Eserciziario del corso di Matematica Applicata

dott. Michele Miranda

22 maggio 2004

Indice

Capitolo 1

Serie di Fourier

Esercizio 1.1 Dimostrare che le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(nx), \quad n \geq 0,$$

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(nx), \quad n \geq 1,$$

sono ortonormali nello spazio delle funzioni continue 2π–periodiche, rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}\, x.$$

Esercizio 1.2 Dimostrare che le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

sono ortonormali rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\, x.$$

In che senso il presente esercizio è equivalente al precedente?

Esercizio 1.3 Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione 1–periodica definita da

$$f(x) = (x) = x - [x].$$

Dimostrare inoltre, usando la disuguaglianza di Parseval, che vale la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 1.4 Calcolare la serie di Fourier della funzione 2π–periodica pari definita da
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi/2) \\ -1 & x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Esercizio 1.5 Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π-periodica definita in $[0, 2\pi]$ da
$$f(x) = x^2.$$

Esercizio 1.6 Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni della funzione 2π–periodica definita in $[0, \pi]$ da
$$f(x) = x^2 - \pi x.$$

Esercizio 1.7 Dimostrare che la serie di Fourier della funzione 2π–periodica $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ è data da
$$\frac{Sh(\pi)}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{ikx}}{1 - ik}.$$

Esercizio 1.8 Dimostrare che la serie di Fourier della funzione 2π–periodica $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è data da
$$2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Esercizio 1.9 Dimostrare che la serie di Fourier della funzione 2π–periodica $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è data da
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Valutando $f(0)$, dimostrare che
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
e dedurne da questo che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 1.10 Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π–periodica definita da $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ e dedurne che
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Esercizio 1.11 Dimostrare che se g e f sono due funzioni T periodiche con g continua su tutto $\mathbb{R}$ e derivabile con $g' = f$, detti a_n e b_n i coefficienti di Fourier di g e a'_n e b'_n quelli di f, sussiste la seguente relazione

$$a'_n = nb_n \frac{2\pi}{T}, \quad b'_n = -na_n \frac{2\pi}{T}.$$

Esercizio 1.12 Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π–periodica definita da $f(x) = |\cos x|$ e studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale.

Esercizio 1.13 Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π–periodica definita da $f(x) = (\cos x)^+ = \max(\cos x, 0)$ e studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale.

Esercizio 1.14 ($\star$) Dimostrare che per ogni $a \notin \mathbb{N}$ valgono le seguenti formule

$$\sin(ax) = \frac{2}{\pi}\sin(a\pi)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k\sin(kx)}{k^2-a^2},$$

$$\cos(ax) = \frac{2}{\pi}a\sin(a\pi)\left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos(kx)}{k^2-a^2},\right).$$

Esercizio 1.15 ($\star$) Dedurre dall'esercizio precedente che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\frac{1}{a\pi} - \frac{\cos(a\pi)}{\sin(a\pi)}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2-a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(-\frac{1}{a\pi} + \frac{1}{\sin(a\pi)}\right),$$

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1 Per risolvere il presente esercizio è utile tenere a mente le formule di Werner (o equivalentemente di Prostaferesi);

$$2\sin p \sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q),$$

$$2\sin p \cos q = \sin(p-q) + \sin(p+q),$$

$$2\cos p \cos q = \cos(p-q) + \cos(p+q).$$

Da queste formule se ne deduce subito che

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx = 0, \quad \forall n, m \in N,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Soluzione 1.2 Per risolvere il presente esercizio basta tener presente che

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m \\ \left[\frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\right]_0^{2\pi}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per vedere che questo esercizio è equivalente al precedente basta tener presenti le formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Soluzione 1.3 Per quanto riguarda il primo coefficiente a_0, esso è semplicemente

$$a_0 = \frac{1}{2},$$

mentre si può dedurre immediatamente che $a_k = 0$ per $k > 0$ in quanto la funzione $f(x) - 1/2$ è dispari. Infine si ha che

$$\int_0^1 x \sin(2\pi kx)dx = \frac{(-1)^k}{2\pi k}.$$

Quindi la serie di Fourier per f è data da

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin(2\pi kx).$$

A questo punto, se si utilizza la formula di Parseval

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)^2 dx = T\left(a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right)$$

otteniamo che

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluzione 1.4 Siccome la funzione è pari, senza bisogno di calcolarli, si sa già che $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Inoltre, $a_0 = 1$ mentre

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(kx)dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(kx)dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ \frac{4}{k\pi}(-1)^{(k-1)/2} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier diventa

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Notare che siccome $f(0) = 1$ e in 0 f è continua, si ha che

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Inoltre, dall'uguaglianza di Parseval si deduce che

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Soluzione 1.5 Con un calcolo diretto si ottiene che

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{8\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{4}{n^2} \\ b_n &= -\frac{4\pi}{n}. \end{aligned}$$

La serie di Fourier

$$F(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right);$$

converge puntualmente su tutto $[0, 2\pi)$, uniformemente e sui compatti $[a, b]$ con $0 < a \leq b < 2\pi$ (ancora la funzione è discontinua in 0) mentre non converge totalmente in quanto i b_n sono i termini di una serie divergente. Notando che

$$2\pi^2 = \frac{f(0+) + f(0-)}{2},$$

dal Teorema 1.33 delle dispense ricaviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soluzione 1.6 Richiedere lo sviluppo in serie di soli coseni significa voler scrivere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

e quindi significa richiedere che la funzione assegnata deve essere pari. Nel testo la funzione viene assegnata su di un intervallo di ampiezza π e si richiede che deve essere 2π, quindi bisogna estendere tale funzione, e l'estensione che quindi si farà sarà l'estensione pari. Sfruttando la parità della funzione, abbiamo che

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = -\frac{\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{n^2}((-1)^n+1) \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier sarà totalmente convergente in quanto gli a_n sono i termini di una serie convergente, e quindi converge uniformemente su tutto $[-\pi, \pi]$.

