Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 12.2.2021

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la successione di funzioni definite su $\mathbf{R}$

$$f_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{n^2 + e^{-2nx}}$$

a) se ne discuta la convergenza puntuale ed uniforme ;

b) si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{0} f_n(x)dx.$$

2. Data la curva $\gamma(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen}(2t)\cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$, si dica se la curva è semplice, chiusa, regolare.
Dopodiché si calcoli il lavoro svolto dal campo di vettori $F(x, y) = (1+xy^2, 1+x^2y)$ lungo la curva γ.

Soluzioni

1. Si verifica facilmente che f_n converge puntualmente a zero in $\mathbf{R}$.
Usando la disuguaglianza $2ab \leqslant a^2 + b^2$ che è sempre stretta se non quando $a = b$ si può ricavare che

$$0 \leqslant \frac{ne^{-nx}}{n^2 + e^{-2nx}} \leqslant \frac{1}{2}$$

e inoltre che

$$\frac{ne^{-nx}}{n^2 + e^{-2nx}} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\frac{\log n}{n}.$$

Diversamente si può derivare f_n e, studiando il segno di f_n', ricavare che f_n è crescent in $(-\infty, x_n)$ e decrescente in $(x_n, +\infty)$, dove $x_n = -\frac{\log n}{n}$. Si ha quindi che f_n converge puntualmente, ma non uniformemente visto che il suo massimo è $1/2$, a zero in $\mathbf{R}$.
Per calcolare l'integrale richiesto, poiché $x_n \in (-1, 0)$, si può procedere nel seguente modo: scegliendo $\delta \in (0, 1)$ arbitrario e scrivendo

$$\int_{-1}^{0} f_n(x)dx = \int_{-1}^{-\delta} f_n(x)dx + \int_{-\delta}^{0} f_n(x)dx$$

si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{-\delta} f_n(x)dx = 0$$

mentre

$$0 < \int_{-\delta}^{0} f_n(x)dx < \frac{\delta}{2}.$$

Per l'arbitrarietà di δ si conclude.

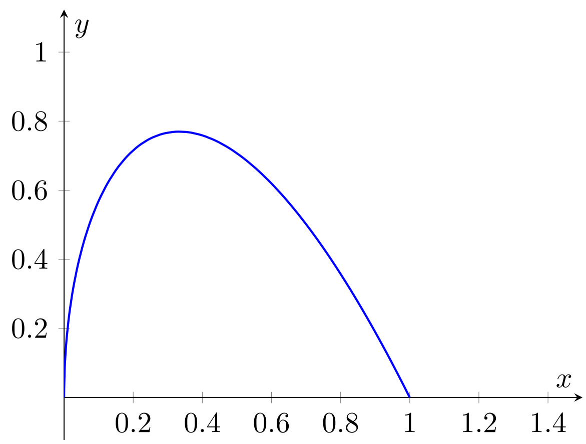
2. Che la curva non sia chiusa si verifica facilmente e si ha $\gamma(0) = (0, 0)$ e che $\gamma(\pi/2) = (1, 0)$.
Per vedere che è semplice è sufficiente verificare che la prima componente è strettamente crescente, per cui iniettiva. Da ciò si ha non solo che la curva è semplice, ma anche cartesiana.
Infine per vedere che è regolare vediamo quando si annullano entrambe le componenti della derivata della curva: la prima

$$\gamma_1'(t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 0 \ \vee \ t = \frac{\pi}{2}.$$

A questo punto è sufficiente verificare se per questi due valori la derivata della seconda componente si annulla, e ciò accade solo per $t = \pi/2$, per cui γ non è regolare in $\pi/2$.

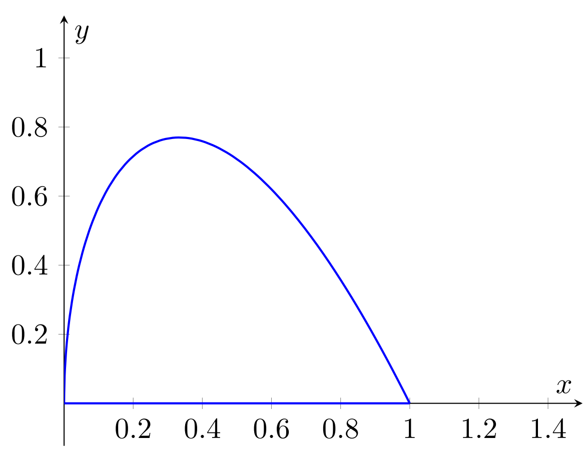
Per calcolare il lavoro richiesto vediamo due modi simili, nel senso che il presupposto per entrambi è che il campo F è irrotazionale.

Primo: da quanto visto precedentemente $\gamma(0) = (0,0)$ e che $\gamma(\pi/2) = (1,0)$ e si verifica facilmente che entrambe le componenti di γ sono positive per $t \in (0, \pi/2)$. Riportiamo anche l'immagine della curva in figura.



Poiché il campo è irrotazionale il lavoro lungo qualunque cammino chiuso è nullo. Di conseguenza possiamo trovare un cammino chiuso "chiudendo" il sostegno di γ in modo che il calcolo del lavoro lungo la curva scelta risulti più semplice di quello assegnato. Ad esempio si può scegliere il segmento immagine della curva $\delta : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (1 - t, 0)\,.$$



Poiché F è irrotazionale si ha che

$$\int_\gamma \big(F_1 dx + F_2\, dy\big) = -\int_\delta \big(F_1 dx + F_2\, dy\big) = -\int_0^1 (-1) dt = 1\,.$$

Ancor più direttamente, sempre perché F è irrotazionale, il lavoro lungo il cammino

γ è uguale al lavoro svolto lungo il cammino η

$$\eta(t) = (t, 0)\,.$$

Altro modo, ancor più semplice, è trovare un potenziale per F, ad esempio la funzione

$$f(x,y) = x + y + \frac{x^2y^2}{2},$$

e valutando $f(1,0) - f(0,0) = 1$ si ottiene il lavoro richiesto.