Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 14.9.2020

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la successione di funzioni definite su $\mathbf{R}$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2 n^2}$$

a) si discuta la convergenza della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$;

b) si discuta la convergenza della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

2. Sia D il dominio massimale della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2 - 1)\log(x^2 + 2y^2 - 1),$$

e si consideri l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant 2\}$.

a) Si studino e disegnino le curve di livello di f nell'insieme $E \cap D$;

b) si dica se f ammette massimo e/o minimo nell'insieme $E \cap D$.

Soluzione della traccia del 14.9.2020

1. Iniziamo dal punto **b)**, ovvero dalla convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + x^2 n^2},$$

e studiamone innanzitutto la convergenza totale. Dal momento che, per n qualsiasi fissato, $\frac{d}{dx}\frac{1}{n+x^2n^2} = -\frac{2xn^2}{(n+x^2n^2)^2} \geq 0$ se e solo se $x \leq 0$, si ha che $x = 0$ è un punto di massimo globale per $|f_n(x)|$, e

$$\sup_{\mathbf{R}} |f_n(x)| = |f_n(0)| = \frac{1}{n}.$$

Dal momento che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, non si ha convergenza totale su $\mathbf{R}$. Essendo comunque $|f_n(x)|$ pari, e monotona decrescente su $[0, +\infty)$, si ha

$$\sup_{(-\infty,a]\cup[a,\infty)} |f_n(x)| = |f_n(a)| = \frac{1}{n + a^2 n^2},$$

per $a > 0$ qualsiasi e per ogni n. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a^2n^2}$ è convergente per ogni $a > 0$ (per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$), per cui $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge *totalmente* su insiemi del tipo $(-\infty, a] \cup [a, \infty)$, con $a > 0$. Su tali insiemi, la convergenza è anche *uniforme*. *Puntualmente*, segue direttamente che $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge per ogni $x \neq 0$. La convergenza puntuale non può essere estesa ad $x = 0$, dal momento che $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Passiamo al punto **a)**, ovvero allo studio della convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Dal momento che il punto b) consiste sostanzialmente nello studio della convergenza assoluta di $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, possiamo immediatamente concludere che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge *totalmente* (ed uniformemente) su insiemi del tipo $(-\infty, a] \cup [a, \infty)$, con $a > 0$ e dunque *puntualmente* su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. A differenza del punto precedente, possiamo estendere la convergenza puntuale ad $x = 0$, visto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

è il prototipo delle serie di Leibniz. (n.b. partendo dal punto a), avremmo potuto dedurre subito la convergenza di $\sum_n f_n(x)$ su tutto $\mathbb{R}$, dal momento che tale serie soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz per ogni $x \in \mathbb{R}$)

Mostriamo infine che $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$, sebbene non converga totalmente su $\mathbf{R}$. A tal fine, si può scrivere $\sum_n f_n(x)$ come serie di Leibniz, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n g_n(x), \qquad \text{con } g_n(x) = \frac{1}{n + x^2 n^2}.$$

Dopo aver osservato che $g_n(x) \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, e $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed $n \in \mathbb{N}$ (quest'ultimo passaggio si può verificare direttamente studiando la disequazione associata, o il segno di $\partial_n g_n(x)$), si deduce dal criterio di Leibniz che

$$\sup_{\mathbf{R}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \leq \sup_{\mathbf{R}} g_{N+1}(x) = \sup_{\mathbf{R}} \frac{1}{N+1+x^2(N+1)^2} = \frac{1}{N+1},$$

e dunque

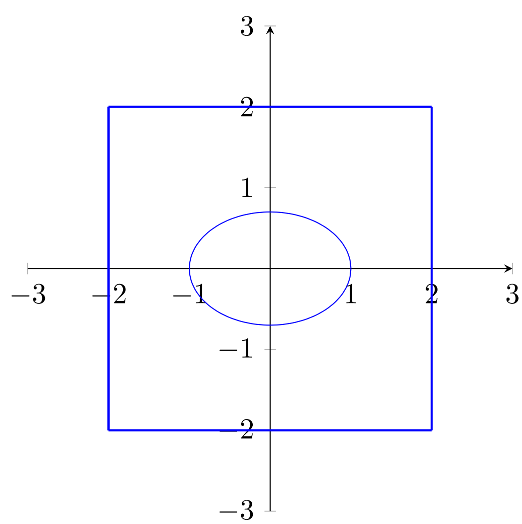
$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\mathbf{R}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| = 0,$$

che non è altro che la definizione di convergenza uniforme di $\sum_n f_n(x)$ su $\mathbf{R}$.