Soluzione 1.7 Calcoliamo i coefficienti di Fourier pensando di voler sviluppare in serie di Fourier tramite le armoniche fondamentali date dagli esponenziali complessi; in questo modo si ottiene che

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{0ik\pi}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-i\pi}\left(e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}\right) \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{1}{1-ik}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2} \end{aligned}$$

da cui lo sviluppo desiderato.

Soluzione 1.8 La funzione data è dispari e a media nulla, quindi $a_k = 0$ per ogni $k \geq 0$. Per quanto riguarda i coefficienti b_k, integrando per parti si ottiene che

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx = -(-1)^k\frac{2}{k}$$

e quindi la serie di Fourier ha la forma richiesta

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}.$$

Soluzione 1.9 Si nota facilmente che

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{\pi}{2};$$

inoltre f è pari, quindi $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$ e

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier diventa

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Notare che $f(0) = 0$ e in 0 la f è continua, quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Soluzione 1.10 La funzione è pari, da cui $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$; inoltre

$$a_0 = \frac{\pi^4}{5},$$

mentre, integrando per parti, si ricava che per $k \geq 1$

$$a_k = (-1)^k \frac{8}{k^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{k^2} \right).$$

La serie di Fourier di x^4 diventa quindi

$$\frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(kx)}{k^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{k^2} \right).$$

La funzione f è continua in π e vale π^4, e quindi se ne deduce che

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(-1)^k}{k^2} \left(\pi^2 - \frac{6}{k^2} \right),$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Soluzione 1.11 Dalla definizione, integrando per parti, si ottiene che

$$\begin{aligned}
a'_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n(2\pi/T)x) dx = \frac{2}{T} \int_0^T g'(x) \cos(n(2\pi/T)x) dx \\
&= \frac{2}{T} \left([g(x) \cos(n(2\pi/T)x)]_0^T + n \frac{2\pi}{T} \int_0^T g(x) \sin(n(2\pi/T)x) dx \right) \\
&= n \frac{2\pi}{T} b_n.
\end{aligned}$$

L'altra formula si calcola in modo analogo.

Soluzione 1.12 La funzione data è pari, quindi $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$; inoltre

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = 0,$$

mentre per $k \geq 2$, usando le formule di Werner,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin((k-1)\pi)}{k-1} + \frac{\sin((k+1)\pi)}{k+1}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \frac{8}{\pi}(-1)^{k/2-1}\frac{1}{k^2-1} & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

La convergenza sarà totale in quanto i coefficienti formano una serie convergente, quindi si avrà convergenza uniforme e puntuale su tutto $[0,\pi]$.

Soluzione 1.13 Lo sviluppo in serie di Fourier si può calcolare tenendo presente che

$$(\cos x)^+ = \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|).$$

Soluzione 1.14 Trattiamo solo il caso di $\sin(ax)$, essendo l'altro caso analogo. Tale funzione è dispari e a media nulla, quindi $a_k = 0$ per ogni $k \geq 0$. Inoltre, dalle formule di Werner, si ricava che

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(ax)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos((a-k)x) - \cos((a+k)x))\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((a-k)\pi}{a-k} - \frac{\sin((a+k)\pi)}{a+k}\right) = (-1)^k\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{a-k} - \frac{1}{a+k}\right) \\ &= (-1)^k\frac{\sin(a\pi)}{\pi}\frac{2k}{a^2-k^2}. \end{aligned}$$

Soluzione 1.15 Tenendo presente il secondo sviluppo dell'esercizio precedente e valutando la funzione in $x = \pi$, si ottiene che

$$\cos(a\pi) = \frac{2}{\pi}a\sin(a\pi)\left(\frac{1}{2a^2} - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2-a^2}\right),$$

da cui l'uguaglianza desiderate. Analogamente si procede, sempre partendo dalla seconda serie di Fourier dell'esercizio precedente, valutando la funzione in $x = 0$.

Capitolo 2

Funzioni olomorfe

2.1 Numeri complessi, funzioni olomorfe, zeri e singolarità

Esercizio 2.1 Dato un numero complesso $u \in \mathbb{C}$ con $u \neq 1$ e $|u| = 1$, dimostrare che la successione $a_n = u^n$ non è convergente.

Esercizio 2.2 Dato $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, dimostrare che le successioni $a_n = \sin(nt)$ e $b_n = \cos(nt)$ non sono convergenti.

Esercizio 2.3 Verificare che la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ data da

$$f(z) = \ln z$$

è olomorfa.

Esercizio 2.4 Dimostrare il seguente sviluppo in serie

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} z^k, \quad |z| < 1.$$

Esercizio 2.5 $(\star)$ Dedurre dalla serie geometrica il seguente sviluppo in serie

$$\frac{1}{a^2 + z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{a^{2k+2}}.$$

Esercizio 2.6 Scrivere la serie di Taylor centrata in $z_0 = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

e dire per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha convergenza.

Esercizio 2.7 Dimostrare che la funzione complessa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{e^z - 1}$$

ha una singolarità non eliminabile in $z = 0$; stabilire inoltre se si tratta di un polo (nel qual caso determinarne l'ordine).

Esercizio 2.8 Determinare e classificare le singolarità delle funzioni

$$\frac{z}{\sin z}, \quad \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2}.$$

Esercizio 2.9 Trovare i poli della funzione complessa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da

$$f(z) = \frac{1}{z^m(1 - z^2)}$$

e scrivere lo sviluppo in serie di Laurent intorno al punto $z_0 = 0$.

Esercizio 2.10 Data la curva $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2k\pi]$ $(k \geq 1)$, dimostrare che

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} = 2k\pi i.$$

2.2 Soluzioni

Soluzione 2.1 Per dimostrare che la successione data non è convergente basta dimostrare che essa non è di Cauchy; notiamo quindi che

$$|u^{n+1} - u^n| = |u^n||u - 1| = |u - 1|.$$

Quindi se $u \neq 1$, abbiamo appunto dimostrato che la successione non può essere di Cauchy.

