Corso di laurea: matematica
Programma di
Introduzione alle equazioni alle derivate parziali – a.a. 2025/2026
Insegnanti: Claudio Marchi e Fabio Paronetto

26.2.2026 Introduzione al corso: informazioni generali e breve presentazione dei contenuti del corso.

Alcune notazioni, definizione di "Equazione alle derivate praziali" (EDP), classificazione in equazioni lineari, semilineari, quasilineari e completamente non lineari. Tipici problemi da affrontare quando si ha a che fare con un'equazione alle derivate parziali: condizioni che garantiscono l'esistenza della soluzione, condizioni che garantiscono la eventuale unicità della soluzione, proprità di una soluzione, regolarità di una soluzione, ecc.
Alcuni esempi: equazione del trasporto, equazione di Lapalce, equazione del calore, equazione delle onde.
Classificazione delle equazioni alle derivate parziali lineari (e quasi-lineari) del secondo ordine in $\mathbf{R}^n$.
Esempi.
Alcuni richiami: lo spazio $C^k(\Omega)$, lo spazio $C^k(\bar{\Omega})$, insiemi di regolarità C^k or Lipschitz. Esempi.

27.2.2026 Alcuni richiami: teorema della divergenza.
Derivate deboli e spazi di Sobolev: alcuni esempi in dimensaione 1 e 2.
Richiami sulla convoluzione tra due funzioni: proprietà più importanti della convoluzione. Successioni di mollificatori o identità approssimata $(\rho_n)_n$. Alcuni richiami sulla convergenza di $\rho_n * f$ for $f \in C^0$ and $f \in L^p$, $p \in [1, +\infty)$.

5.3.2026 Alcuni esempi di mollificatori, non solo a supporto compatto.
Richiami sugli spazi L^p: disuguaglianza di Hölder.
Una breve introduzione alla teoria delle distribuzioni: duale di uno spazio vettoriale di dimensione infinita, definizione di una distribuzione, esempi, le funzioni L^1_{loc} sono distribuzioni, derivata distribuzionale della funzione di Heaviside, la delta di Dirac δ, alcune successioni di funzioni L^1_{loc} che approssimano la δ.
Convergenza in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Convoluzione di una distribuzione con una funzione $C^\infty_c(\mathbf{R}^n)$. La convoluzione di una distribuzione con una funzione $\phi \in C^\infty_c(\mathbf{R}^n)$ è $C^\infty(\mathbf{R}^n)$.
Convoluzione della δ con una funzione $\psi \in C^\infty_c(\mathbf{R}^n)$ $(\delta * \psi = \psi)$.

6.3.2026 L'equazione di Laplace: alcuni esempi dalla fisica.
Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (caso u continua).
Natura variazionale dell'equazione di Poisson (principio di Dirichlet).
Commenti e cenno all'esempio di Hadamard.

Metodo dell'energia per l'unicità delle soluzioni: problemi di Dirichlet, Neumann, Robin.
Una condizione di compatibilità tra i dati f e g nel caso del problema di Neumann.

12.3.2026 Due esercizi: minimizzazione del funzionale di Dirichlet in dimensione 1 e in dimensione 2 (calcolo del gradiente in coordiante polari).
Definizione di soluzione debole e soluzione distribuzionale per il laplaciano.
Funzioni olomorfe e funzioni armoniche.
Il laplaciano è invariante per rotazioni. Verso il calcolo della soluzione fondamentale: definizione e ricerca tra le funzioni radiali.

13.3.2026 Definizione di soluzione fondamentale per un generico operatore differenziale lineare. La soluzione fondamentale E per il laplaciano in dimensione $n \geqslant 2$. Verifica del fatto che $E \in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^n)$. Verifica del fatto che $-\Delta E = \delta$ in dimensione 2, sfruttando il fatto che $E \in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^n)$.
Legame tra $|B_r|$ e $|\partial B_r|$.

Alcune proprietà delle funzioni armoniche - definizione di funzione subarmonica e superarmonica. Proprietà del valor medio per funzioni C^2 che soddisfano $-\Delta u \leqslant 0$ o $-\Delta u \geqslant 0$.

19.3.2026 Le funzioni convesse sono subarmoniche. Esempio di una funzione subarmonica non convessa.
Enunciati dei Principi del massimo debole e forte. Dimostrazione del principio del massimo debole per funzioni C^2 con $-\Delta u \leqslant 0$.
Principio del massimo per funzioni subarmoniche e superarmoniche. Conseguenze. Applicazioni del principio del massimo all problema di Poisson con condizioni di Dirichlet: unicità della soluzione, confronto tra soluzioni e dipendenza continua dai dati al contorno.
Identità di Green. Una formula di rappresentazione per funzioni C^2: identità di Stokes.

