqrt{2}-x)^{\alpha}}\,(\sqrt{2}-x).$$

Di conseguenza l'integrale richiesto converge per ogni $\alpha<2$ (cioè per $\alpha\in(0,2)$).

Si osservi che è possibile anche calcolare la somma della serie: partendo, per semplicità, da $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\,y^n$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\,y^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1-1}{n+1}\,y^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)y^n.$$

Nell'insieme di convergenza si ha (meditare!)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)y^n=\sum_{n=1}^{+\infty}y^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}y^n=$$
$$=\frac{y}{1-y}-\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}y^{n+1}=$$
$$=\frac{y}{1-y}-\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^y s^n\,ds.$$

Poiché scegliamo $y\in(-1,1)$ nell'insieme $[0,y]$ (o $[y,0]$) si ha convergenza uniforme per cui

$$\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^y s^n\,ds=\frac{1}{y}\int_0^y\sum_{n=1}^{+\infty}s^n\,ds=\frac{1}{y}\int_0^y\frac{s}{1-s}\,ds=$$
$$=\frac{1}{y}\int_0^y\frac{s-1+1}{1-s}\,ds=\frac{1}{y}\int_0^y\left[\frac{1}{1-s}-1\right]ds=$$
$$=\frac{1}{y}\big(-\log|1-y|-y\big)=-\frac{\log|1-y|}{y}-1.$$

Considerando la serie data si avrà quindi che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}(x^2-1)^n = \frac{x^2-1}{2-x^2} - \frac{\log(2-x^2)}{x^2-1} - 1.$$

Senza il confronto si potrebbe utilizzare direttamente la somma per stimare l'integrale. Si ha

$$S(x) = \frac{x^2-1}{2-x^2}\left[1-(2-x^2)\frac{\log(2-x^2)}{(x^2-1)^2} - \frac{2-x^2}{x^2-1}\right].$$

Valutando il limite per $x \to \sqrt{2}$ (da sinistra) si ottiene che S è asintotica a

$$\frac{1}{\sqrt{2}-x}$$

per cui si conclude come prima.

2. Si fissi una costante $c \in \mathbf{R}$ e si risolva $f(x,y) = c$, cioè

$$\frac{2x-1}{x^2+y^2} = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad cx^2 + cy^2 - 2x + 1 = 0$$

che rappresenta una circonferenza e precisamente l'insieme dei punti di $\mathbf{R}^2$ tali che

$$\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c} \qquad \text{per } c \neq 0,$$

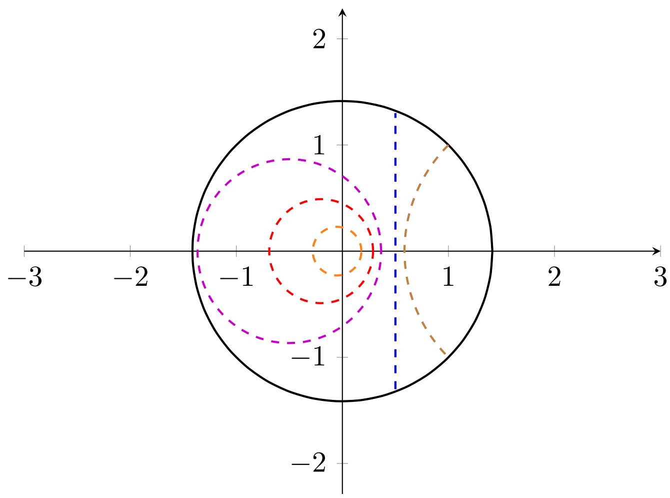
mentre

$$2x-1 \qquad \text{per } c = 0.$$

Si osserva quindi che

$$\begin{aligned}
\text{per } c > 1 &\quad \text{l'insieme di livello } c \text{ è l'insieme vuoto } \emptyset,\\
\text{per } c = 1 &\quad \text{l'insieme di livello } c \text{ è il punto}\{(1,0)\}\\
\text{per } c = -1 &\quad \text{l'insieme di livello } c \text{ è il punto}\{(-1,0)\}\\
\text{per } c = 0 &\quad \text{l'insieme di livello } c \text{ è un segmento}\\
\text{per gli altri } c < 1 &\quad \text{l'insieme di livello } c \text{ è la circonferenza}\\
&\quad \text{di centro } \left(\frac{1}{c}, 0\right) \text{ e raggio } \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c}}
\end{aligned}$$

Da ciò si ricava che la funzione ammette massimo nel punto $(1,0)$, e tale massimo è 1; si ricava inoltre che la funzione non ha minimo, in quanto l'insieme di livello c è non vuoto per ogni $c < 1$.
Alcune curve di livello (intersecate con l'insieme E) sono mostrate in figura. In nero è evidenziato il bordo di E.



Volendo risolvere il problema senza le curve di livello: per prima cosa si osservi che l'insieme E non è compatto, poiché la funzione non è definita in $(0,0)$.
Si osservi che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\infty,$$

da cui si deduce che la funzione non ammette minimo. Vediamo se ammette massimo. Cercando i punti stazionari si ottiene che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\big[-2x^2+2y^2+2x\big] = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y\big(1-2x\big)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha che o $y = 0$ oppure $2x = 1$. Se $y = 0$ dalla prima equzione si deduce che $x = 1$ ($x = 0$ non è ammissibile in quanto $(0,0) \notin E$); se invece $2x = 1$ la prima equazione non ha soluzione. Di conseguenza l'unico punto stazionario di f in E è

$$(1,0).$$

Parametrizzando il bordo di E (tranne l'origine che abbiamo già analizzato) con la curva

$$\gamma(t) = \big(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t\big), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

si ottiene che

$$f \circ \gamma(t) = \frac{1}{2}\big(2\sqrt{2}\cos t - 1\big).$$

Derivando si ottengono i due punti

$$(\sqrt{2}, 0), \quad (-\sqrt{2}, 0).$$

Per cui valutando f nei tre punti candidati $(2,0), (-2,0), (1,0$ si ottiene che $(1,0)$ è di massimo.

Valutando la matrice hessiana per studiare la natura del punto $(1,0)$ (anche se a questo punto non ce ne sarebbe bisogno) si ottiene

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si conclude che $(1,0)$ è un massimo locale (ma anche assoluto per quanto visto precedentemente).