Soluzione 2.2 Se definiamo il numero complesso

$$u = \cos t + i \sin t,$$

siamo nelle condizioni dell'esercizio precedente, con $u \neq 1$, e quindi la successione u^n non può convergere. Da queste considerazioni, se ne deduce anche che le parti reali e immaginarie di u^n non possono convergere; l'esercizio si completa notando che

$$\sin(nt) = \Re u^n, \quad \cos(nt) = \Im u^n.$$

Soluzione 2.3 Scrivendo la funzione nella forma

$$f(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

e ponendo $z = x + iy$, bisogna verificare che le funzioni

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad v(x, y) = \arctan(y/x)(+\pi)$$

soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann. Ma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2/x^2}(-y/x^2) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2/x^2}(1/x) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

da cui si vede subito che le Cauchy-Riemann sono soddisfatte.

Soluzione 2.4 La soluzione dell'esercizio si ottiene tenendo presente che

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

e che

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{1}{(1-z)^2}, \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}.$$

Soluzione 2.5 Basta tener presente che

$$\frac{1}{a^2+z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1-(-z^2/a^2)} = \frac{1}{a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{a^{2k}}.$$

Soluzione 2.6 Tenendo presente che

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z},$$

si ottiene che, per $|z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k.$$

Soluzione 2.7 Tenendo presente che $|e^z - 1| \to 0$ per $z \to 0$, se ne deduce che

$$\exists \lim_{z\to 0}\frac{1}{|e^z-1|} = +\infty.$$

Quindi $z = 0$ è una singolarità non eliminabile di tipo polo. Resta quindi da determinare l'ordine di tale polo; notando che

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = \frac{1}{\frac{d}{dz}e^z|_{z=0}} = 1,$$

concludiamo che f ha un polo di ordine 1 in $z = 0$.

Soluzione 2.8 La funzione $\sin z$ si annulla per $\Im z = 0$ e $\Re z = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); inoltre il caso $z = 0$ è una singolarità eliminabile (si tenga presente lo sviluppo in serie della funzione $\sin z$), mentre nei punti $\Re z = k\pi$ con $k \neq 0$ avremo poli di ordine 1 in quanto

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{z}{\sin z} = \frac{k\pi}{\cos(k\pi)} = k\pi.$$

Per quanto riguarda la seconda funzione, il denominatore si annulla per $z = \pm\pi$; Notiamo però che ad esempio

$$\lim_{z \to \pi} \frac{\sin z}{(z - \pi)(z + \pi)} = \frac{\cos \pi}{2\pi},$$

e quindi siamo in presenza di singolarità eliminabili. Infine, i punti $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq 1$ saranno zeri di ordine 1 per la funzione data.

Soluzione 2.9 Notiamo che si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{pari}}}^{\infty} z^{k-m} = \sum_{\substack{k=-m \\ (k-m)\text{pari}}}^{\infty} z^k.$$

Quindi f avrà un polo di ordine m in $z = 0$ se $m > 0$, mentre avrà uno zero di ordine m se $m \geq 0$.

Soluzione 2.10 Scrivendo la definizione di integrale curvilineo, si ottiene che

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} = \int_0^{2k\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z_0} dt = \int_0^{2k\pi} idt = 2ki\pi.$$

2.3 Residui

Esercizio 2.11 Determinare i residui delle funzioni

$$\frac{1}{z^2 - 1}, \quad \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \frac{z \cos z}{\sin z}, \quad e^{2/z}, \quad z \sin(1/z)$$

nelle loro singolarità.

Esercizio 2.12 Calcolare, con l'aiuto del Teorema dei Residui, i seguenti integrali;

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 1}{(x - 2)(2x^2 - 4x + 4)} dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^3} dx.$$

Esercizio 2.13 Calcolare, usando il teorema dei residui, i seguenti integrali

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

Esercizio 2.14 Calcolare, usando il teorema dei residui, i seguenti integrali

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2+a^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{Shx}dx.$$

con $\alpha, a \in \mathbb{R}$.

2.4 Soluzioni

Soluzione 2.11 La prima funzione data presenta due poli di ordine uno in 1 e -1, quindi per il calcolo dei residui possiamo usare la formula

$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}.$$

Analogamente si ricava che

$$Res(f,-1) = -\frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda la seconda funzione, si ha che $\cos z = 0$ se e solo se $\Im z = 0$ e $\Re z = \pi/2 + k\pi$; ognuno di questi zeri è semplice, cioè di ordine uno, quindi la funzione data ha al massimo poli di ordine uno (è così esattamente nel caso in cui il numeratore non si annulli). Ma siccome in corrispondenza dei poli si ha $\sin z \neq 0$, siamo in presenza di poli semplici. Per il calcolo dei residui si avrà quindi che

$$Res(f,\pi/2+k\pi) = \lim_{z\to\pi/2+k\pi}(z-\pi/2-k\pi)\frac{\sin z}{\cos z} = \left.\frac{\sin z}{\frac{d}{dz}\cos z}\right|_{z=\pi/2+k\pi} = -1.$$

Per la terza funzione, come nel punto precedente, si ha che $\sin z = 0$ per $\Re z = k\pi$ e $\Im z = 0$; quindi siamo in presenza al più di poli di ordine uno nei punti $k\pi$. Siccome però il numeratore si annulla in $z = 0$, si ottiene che $z = 0$ è una singolarità eliminabile, mentre per gli altri punti si ha

$$Res(f,k\pi) = k\pi, \quad k \neq 0.$$

Per quanto riguarda la quarta funzione, si ha che

$$e^{2/z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^{0}(-1)^k\frac{z^k}{2^k}$$

e quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale e il residuo è dato da

$$c_{-1} = (-1)^1 \frac{1}{2^{-1}} = -2.$$

Per quanto riguarda l'ultima funzione, sviluppando in serie la funzione seno, si ottiene che

$$z \sin z = z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{5!z^4} + \dots$$

e quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale e il residuo è dato da

$$c_{-1} = 0.$$

Soluzione 2.12

1. Per quanto riguarda il primo integrale, sfruttando la parità della funzione integranda si ottiene che

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx.$$

Se si introduce la funzione complessa di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 5z^2 + 6} = \frac{z^2}{(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2})},$$

tale funzione ha quattro poli di ordine uno; prendendo un cammino γ_R composto dal segmento $[-R, R] \times \{0\}$ unito alla semicirconferenza centrata nell'origine e di raggio R, $Re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, \pi]$, si ottiene che per $R > \sqrt{3}$,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(Res(f, i\sqrt{3}) + Res(f, i\sqrt{2})) = \pi(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Da questo si ricava che