20.3.2026 Commenti sull'identità di Stokes: non ci sono funzioni armoniche non nulle a supporto compatto; u armonica è C^∞.
(Senza dimostrazione: se u armonica in Ω è anche localmente analitica in Ω.)
Un'altra formula di rappresentazione per funzioni C^2 conseguente dall'identità di Stokes. Conseguenza: una funzione $u \in C^2$ è subarmonica

(superarmonica) se e solo se $-\Delta u \leqslant 0$ ($-\Delta u \geqslant 0$).

Verso la soluzione del problema di Dirichlet: la funzione di Green, il nucleo di Poisson e una possibile rappresentazione per la soluzione dell'equazione di Poisson con dato di Dirichlet.
Esistono funzioni $f \in C^0(\Omega)$ per le quali la soluzione u di $-\Delta u = f$ in Ω non è di classe C^2 (cenno ad un esempio in $\mathbf{R}^2$).
Simmetria della funzione di Green (senza dimostrazione): $G(x,y) = G(y,x)$. Il nucleo di Poisson è armonico.
Commento: chiamata G^x la funzione $\Omega \ni y \mapsto G(x,y)$ one has that $-\Delta G^x = \delta_x$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ and $G^x = 0$ in $\partial\Omega$.
Problema di Dirichlet in una palla: la funzione di Green per una palla.

26.3.2026 Problema di Dirichlet in una palla: nucleo di Poisson per una palla, il nucleo di Poisson ha integrale 1, risoluzione del problema di Dirichlet in una palla.
Alcune conseguenze della formula di Poisson: una funzione u continua che soddisfa la proprietà del valor medio è C^2 e armonica. La disuguaglianza di Harnack e un suo corollario (versioni 1 and 1-bis).

27.3.2026 Teorema di Liouville. Commenti.
La disuguaglianza di Harnack (versione 2). Commenti.
Resultati riguardo successioni di funzioni armoniche (principio di Harnack).

Il problema di Dirichlet in un dominio limitato (il metodo di Perron): definizione di alcune of classi di funzioni subarmoniche e superarmoniche: le classi $\sigma(\Omega;\varphi)$ and $\Sigma(\Omega;\varphi)$ con Ω limitato e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Definizione di sollevamento armonico: il sollevamento armonico $h_{v;x_o,\rho}$ di una funzione subarmonica v in una palla $B_\rho(x_o)$. La funzione $v_{x_o,\rho} \geqslant v$, dove $v_{x_o,\rho} = v$ in $\Omega \setminus B_\rho(x_o)$ e $v_{x_o,\rho} = h_{v;x_o,\rho}$ in $\Omega \setminus B_\rho(x_o)$.
La funzione $v_{x_o,\rho}$ è subarmonica se v è subarmonica.
La condizione di palla esterna. Commenti ed esempi. In $n = 2$: un insieme Ω di classe C^2 soddisfa la condizione di palla esterna.
Un insieme Ω di classe C^1, ma non C^2, può non soddisfare la condizione di palla esterna (EX).

1°.4.2026 The function u_φ, $u_\varphi(x) = \sup\{v(x) \,|\, v \in \sigma(\Omega;\varphi)\}$, è armonica in Ω.
Lo stesso vale per U_φ, $U_\varphi(x) = \inf\{w(x) \,|\, w \in \Sigma(\Omega;\varphi)\}$.
Date $v \in \sigma(\Omega;\varphi)$ e $w \in \Sigma(\Omega;\varphi)$ si ha che $w - v \geqslant 0$ e, in particolare, $u_\varphi \leqslant U_\varphi$.
La funzione $u_\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$, $u_\varphi = \varphi$ in $\partial\Omega$ e $u_\varphi = U_\varphi$.
Teorema (Perron): se Ω, aperto e limitato, soddisfa la condizione di palla esterna allora il problema di Dirichlet ammette un'unica soluzione.

Barriere e punti regolari. Teorema: il problema di Dirichlet ammette un'unica soluzione se e solo se tutti i punti del bordo sono regolari. La condizione di cono esterno. Esempi di insiemi regolari: insiemi convessi, insiemi C^2 e insiemi soddisfacenti la considizione di palla esterna.

2.4.2026 La condizione di cono esterno. Altri esempi di insiemi regolari.
Una funzione armonica limitata e definita in $\Omega \setminus \{x_o\}$ ammette un'unica estensione armonica to $\{x_o\}$. Implicazione: non esiste una funzione armonica in $B_1(0) \setminus \{0\}$ che valga 0 in $\partial B_1(0)$ e che valga 1 in 0.
Funzioni armoniche e principio del massimo su domini esterni.
Cenno a equazioni del secondo ordine lineari che siano equazioni di Eulero-Lagrange di un qualche funzionale.