Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 26.8.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si consideri la serie di funzioni definite per $x \geqslant 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^\alpha} \log\left(\frac{x+n}{n}\right) .$$

Al variare del parametro $\alpha > 0$,

a) si studino la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie tranne la convergenza uniforme della serie negli insiemi illimitati del tipo $[a, +\infty)$, con $a \geqslant 0$ arbitrario;

b) **facoltativo -** si studi la convergenza uniforme della serie in $[0, +\infty)$

2 Si dica per quali valori di $\alpha > 0$ la curva data in forma polare

$$\rho = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\right)^\alpha \qquad \vartheta \in (0, \pi/2]$$

a) è regolare,

b) è rettificabile, cioè ha lunghezza finita.

Soluzione della traccia del 26.8.2020

1. Definiamo per comodità

$$f_n(x) := \log\left(\frac{x+n}{n}\right)\frac{1}{(n+x)^\alpha}.$$

Innanzitutto si noti che per qualunque $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{x+n}{n}\right)\frac{1}{(n+x)^\alpha} = 0.$$

Inoltre per $x = 0$ la serie è identicamente nulla, per $x > 0$ si ha

$$\log\left(\frac{x+n}{n}\right)\frac{1}{(n+x)^\alpha} \leqslant \log\left(\frac{x+n}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha} = \left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)\frac{1}{n^\alpha}$$

per cui vi è convergenza puntuale per ogni $\alpha > 0$ in $[0, +\infty)$.
Per vedere se vi è convergenza uniforme e totale in qualche insieme si può studiare la derivata prima di f_n. Si ha

$$f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^{\alpha+1}}\left[1 - \alpha\log\left(\frac{x+n}{n}\right)\right].$$

Si osserva che f_n' è dapprima positiva, poi, definitivamente, negativa e si annulla per

$$\left(\frac{x+n}{n}\right)^\alpha = e \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_n = n\big(e^{1/\alpha} - 1\big).$$

Per tale valore si ha

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} f_n(x) = f_n(x_n) = \frac{1}{e\,\alpha}\,\frac{1}{n^\alpha} \tag{1}$$

per cui si deduce che vi è convergenza totale, e quindi uniforme, in $[0, +\infty)$ per $\alpha > 1$ e non vi è convergenza totale per $\alpha \leqslant 1$. Per $\alpha \leqslant 1$ sicuramente si ha convergenza uniforme e totale nei compatti $[0, a]$: infatti dallo studio della derivata prima di f_n si ha che, almeno definitivamente, f_n è crescente in $[0, a]$, per cui il suo stremo superiore è assunto proprio in a. Da ciò si deduce che per ogni $a > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \sum_{n=N}^{+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(a)|$$

e, poiché la serie converge puntualmente, vi è convergenza totale e quindi uniforme in $[0, a]$.

Veniamo all'ultimo punto, quello facoltativo. Questo è complicato perché, non avendo convergenza totale per $\alpha \leqslant 1$ in $[0, +\infty)$, non si può concludere in maniera

immediata che vi sia convergenza uniforme in $[0,+\infty)$ per $\alpha \leqslant 1$.
Non si può nemmeno escludere che non vi sia perché f_n convergono uniformemente a zero, grazie a (1).

Punto facoltativo - Vediamo ora come la serie non converga uniformemente in $[0,+\infty)$ per $\alpha \leqslant 1$.

Si osservi che f_n è il prodotto di due funzioni,

$$g_n(x) := \log\left(\frac{x+n}{n}\right) = \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \qquad \text{e} \qquad h_n(x) := \frac{1}{(n+x)^\alpha}$$

e si osservi inoltre che

$$g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x) \qquad \text{e} \qquad h_n(x) \geqslant h_{n+1}(x)$$

da cui

$$f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x).$$

Ora si fissi $N \in \mathbf{N}$ arbitrario e si stimi la quantità

$$\sum_{n=N+1}^{2N} f_n(x).$$

Per quanto detto sulla monotonia in n di f_n si ha

$$\sum_{n=N+1}^{2N} f_n(x) \geqslant \sum_{n=N+1}^{2N} f_{2N}(x) \geqslant N f_{2N}(x).$$

Poiché $f_n \geqslant 0$ e da (1) si ha

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\sum_{n=N}^{2N} f_n(x)\right| \geqslant \sup_{x\in[0,+\infty)} N f_{2N}(x) = N\,\frac{1}{e\,\alpha}\,\frac{1}{(2N)^\alpha} = \frac{N^{1-\alpha}}{2^\alpha e\,\alpha}$$

e, ricordando che $\alpha \in (0,1]$, si conclude che

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right| \geqslant \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\sum_{n=N}^{2N} f_n(x)\right| \geqslant \frac{N^{1-\alpha}}{2^\alpha e\,\alpha} \not\longrightarrow_{N\to+\infty} 0$$

da cui si conclude che non c'è convergenza uniforme in $[0,+\infty)$.

2. Una parametrizzazione della curva è data da

$$\vartheta \mapsto \left(\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\right)^\alpha \cos\vartheta, \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\right)^\alpha \operatorname{sen}\vartheta\right), \qquad \vartheta \in (0,\pi/2].$$

Poniamo per semplicità

$$\gamma(\vartheta) = \big(f(\vartheta)\cos\vartheta, f(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\big)$$

con $f(\vartheta) = (\operatorname{sen}\vartheta)^{-\alpha}$. Si ha

$$\big|\gamma'(\vartheta)\big| = \sqrt{(f'(\vartheta))^2 + (f(\vartheta))^2} = \frac{1}{(\operatorname{sen}\vartheta)^{\alpha+1}}\sqrt{(\operatorname{sen}\vartheta)^2 + \alpha^2(\cos\vartheta)^2}.$$

Integrando tra 0 e $\pi/2$ e poiché $\operatorname{sen}\vartheta$ è asintotico a ϑ per ϑ che tende a zero si ha che la lunghezza richiesta è sempre infinita per qualunque valore di $\alpha > 0$.
La curva è regolare e mai rettificabile.