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{2} \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)z = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

2. Se consideriamo la funzione complessa

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} = \frac{z^2 - z + 2}{(z - 3i)(z + 3i)(z - i)(z + i)},$$

essa ha quattro poli del primo ordine. Utilizzando quindi la formula

$$Res(f, z_i) = \left. \frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z} \right|_{z = z_i},$$

troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 2\pi i \left(Res(f, 3i) + Res(f, i) \right) = \frac{5}{12}\pi.$$

3. Se prendiamo la funzione complessa
$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)(2z^2-4z+4)} = \frac{z+1}{2(z-2)(z-1-i)(z-1+i)},$$
essa ha tre poli di ordine 1, uno sull'asse reale e due complessi non reali. Quindi avremo che
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 2\pi i Res(f, 1+i) - \pi i Res(f, 2) = \frac{\pi}{4}.$$

4. Consideriamo la funzione
$$f(z) = \frac{\ln z}{1+z^3}$$
e il cammino γ_R dato dal segmento $s_R = [0, R] \times \{0\}$, circonferenza $c_R = Re^{i\vartheta}$ ($\vartheta \in [0.2\pi]$), ancora il segmento $s_R = [0, R] \times \{0\}$ percorso questa volta in senso inverso, e la circonferenza $c_\varepsilon = \varepsilon e^{-i\vartheta}$ ($\vartheta \in [0, \pi]$). Quello che succede è che f ha tre poli di ordine 1 nelle tre radici cubiche di -1, e una singolarità essenziale in 0. Inoltre, quando si fa un giro intorno alla circonferenza di raggio R, la funzione f passa dal valore $f(x)$ al valore $f(x)+2\pi i/(1+x^3)$ (in quanto è presente il logaritmo). Per quanto riguarda la singolarità essenziale e il cammino sulla circonferenza di raggio ε, si ha che, se $\varepsilon > 0$ è scelto piccolo in modo che $|1+z^3| \geq 1/2$ su tale circonferenza,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} \frac{\ln z}{1+z^3} dz\right| &= \left|-i\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\ln\varepsilon - i\vartheta}{1+\varepsilon^3 e^{-3i\vartheta}} e^{-i\vartheta} d\vartheta\right| \\ &\leq \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\ln\varepsilon + \vartheta}{1/2} d\vartheta \\ &= 4\pi\varepsilon \ln\varepsilon + 4\pi^2\varepsilon.\end{aligned}$$
Quindi
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_\varepsilon} f(z)dz = 0.$$
Tenuto presente che il segmento s_R viene percorso una volta in un senso e una volta nel senso inverso e che la funzione f, dopo un giro, si è modificata, si ottiene che
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = -2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx.$$
Se ne conclude che
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx &= -(Res(f, -1) + Res(f, e^{i\pi/3}) + Res(f, e^{i5\pi/3})) \\ &= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

Soluzione 2.13 Posto

$$f(z) = \frac{\ln z}{z^2 - 1},$$

definiamo

$$I = \int_0^\infty f(x)dx.$$

Notiamo quindi che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + I.$$

Nel primo integrale del secondo membro, il logaritmo va inteso come logaritmo complesso (compare con argomenti negativi), e quindi, tenuto presente la sostituzione $x = -y$, si ottiene che, siccome $\ln(-y) = \ln y + i\pi$,

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_0^\infty f(-y)dy = \int_0^\infty f(y)dy + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{y^2 - 1}dy.$$

Quindi in definitiva troviamo che

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx - i\frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{1}{y^2 - 1}dy.$$

Siccome I è un numero reale (è l'integrale di una funzione reale), si dovrà avere che

$$I = \frac{1}{2}\Re \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

A questo punto ci concentriamo sulla funzione $f(z)$; essa ha due poli di ordine 1 nei punti ± 1 e una singolarità essenziale in 0. Trattando tale singolarità essenziale come nell'esercizio precedente, concludiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = i\pi(Res(f, 1) + Res(f, -1)) = \frac{\pi^2}{2},$$

da cui

$$I = \frac{\pi^2}{4}.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, si noti che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\Im \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x}dx.$$

La funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

soddisfa la condizione $|f(z)| \leq 1$ se $\Im z \geq 0$. Inoltre f ha un polo di ordine 1 in 0; quindi, dal teorema dei residui si ottiene che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \pi i Res(f, 0) = \pi i.$$

In conclusione, abbiamo trovato che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 2.14 Notiamo preliminarmente che

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2} dx.$$

Presa quindi la funzione

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2},$$

abbiamo che $|e^{i\alpha z}| \leq 1$ se $\Im z > 0$ nel caso in cui $\alpha > 0$, altrimenti per $\Im z < 0$ se $\alpha < 0$. Vediamo prima il caso $\alpha > 0$; la funzione ha poli di ordine 1 in $\pm ia$ se $a \neq 0$, altrimenti ha un polo di ordine 2 in 0. Se $a \neq 0$, dal teorema dei residui troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2\pi i Res(f, ia) = \frac{\pi e^{-\alpha a}}{a}.$$

Se invece $a = 0$, troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \pi i Res(f, 0) = -\pi \alpha.$$

Conti analoghi portano allo studio del caso $\alpha < 0$. Per quanto riguarda il secondo integrale, la funzione

