Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 13.7.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la successione di funzioni definite su $[0,+\infty)$

$$f_n(x) = \begin{cases} n\log\left(1-\frac{x^2}{n}\right) & \text{se } 0 \le x < \sqrt{n} \\ 0 & \text{se } x \ge \sqrt{n}, \end{cases}$$

1. si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di f_n;
2. si discuta la convergenza puntuale ed uniforme di f_n'.

2 Data la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2(3-t)) & t \in [0,2] \\ \left(\dfrac{4t-t^2}{2}, 4t-t^2\right) & t \in (2,4] \end{cases}$$

ed il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{8y^2x}{1+4x^2},\ 2y\log(1+4x^2)\right)$$

1. si dica se la curva è continua, chiusa, semplice, regolare;
2. si determini il lavoro svolto dal campo F lungo il cammino γ;
3. si determini il lavoro svolto dal campo F lungo il cammino γ ristretto all'intervallo $[1, 2+\sqrt{2}]$, cioè limitandosi a considerare $t \in [1, 2+\sqrt{2}]$.

Soluzione della traccia del 13.7.2020

1. Poiché f_n può essere riscritta come segue

$$f_n(x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

e l'argomento del logaritmo converge a e^{-x^2} per ogni x si ha, dalla continuità della funzione $t \mapsto \log t$, che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -x^2 \qquad\qquad \text{per ogni } x \in [0,+\infty).$$

La convergenza non può essere uniforme in $[0,+\infty)$ dal momento che f_n è nulla per $x \geqslant \sqrt{n}$. Però se ci si limita ad intervalli limitati del tipo $[0,a)$ o $[0,a]$ allora in tali intervalli la convergenza è uniforme. Infatti la successione

$$n \mapsto \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \qquad\qquad \text{è definitivamente crescente per ogni } x \text{ reale.}$$

Detta f la funzione $f(x) = -x^2$ per $x \geqslant 0$, essendo la funzione $t \mapsto \log t$ crescente si ha che

$$f_n \qquad \text{converge in maniera crescente a } f$$

e di conseguenza

$$\sup_{x\in[0,a]} \big|f_n(x) - (-x^2)\big| = \sup_{x\in[0,a]} \big|f_n(x) + x^2\big| = \big|f_n(a) + a^2\big|$$

e poiché in a f_n converge a $-a^2$ si conclude.

Per quanto riguarda le derivate si ha:

$$f_n'(x) = -\frac{2nx}{n - x^2} \quad \text{per } x < \sqrt{n}, \qquad\qquad f_n'(x) = 0 \quad \text{per } x \geqslant \sqrt{n}.$$

Nuovamente si ha convergenza puntuale per ogni $x \geqslant 0$ (f_n è definitivamente minore di 0 per $x > 0$) alla funzione

$$f(x) = -2x,$$

ma non quella uniforme, se non restringendosi ad intervalli limitati del tipo $[0,a]$.

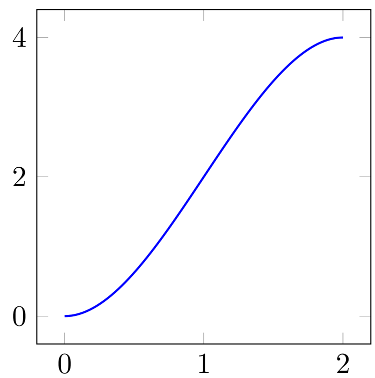
2. Cominciamo con il mostrare il sostegno di γ per capire meglio quanto segue.
La curva, limitatamente a $t \in (2,4]$, è un segmento poiché

