

1. Studiare $f(x) = \log \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^2$

La funzione è definita quando $x \neq 2$ e $x \neq 1$.
Per cui il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\} =$
 $= (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Si osservi anche che

$$f(x) = 2 \log \left| \frac{x-1}{x-2} \right|.$$

Studiamo il comportamento di f agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{perché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x-1}{x-2} \right| = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Studiamo le derivate prime:

$$f'(x) = \dots$$

Se $\frac{x-1}{x-2} > 0$, vale per $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

$$f(x) = 2 \log \frac{x-1}{x-2}$$

Se $\frac{x-1}{x-2} < 0$, vale per $x \in (1, 2)$

$$f(x) = 2 \log \frac{1-x}{x-2}$$

$$f'(x) = 2 \frac{1}{\frac{x-1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right) =$$

$$= -2 \frac{x-2}{x-1} \frac{1}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

Se $\frac{x-1}{x-2} > 0$
(e quindi $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$)

$$f'(x) = 2 \frac{1}{\frac{1-x}{x-2}} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{2}{(1-x)(x-2)} = -\frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

dove $\frac{x-1}{x-2} < 0$ e quindi $f'(x) > 0$
 $\forall x \in (1, 2)$

Vediamo la concavità e convessità di f .

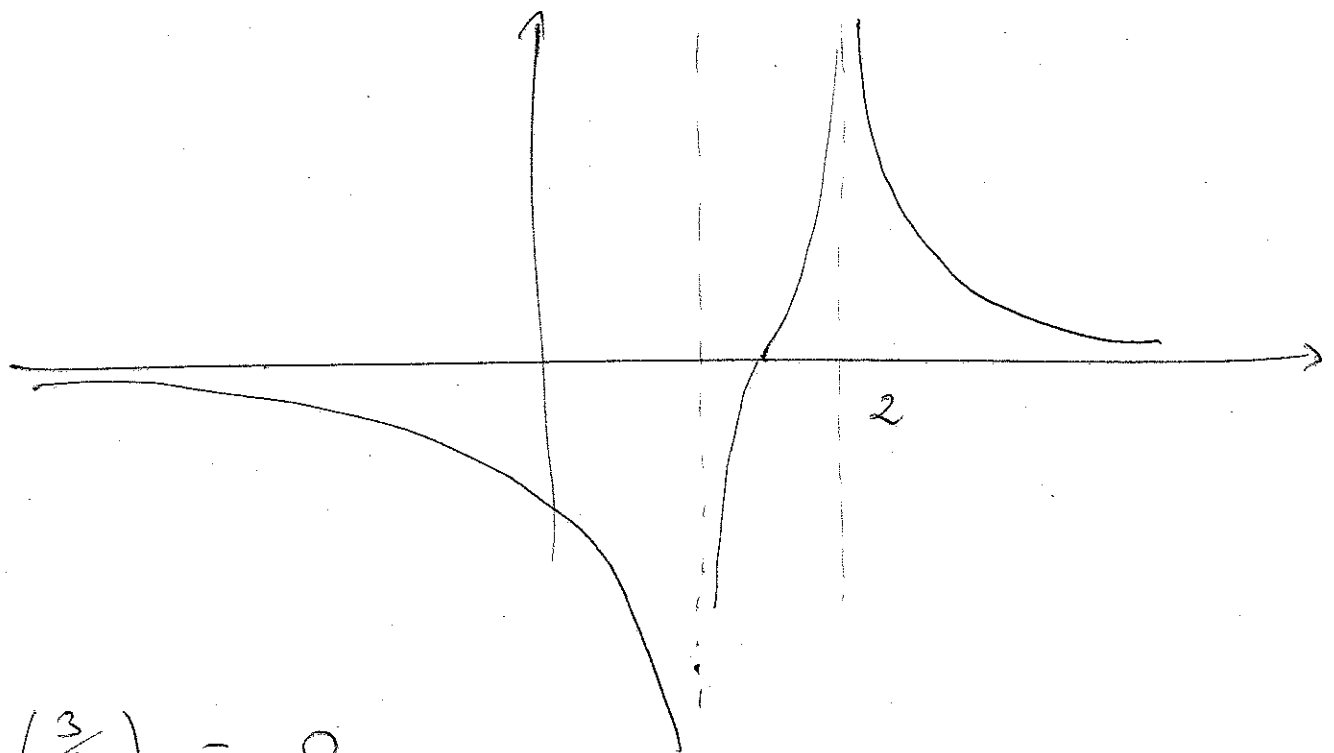
$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)(x-2)} \quad \forall x \neq 1, x \neq 2$$

$$f''(x) = -\frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$2x-3 > 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{3}{2}$$

$$\text{per cui} \quad f'' < 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{3}{2}$$

$$f'' > 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{3}{2}$$



$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$2. \quad \log(1+x+x^2) = x+x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o(x^2)$$

per cui

$$\frac{\log(1+x+x^2) - x}{x^2} =$$

$$= \frac{x+x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x}{x^2}$$

Passando al limite per $x \rightarrow 0$ si ottiene $\frac{1}{2}$

$$3. \quad \log(\sqrt{n+1}) - \log \sqrt{n+1} =$$

$$= \log \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \log \left(1 + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + o \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \text{ è asintotico a } \frac{1}{\sqrt{n}}$$

per cui la serie, per il confronto
asintotico, diverge.

4. ponendo $t := \sqrt{x+1}$ si ottiene

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

$$\int \frac{2t}{2(t^2-1) + 2t + 5} dt =$$

$$= \int \frac{2t}{2t^2 + 2t + 5} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + t + 5/2} dt = \frac{1}{2} \int \left[\frac{2t+1}{t^2+t+5/2} - \frac{1}{t^2+t+5/2} \right] dt$$

$$\int \frac{1}{t^2+t+5/2} dt = \int \frac{dt}{(t+1/2)^2 + 9/4} =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{t+1/2}{3/2}\right)^2 + 1}$$

la primitiva è $\frac{1}{2} \log(t^2+t+5/2) - \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{t+1/2}{3/2}\right) + \text{cost}$

Sostituendo $\sqrt{x+1}$ a t

si ottiene la primitiva cercata.