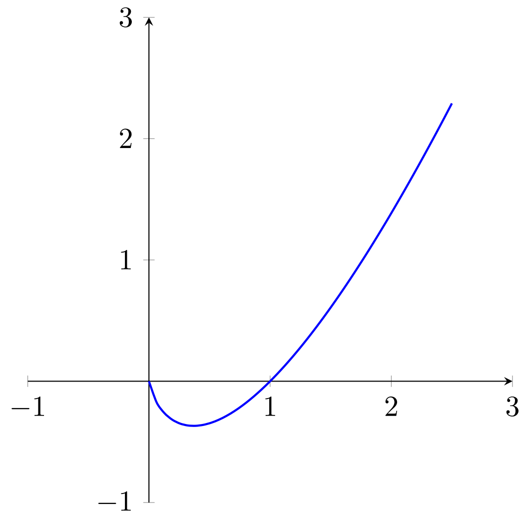
2. Il dominio è l'insieme limitato, connesso, che ha come bordo le due curve rappresentate in figura, dove la parte di bordo evidenziata in neretto appartiene all'insieme, l'altra parte no. L'insieme $E \cap D$ non è né aperto, né chiuso.
Il bordo interno è il luogo degli zeri definito da

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

dal momento che la funzione $(x, y) \mapsto \log(x^2+2y^2-1)$ è definita per $x^2+2y^2-1 > 0$.



Per trovare gli insiemi di livello è sufficiente analizzare la funzione $t \mapsto t \log t$, il cui grafico è



Il minimo è assunto, come è facile verificare, per $t = 1/e$ e vale $-1/e$. Infatti

$$\frac{d}{dt} t \log t = \log t + 1$$

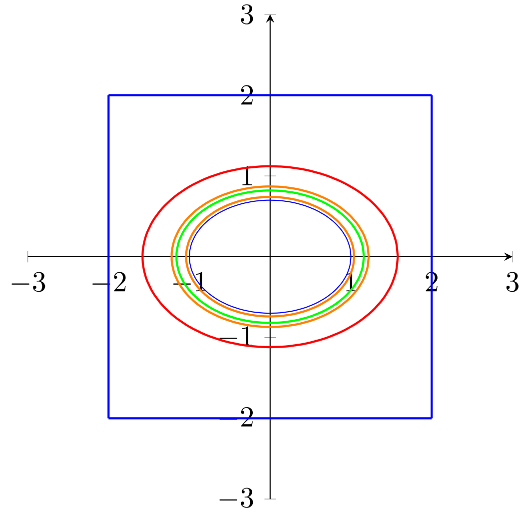
che si annulla solo per $t = 1/e$. Di conseguenza

$$t \log t = c$$

per valori negativi e maggiori di $-1/e$ ha due soluzioni, per $c \geqslant 0$ o $c = -1/e$ ha una sola soluzione, per gli altri valori di c l'equazione non ha soluzione.
Se ora sostituiamo a t la quantità $x^2 + 2y^2 - 1$ si ottiene che per

$$-\frac{1}{e} < c < 0$$

l'insieme di livello è dato da due ellissi, come mostrato in figura ed evidenziato in arancione, per $c = -e^{-1}$ una sola ellisse evidenziata in figura in verde, per $c > 0$ una sola ellisse evidenziata in figura in rosso.



Poiché la funzione $t \mapsto t \log t$ è estendebile per continuità anche per $t = 0$ anche f è estendibile ad una funzione $\tilde{f}$ ponendo $\tilde{f}(x, y) = 0$ per (x, y) che appartiene all'ellisse definita da $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$. Tale $\tilde{f}$ è definita su un compatto, per cui il minimo e il massimo di $\tilde{f}$ esistono nella chiusura di $E \cap D$. Poiché il valore di $\tilde{f}$ sull'ellisse definita da $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ è zero, $\tilde{f}$ è continua e f assume sia valori positivi che negativi, questo assicura che anche f assume sia massimo che minimo in $E \cap D$.

Dallo studio delle curve di livello si deduce che tutti i punti dell'ellisse disegnata in verde sono punti di minimo e i quattro vertici del bordo di E sono punti di massimo.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\big[\log(x^2 + 2y^2 - 1) + 1\big] = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\big[\log(x^2 + 2y^2 - 1) + 1\big] = 0 \end{cases}$$

si trovano i punti che soddisfano $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$. Parametrizzando i lati del quadrato si trovano i punti $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$. Considerando poi anche i vertici $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, e valutando la funzione f in tutti i candidati si ottiene che f, e anche $\tilde{f}$, assumono massimo nei quattro vertici e minimo nei punti che soddisfano $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.