$$\gamma_2(t) = 2\gamma_1(t) \qquad \text{per } t \in (2,4],$$

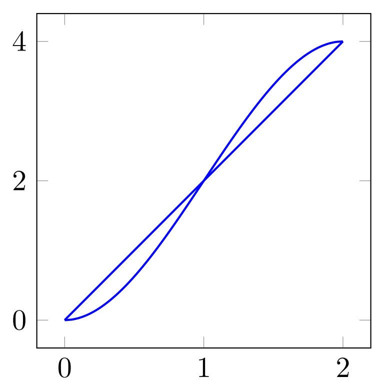
segmento che unisce i punti $(2,4)$ al punto $(0,0)$. È quindi un tratto della retta $y = 2x$.
La curva, limitatamente a $t \in [0,2]$, è cartesiana. Si noti che

$$\gamma'(t) = (1, 6t - 3t^2) \qquad \text{per } t \in [0,2]$$

e in particolare $\gamma'(0) = \gamma'(2) = (1, 0)$. Studiando più in dettaglio la seconda componente di γ ci si accorge che γ, per $t \in [0, 2]$, avrà il seguente sostegno:



Poiché il secondo ramo è un segmento che unisce i punti $(2, 4)$ al punto $(0, 0)$ il sostegno della curva è



La curva risulta continua in quanto

$$\lim_{t \to 2^+} \gamma(t) = \gamma(2)$$

(per gli altri valori di t la cosa è ovvia). A questo punto è immediato verificare che è chiusa. Si osservi che γ è C^1 a tratti: infatti derivando si ottiene

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1, 6t - 3t^2) & t \in [0, 2] \\ (2 - t, 4 - 2t) & t \in (2, 4] \end{cases}$$

ed, evidentemente (lo si verifichi), γ' non ha mai modulo nullo, però

$$\lim_{t \to 2^-} \gamma'(t) \neq \lim_{t \to 2^+} \gamma'(t).$$

Lo stesso si potrebbe fare, visto che la curva è chiusa per t che tende a 0 e a 4, cioè

$$\lim_{t\to 0^+} \gamma'(t) \neq \lim_{t\to 4^-} \gamma'(t).$$

Quindi la curva è C^1 a tratti e ha modulo di γ' sempre diverso da 0 se nel punto 2 assumiamo $\gamma'(2)$ la derivata sinistra di γ.
Vediamo se γ è semplice o meno (non lo sarà, come si evince dalla figura che rappresenta il suo sostegno). Prima di tutto si osservi che non possono esistere $t, s \in [0,2]$ tali che

$$\gamma(t) = \gamma(s)$$

per il fatto che γ è cartesiana limitatamente all'intervallo $[0,2]$ e inoltre il modulo di γ' non si annulla mai. Le stesse cose si possono dire per γ ristretta a $(2,4]$.
Rimane da verificare se per caso esistono $t \in (0,2]$ e $s \in (2,4)$ tali che

$$\gamma(t) = \gamma(s).$$

Escludiamo gli estremi in quanto, poiché la curva è chiusa, chiaramente $t = 0$ e $s = 4$ renderebbero vera l'ultima uguaglianza.
Imponendo tale uguaglianza si ha

$$\begin{cases} t = \dfrac{4s - s^2}{2} \\ t^2(3-t) = 4s - s^2 \end{cases}$$

da cui

$$t^2(3-t) = 2t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t(t^2 - 3t + 2) = 0$$

che ha come soluzioni

$$t = 0, 1, 2.$$

Scartando 0 e 2 rimane solamente $t = 1$ che fornisce $s^2 - 4s + 2 = 0$. Risolvendo si ottiene

$$s = 2 - \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s = 2 + \sqrt{2}.$$

Essendo il primo valore esterno all'intervallo $(2,4)$ si ottiene che

$$\gamma(1) = \gamma(2 + \sqrt{2})$$

come, a posteriori, è facile verificare. Di conseguenza la curva non è semplice.

È possibile calcolare esplicitamente il lavoro, ma in questo caso si osservi che il campo è irrotazione (e definito su tutto $\mathbf{R}^2$) per cui il lavoro lungo γ, che è chiusa, è nullo.

La stessa cosa vale per il secondo integrale da calcolare, poiché se restringiamo γ all'intervallo $[1, 2 + \sqrt{2}]$ otteniamo un'altra curva che risulta chiusa.