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{Sh(z)}$$

ha poli di ordine 1 nei punto $z = ki\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Possiamo quindi considerare il cammino γ_R dato dal segmento $s_R = [-R, R] \times \{0\}$, unito al segmento verticale $v_1 = \{R\} \times [0, 2\pi]$, unito al segmento $S_R = [-R, R] \times \{2\pi\}$ e dal segmento $v_2 = \{-R\} \times [0, 2\pi]$. È facile rendersi conto che su v_1 e su v_2 la funzione è infinitesima e che l'integrale tende a zero. Per quanto gli altri due integrali, notiamo che se poniamo

$$I_R = \int_{s_R} f(z) dz,$$

si ha che

$$\int_{S_R} f(z) dz = e^{-2\pi\alpha} I_R.$$

Quindi, dato che γ_R contiene al suo interno il polo $i\pi$ e sul suo bordo i poli 0 e $2i\pi$, il teorema dei residui ci dice che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \lim_{R \to \infty} (1 - e^{-2\pi\alpha}) I_R \\
&= 2i\pi Res(f, i\pi) + i\pi(Res(f, 0) + Res(f, i\pi)) \\
&= i\pi(e^{-\alpha\pi} + 1)^2.
\end{aligned}$$

2.5 Esercizi non risolti

Esercizio 2.15 Verificare, usando il Teorema dei Residui, le seguenti identità;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}dx = \frac{\pi}{200},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx = \frac{\pi(e-1)}{e},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/3}}{1+e^x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 2.16 Verificare, usando il Teorema dei Residui, le seguenti identità;

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \pi\sqrt{2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x\cos x}dx = \frac{4\pi}{\sqrt{15}}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx = \pi\sqrt{2}.$$

Esercizio 2.17 Verificare, con l'aiuto del Teorema dei Residui, le seguenti identità:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a+\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}, \quad |a|>1,$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a+\cos x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \quad a>1,$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a\sin x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \quad 0<a<1,$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a+b\cos x}dx = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}, \quad a>b>0.$$

Capitolo 3

Distribuzioni

Esercizio 3.1 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dimostrare che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.2 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dimostrare che $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si verifichi inoltre che la funzione

$$v(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

con $c = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt$, è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nulla per $x \leq -1$ ed uguale ad 1 per $x \geq 1$. Si studi infine il comportamento delle funzioni $v_\varepsilon(x) = v(x/\varepsilon)$.

Esercizio 3.3 Data la funzione v dell'esercizio precedente, si dimostri che le funzioni

$$g_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x-a)v_\varepsilon(b-x)$$

hanno supporto in $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ e che valgono 1 su $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ (se $2\varepsilon < b-a$). Calcolare inoltre il limite, nel senso delle distribuzioni, per $\varepsilon \to 0$.

Esercizio 3.4 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si dimostri che la successione $f_k(x) = kf(kx)$ tende alla delta di Dirac $\delta(x)$ nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 3.5 Si dimostri che la distribuzione

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x-k)$$

appartiene a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e che è periodica di periodo 1.

Esercizio 3.6 Dimostrare che se f è una distribuzione pari, allora

$$\langle f, v\rangle = 0$$

per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dispari e viceversa. Dimostrare inoltre che se f è pari, allora f' è dispari.

Esercizio 3.7 Data la funzione

$$f_\varepsilon(x) = \frac{x}{\varepsilon^2 + x^2}, \quad \varepsilon \neq 0,$$

dimostrare che

$$f_\varepsilon(x) \to v.p.\frac{1}{x}$$

per $\varepsilon \to 0$ nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 3.8 Dimostrare che le funzioni $\sin(\lambda x)$ e $\cos(\lambda x)$ tendono per $\lambda \to \infty$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alla distribuzione nulla.

Esercizio 3.9 Dimostrare che

$$\frac{e^{int}}{\pi t} \to \delta_0(t),$$

nel senso delle distribuzioni.

3.1 Soluzioni

Soluzione 3.1 Bisogna dimostrare che esistono e sono continue le derivate di ogni ordine per la funzione data. Chiaramente per $x < 0$ si avrà che $f^{(k)}(x) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0,$$

quindi la funzione è continua. Per quanto riguarda la derivata prima, si ha che

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2},$$

mentre, si può dimostrare per induzione, che per $k > 1$ la derivata sarà data da

$$f^{(k)}(x) = e^{-1/x} p_k(1/x), \quad x > 0$$

con p_k polinomio di grado $2k$. Si avrà sempre comunque che

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0,$$

da cui la continuità delle derivate di ogni ordine.

Soluzione 3.2 È chiaro anzitutto che f ha supporto compatto in $\mathbb{R}$; resta da verificare la derivabilità. Anzitutto si ha che

$$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = 0$$

e quindi f è continua. Inoltre, notando che

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{1/(x^2-1)},$$

si avrà in generale che

$$f^{(k)}(x) = \frac{p_k(x)}{(x^2-1)^{2k}} e^{1/(x^2-1)}$$

con p_k polinomio di grado dipendente da k. Quindi si avrà sempre che

$$\lim_{x \to \pm 1} f^{(k)}(x) = 0,$$

da cui il fatto che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Per quato riguarda la funzione v, siccome f è nulla per $x \leq -1$, si avrà che anche v è nulla per $x \leq -1$. inoltre, siccome f è nulla anche per $x \geq 1$, si avrà che per $x \geq 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = c.$$

Quindi $v(x) = 1$ per $x \geq 1$. Per quanto riguarda v_ε, avremo che tali funzioni sono nulle per $x \leq -\varepsilon$ ed uguali ad uno per $x \geq \varepsilon$. Quindi $v_\varepsilon \to u$ nel senso delle distribuzioni, con u funzione a gradino (o funzione di Heaviside) definita da

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Per verificare quest'ultima osservazione, dobbiamo verificare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si abbia

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} v_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx.$$

Notiamo quindi che

$$\int_{\mathbb{R}} v_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_\varepsilon(x)\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Siccome ora v_ε è monotona crescente ($v'_\varepsilon = f \geq 0$), allora $v_\varepsilon \leq 1$ e quindi

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \right| \leq 2\varepsilon \|\varphi\|_\infty.$$

Quindi in definitiva si trova che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} v_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx.$$

Soluzione 3.3 Per quanto detto nel precedente esercizio, si ha che $v_\varepsilon(x-a) = 0$ per $x-a \leq -\varepsilon$ e $v_\varepsilon(x-a) = 1$ per $x-a \geq \varepsilon$, mentre $v_\varepsilon(b-x) = 0$ per $b-x \leq -\varepsilon$ e $v_\varepsilon(b-x) = 1$ per $b-x \geq \varepsilon$. Quindi si avrà che $g_\varepsilon(x) = 0$ per $x \leq a-\varepsilon$ e per $x \geq b+\varepsilon$, mentre $g_\varepsilon(x) = 1$ per $a+\varepsilon \leq x \leq b-\varepsilon$ (da qui si capisce perchè deve essere $2\varepsilon < b-a$). Dimostriamo ora che $g_\varepsilon \to \mathbf{1}_{[a,b]}$ per $\varepsilon \to 0$ nel senso delle distribuzioni, dove $\mathbf{1}_A$ è la funzione caratteristica dell'insieme A definita da

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dobbiamo quindi verificare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si abbia

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\varphi(x)dx.$$

Scrivendo l'integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx &= \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \varphi(x)dx + \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx + \\ &\quad + \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

A questo punto si nota che

$$\left| \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx + \right|, \left| \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx + \right| \leq \|\varphi\|_\infty 2\varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Soluzione 3.4 Dobbiamo dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vale

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Notiamo che

$$f_k(x) = \begin{cases} k(1-|kx-1|) & 0 < x < 2/k \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e quindi si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)dx &= \int_0^{2/k} k(1-|kx-1|)\varphi(x)dx \\ &= \int_0^{2/k} k(1-|kx-1|)(\varphi(x)-\varphi(0))dx + \\ &\quad +\varphi(0)\int_0^{2/k} k(1-|kx-1|)dx. \end{aligned}$$

A questo punto notiamo che

$$\int_0^{2/k} k(1 - |kx - 1|)dx = 1,$$

e quindi, dato che per $\varepsilon > 0$ fissato e per k sufficientemente grande $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$ se $x \in (0, 2/k)$, si ha che

$$\left| \int_0^{2/k} k(1 - |kx - 1|)(\varphi(x) - \varphi(x))dx \right| \leq \varepsilon \frac{2}{k},$$

otteniamo che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Soluzione 3.5 Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, abbiamo che

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k),$$

e questa è una somma finita in quanto il supporto di φ è compatto. La periodicità è immediata in quanto

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x + 1 - k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - (k-1)) \\ &= \sum_{k-1\in\mathbb{Z}} \delta(x - k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - k) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Soluzione 3.6 Dire che una distribuzione è pari significa che, fissata $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e posto $\hat{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, si deve avere che

$$\langle f, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

A questo punto, se φ è dispari, si ha che $\hat{\varphi} = -\varphi$, e quindi

$$\langle f, \varphi \rangle = -\langle f, \varphi \rangle,$$

da cui $\langle f, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dispari. Viceversa, se fissiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e vogliamo dimostrare che $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$, se definiamo la funzione $v = \varphi - \hat{\varphi}$, notiamo che v è dispari, da cui $\langle f, v \rangle = 0$, e quindi

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

Per verificare che f' è dispari se f è pari, basterà, ragionando analogamente a quanto fatto sopra, dimostrare che $\langle f', \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pari. Ma se φ è pari, allora φ' è dispari, e quindi, siccome f è pari,

$$0 = \langle f, \varphi' \rangle = -\langle f', \varphi \rangle,$$

cioè f' è dispari.

Soluzione 3.7 Notiamo che per $\varepsilon \to 0$, $f_\varepsilon(x) \to 1/x$ se $x \neq 0$, mentre $f_\varepsilon(0) = 0$; inoltre la convergenza è uniforme sugli intervalli che non contengono l'origine. Quindi, se fissiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\eta > 0$, abbiamo che

$$f_\varepsilon \rightrightarrows \frac{1}{x} \quad \text{su } (-\infty, -\eta] \cup [\eta, +\infty),$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\eta,\eta)} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}\setminus(-\eta,\eta)} \frac{1}{x}\varphi(x)dx.$$

Se a questo punto facciamo il limite per $\varepsilon \to 0$ e teniamo presente che

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\eta,\eta)} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx,$$

e

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x)dx = \lim_{\eta \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\eta,\eta)} \frac{1}{x}\varphi(x)dx,$$

otteniamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x)dx.$$

Soluzione 3.8 Consideriamo solo il caso della distribuzione $\sin(\lambda x)$; prendiamo quindi una funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Siccome φ ha supporto compatto in $\mathbb{R}$, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(\lambda x)\varphi(x)dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\sin(\lambda x)dx$$

e quindi

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \sin(\lambda x)\varphi(x)dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|dx.$$

Ancora, siccome φ ha supporto compatto, l'integrale a secondo membro è finito e quindi per $\lambda \to \infty$ si ha che

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \sin(\lambda x)\varphi(x)dx = 0.$$

Soluzione 3.9 Dimostriamo anzitutto che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vale

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\infty \varphi(x+t)\frac{\sin(\lambda t)}{\pi t}dt = \frac{\varphi(x)}{2}.$$

Siccome

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2},$$

si avrà che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $T_\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_{T_\varepsilon}^\infty \frac{\sin t}{t}dt < \varepsilon.$$

Se prendiamo $T_0 > T_\varepsilon/\lambda$ sufficientemente grande in modo che per $t > T_0$ si ha $f(x+t) = 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\pi t}\sin(\lambda t)dt \\
&= \int_0^{T_0} \underbrace{\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{\pi t}}_{=\psi(t)}\sin(\lambda t)dt + \underbrace{\int_{T_0}^\infty \frac{\varphi(x+t)}{\pi t}\sin(\lambda t)dt}_{=0} + \\
&\quad -\varphi(x)\underbrace{\int_{T_0}^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\pi t}dt}_{<\varepsilon} \\
&< \int_0^{T_0} \psi(t)\sin(\lambda t)dt + \varepsilon.
\end{aligned}$$

A questo punto si nota che $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; essa infatti ha eventualmente un solo punto in cui ha dei problemi, che si ha per $t \to 0$; ma si ha che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+t)-\varphi(x)}{t} = \varphi'(x),$$

e quindi ψ può essere estesa in modo regolare anche per $t = 0$. A questo punto, grazie all'esercizio precedente, si ha che

$$\int_0^{T_0} \psi(t)\sin(\lambda t)dt \to 0, \quad \text{per } \lambda \to \infty,$$

e quindi abbiamo concluso la dimostrazione. Con quanto detto sinora, se prendiamo $x = 0$, abbiamo provato che

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\frac{\lambda t}{\pi t} = \varphi(0),$$

e quindi il fatto che

$$\frac{\sin(\lambda t)}{\pi t} \to \delta_0(t)$$

nel senso delle distribuzioni. Analogamente, si può dimostrare che

$$\frac{\cos(\lambda t)}{\pi t} \to 0$$

nel senso delle distribuzioni, e quindi, mettendo queste due insieme,

$$\frac{e^{i\lambda t}}{\pi t} \to \delta_0(t).$$

3.2 Convoluzioni

Esercizio 3.10 Data la funzione

$$p_h(x) = \frac{1}{h}\mathbf{1}_{[-h/2,h/2]}(x),$$

verificare che

$$t_h(x) = p_h * p_h(x) = \frac{1}{h}\left(1 - \frac{|x|}{h}\right)^+$$

dove $(f(x))^+ = \max\{f(x), 0\}$.

Esercizio 3.11 Data la funzione gradino unitario u (o funzione di Heaviside), dimostrare che

$$p_h * u(x) = \begin{cases} 0 & x < -h/2 \\ \dfrac{x}{h} + \dfrac{1}{2} & x \in [-h/2, h/2] \\ 1 & x \geq h/2, \end{cases}$$

$$t_h * u(x) = \begin{cases} 0 & x < -h \\ \dfrac{(x+h)^2}{2h^2} & -h \leq x \leq 0 \\ \dfrac{-x^2 + 2hx + h^2}{2h^2} & 0 \leq x \leq h \\ 1 & x \geq h; \end{cases}$$

$$t_h * p_h(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 3h/2 \\ \dfrac{(3h+2x)^2}{8h^2} & -3h/2 \leq x \leq -h/2 \\ \dfrac{3}{4} - x^2 & -h/2 \leq x \leq h/2 \\ \dfrac{(3h-2x)^2}{8h^2} & h/2 \leq x \leq 3h/2. \end{cases}$$

Si osservi inoltre che $t_h * p_h = t_h * t_h * t_h$ e verificare che $t_* u$, $t_h * p_h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.12 Verificare che dati due impulsi unitari f e g (cioè due funzioni a supporto compatto in $\mathbb{R}$ e con integrale su tutto $\mathbb{R}$ pari a 1), allora anche $f * g$ è un impulso unitario.

Esercizio 3.13 Dimostrare che date due funzioni f e g reali pari, allora anche $f * g$ è reale pari.

Esercizio 3.14 Verificare che, con le notazioni dei precedenti esercizi,

$$t_1 * t_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{2} - x^2 + \dfrac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ -\dfrac{x^3}{6} + x^2 - 2x + \dfrac{4}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ \\ 0 & x \geq 2. \end{cases}$$

Si osservi inoltre che $t_1 * t_1 = p_1 * p_1 * p_1 * p_1$ e che $t_1 * t_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (tali funzioni sono le cosiddette *spline cubiche*).

Esercizio 3.15 Dimostrare che data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

si ha che

$$f * f(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}}.$$

3.3 Soluzioni

Soluzione 3.10 Se utilizziamo la definizione di convoluzione, otteniamo che

$$\begin{aligned} p_h * p_h(x) &= \frac{1}{h^2} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-h/2,h/2]}(t) \mathbf{1}_{[-h/2,h/2]}(x-t)dt \\ &= \frac{1}{h^2} \cdot \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > h \\ t + h & \text{se } -h < t < 0 \\ -t + h & \text{se } 0 < t < h. \end{cases} \end{aligned}$$

Mettendo insieme queste informazioni, si ottiene che

$$p_h * p_h(x) = \frac{1}{h} \left(1 - \frac{|x|}{h} \right)^+.$$

Soluzione 3.11 Con un calcolo esplicito si ottiene che

$$p_h * u(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t) p_h(x-t)dt = \int_0^{\infty} p_h(x-t) = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[-h/2,h/2]}(x-t)dt.$$

A questo punto si noti che

$$\mathbf{1}_{[-h/2,h/2]}(x-t) = \mathbf{1}_{[x-h/2,x+h/2]}(t),$$

e quindi

$$p_h * u(x) = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{[x-h/2,x+h/2]}(t)dt.$$

Quindi, l'integrale è nullo se $x + h/2 < 0$, mentre è pari ad 1 se $x - h/2 > 0$. Infine, se $-h/2 < x < h/2$, si ottiene che

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{[x-h/2,x+h/2]}(t)dt = \int_0^{x+h/2} dt = x + \frac{h}{2},$$

da cui la prima parte dell'esercizio. Notiamo anzitutto che $p_h * u$ è una funzione continua; quindi anche la funzione $t_h * u = p_h * p_h * u$ è continua. Per verificare che sia anche derivabile bisogna determinarla esplicitamente. Con un ragionamento analogo al precedente, si ottiene che

$$t_h * u(x) = \int_0^\infty \frac{1}{h}\left(1 - \frac{|x-t|}{h}\right) \mathbf{1}_{[x-h,x+h]}(t)dt.$$

La funzione sarà quindi nulla per $x + h < 0$, mentre sarà uguale ad 1 per $x - h > 0$; infine, resta da studiare il caso $-h < x < h$. Siccome compare $|x - t|$, tale quantità sarà sempre uguale a $t - x$ se $x < 0$, nel qual caso si avrà che per $-h < x < 0$

$$t_h * u(x) = \frac{(x+h)^2}{2h^2}.$$

Infine, se $0 < x < h$, si ottiene che

$$\begin{aligned} t_h * u(x) &= \frac{1}{h}\int_0^x \left(1 - \frac{x-t}{h}\right) dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(1 - \frac{t-x}{h}\right) dt \\ &= \frac{-x^2 + 2hx + h^2}{2h^2}. \end{aligned}$$

Si noti inoltre che tale funzione è derivabile con derivata continua (si provi a scrivere la derivata in ogni intervallo e fare i limiti agli estremi degli intervalli). In modo del tutto analogo si procederà per l'ultima funzione.

Soluzione 3.12 Verifichiamo anzitutto che $f * g$ ha supporto compatto. Supponiamo quindi che $\operatorname{spt} f \subset [a, b]$ e $\operatorname{spt} g \subset [c, d]$; dimostriamo che $\operatorname{spt} f * g \subset [a + c, b + d]$. Abbiamo infatti che

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt = \int_a^b f(t)g(x-t)dt.$$

Notiamo quindi che se $x - t > d$, allora $g(x - t) = 0$; quindi, se prendiamo $x > b + d$, abbiamo che, per $t \in [a, b]$ vale sicuramente $x - t > x - b > d$, e quindi $f * g(x) = 0$ se $x > b + d$. Analogamente si ragiona se $x < a + c$, da cui $\operatorname{spt} f * g \subset [a + c, b + d]$. A questo punto resta solo da dimostrare che l'integrale di $f * g$ su $\mathbb{R}$ è uguale ad 1. Ma

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f * g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}}\int f(t)g(x-t)dtdx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\int_{\mathbb{R}} g(x-t)dxdt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\int_{\mathbb{R}} g(y)dydt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1, \end{aligned}$$

in quanto, con la sostituzione $y = x - t$, si è tenuto conto del fatto che

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-t)dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)dy = 1.$$

Soluzione 3.13 Il fatto che f e g reali implichi che $f * g$ sono reali è immediato. Supponiamo ora che f e g siano pari e valutiamo

$$f * g(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(-x-t)dt.$$

Se effettuiamo la sostituzione $\tau = t$, si ottiene che

$$f * g(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(-\tau)g(-x+\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = f * g(x),$$

da cui la parità della convoluta.

Soluzione 3.14 Siccome $t_1 * t_1 = t_1 * p_1 * p_1$, possiamo usare la terza funzione dell'esercizio 3.11 per effettuare il calcolo, ed esplicitando i conti si ottiene il risultato desiderato.

Soluzione 3.15 Da un calcolo diretto si ottiene che

$$f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)f(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}e^{-(x-t)^2/2}.$$

Tenendo presente che

$$-\frac{t^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2} = -\frac{(\sqrt{2}t - x/\sqrt{2})^2}{2} - \frac{x^2}{4},$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{2}t-x/\sqrt{2})^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2/2}d\tau \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}. \end{aligned}$$

Capitolo 4

Trasformata di Fourier

Esercizio 4.1 Calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni

$$f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x), \quad f(x) = e^{-|x|}.$$

Confrontare inoltre, in questi casi, $\|f\|_1$ con $\|\mathcal{F}[f]\|_\infty$.

Esercizio 4.2 Data la funzione $f(x) = (1 - x^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$, verificare la validità delle formule

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = i\xi\mathcal{F}[f(x)](\xi)$$

$$\mathcal{F}[f(x)]'(\xi) = \mathcal{F}[-ixf(x)](\xi).$$

Esercizio 4.3 Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{(\sin 3x)^2}{x^2 + 2x + 2}, \quad f(x) = \frac{1 - \cos(6x)}{x}.$$

$$f(x) = \frac{x}{(4 + x^2)^2}.$$

Esercizio 4.4 Verificare le seguenti identità

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 \pm x + 1}\right](\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pm i\xi/2} e^{-\sqrt{3}|\xi|/2},$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^4 + 1}\right](\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-|\xi|/\sqrt{2}} \left(\cos(\xi/\sqrt{2} + \sin(|\xi|/\sqrt{2}))\right).$$

Dedurne da questo le trasformate delle funzioni

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}.$$

Esercizio 4.5 Data la funzione

$$f(x) = u(x)e^{-a|x|},$$

con u gradino unitario (o funzione di Heaviside), dimostrare che

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \frac{1}{a + i\xi}.$$

Dedurne da questo le trasformate di $g(x) = x^n f(x)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.6 ($\star$) Dimostrare che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale la seguente identità

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\right](\xi) = \frac{\pi}{\beta} e^{-i\alpha\xi} e^{-\beta|\xi|}.$$

Esercizio 4.7 Si ripeta l'esercizio 3.10 usando la trasformata di Fourier.

Esercizio 4.8 Si ripeta l'esercizio 3.12 usando la trasformata di Fourier.

Esercizio 4.9 ($\star$) Dimostrare la continuità della trasformata di Fourier fatta per funzioni sommabili.

Esercizio 4.10 ($\star$) Dimostrare che per ogni $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vale la seguente identità

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle.$$

Capitolo 5

Trasformata di Laplace

Esercizio 5.1 Calcolare le trasformate di Laplace delle seguenti funzioni elementari

$$\mathcal{L}[u(t)](s), \quad \mathcal{L}[u(t-a)](s), \quad \mathcal{L}[e^{-\alpha t}u(t)](s), \quad \mathcal{L}[t^k u(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{\pm i\omega t}](s), \quad \mathcal{L}[\sin \omega t](s), \quad \mathcal{L}[\cos \omega t](s)$$

dove u è la funzione gradino unitario (o funzione di Heaviside), cioè la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, +\infty)$.

Esercizio 5.2 Data una funzione f T–periodica, calcolare la sua trasformata di Laplace.

Esercizio 5.3 Data la funzione T–periodica

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{2ax}{T} & \text{se } 0 \leq x < \frac{T}{2} \\ \dfrac{2a(T-x)}{T} & \text{se } \frac{T}{2} \leq x < T \end{cases},$$

calcolare la sua trasformata di Laplace.

Esercizio 5.4 Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}.\right)$$

Capitolo 6

Applicazioni alle equazioni differenziali

Esercizio 6.1 Servirsi della teoria delle trasformate di Fourier per calcolare la soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$-u'' + u = f.$$

Esercizio 6.2 Servendosi della teoria della trasformata di Laplace, trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0 = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 6.3 Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = u(t-1)e^t \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove la funzione u è la funzione di Heaviside, cioè la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, +\infty)$.