Soluzione della traccia del compito del 20.9.2012

1. La funzione f è definita per ogni valore di $x \in \mathbf{R}$. Non così per la sua derivata. Infatti

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+2x-3)+2x^{1/3}(2x+2)x^{2/3}}{3\,x^{2/3}(x^2+2x-3)^{1/3}} = \\ &= \frac{5x^2+6x-3}{3\,x^{2/3}(x^2+2x-3)^{1/3}} \end{aligned}$$

e, poiché

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)\,,$$

si ha che, a priori, la derivata prima potrebbe non essere definita per i valori $x=-3$, $x=0$, $x=1$. Il polinomio $5x^2+6x-3$ si annulla per i valori

$$\frac{-3-\sqrt{24}}{5}\,, \qquad \frac{-3+\sqrt{24}}{5}\,.$$

Quindi il dominio di f' è

$$D = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \neq -3 \vee x \neq 0 \vee x \neq 1\}\ .$$

Poiché $\sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{24} > \sqrt{16} = 4$ e si ha quindi

$$-3 < \frac{-3-\sqrt{24}}{5} \qquad \text{e} \qquad 0 < \frac{-3+\sqrt{24}}{5} < 1$$

si conclude che

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -3 < x < \frac{-3-\sqrt{24}}{5} \quad \text{o} \quad \frac{-3+\sqrt{24}}{5} < x < 1\,, \\ = 0 & \text{se } x = \frac{-3-\sqrt{24}}{5} \quad \text{o} \quad x = \frac{-3+\sqrt{24}}{5}\,, \\ > 0 & \text{altrimenti (in } D)\ . \end{cases}$$

Vediamo il comportamento di f' nei punti in cui non è definita:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3^-} f'(x) &= +\infty\,, & \lim_{x\to -3^+} f'(x) &= -\infty\,, \\ \lim_{x\to 1^-} f'(x) &= -\infty\,, & \lim_{x\to 1^+} f'(x) &= +\infty\,, \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= +\infty\,, & \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= +\infty\,, \end{aligned}$$

per cui -3 e 1 sono punti di cuspide, 0 è un punto di flesso a tangente verticale. Il grafico è abbozzato in figura.

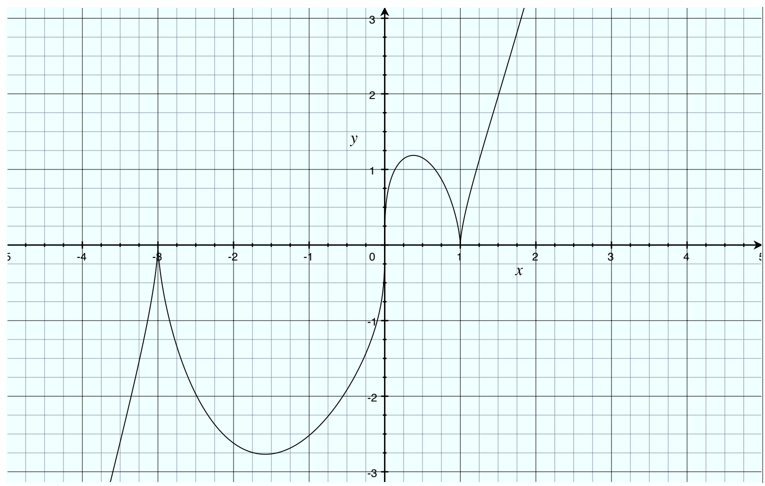

Figure 1:

2. Si ha, usando lo sviluppo di Taylor al prim'ordine per la funzione $x \mapsto (1+x)^\alpha$ in $x=0$:

$$\begin{aligned}
x^{1/3}\big(x^2+2x-3\big)^{2/3} - x^{5/3} = x^{1/3}\,x^{4/3}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^{2/3} - x^{5/3} = \\
= x^{5/3}\left[\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^{2/3} - 1\right] = \\
= x^{5/3}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) + o\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) - 1\right] = \\
= x^{5/3}\left[\frac{2}{3}\,\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] .
\end{aligned}$$

Questo non basta per concludere: non possiamo a priori dire nulla riguardo il termine

$$x^{5/3} o\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Per cui sviluppiamo fino al secondo ordine:

$$\begin{aligned}
x^{5/3}\left[\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^{2/3} - 1\right] = \\
= x^{5/3}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)^2\right) - 1\right] = \\
= x^{5/3}\left[\frac{4}{3x} - \frac{22}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] .
\end{aligned}$$

A questo punto si conclude che $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1/3}\left(x^2+2x-3\right)^{2/3}-x^{5/3}\right)=+\infty$.

3. Usando lo sviluppo di Taylor al prim'ordine per la funzione $x\mapsto\log(1+x)$ in $x=0$ si ottiene

$$\left(\frac{1}{n^2}-\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Poiché
$$0<n^2-\log(1+n^2)<n^2+\log(1+n^2)$$
ed entrambe le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right],\quad\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+n^2)\left[\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

convergono, si ha che anche la serie di partenza è convergente.

Oppure: poiché

$$\begin{aligned}\left(n^2-\log(1+n^2)\right)\left(\frac{1}{n^2}-\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)&=\\ =n^2\left(1-\frac{\log\left(1+n^2\right)}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)&=\\ =\left(1-\frac{\log\left(1+n^2\right)}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)&\end{aligned}$$

e questo termine è asintotico a $1/n^2$ per il criterio del confronto asintotico si conclude.

Ancora usando il criterio del confronto asintotico, confrontando questa volta il termine n-esimo con $1/n$, si conclude che la serie al punto (b) diverge positivamente.

4. Chiamando s la quantità $\sqrt{x-4}$ si ottiene che $x=s^2+4$ e $dx=2s\,ds$. Per cui l'integrale viene trasformato in

$$\int\frac{2s}{s(s^2+4)}\,ds=\int\frac{2}{s^2+4}\,ds=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(s/2)^2+1}\,ds=\operatorname{arctg}\frac{s}{2}+c$$

per cui si ricava che la primitiva cercata è data da $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-4}}{2}+c$.

Per quanto riguarda il secondo ponendo $2^x=t$ si perviene all'integrale precedente. Infatti $x = \log t / \log 2$ e $dx = dt/(t \log 2)$, per cui l'integrale viene trasformato in

$$\frac{1}{\log 2} \int \frac{1}{t\sqrt{t-4}}\, dt\,.$$

A questo punto la primitiva di questa funzione è data dalla primitiva calcolata precedentemente (valutata in t) moltiplicata per $\frac{1}{\log 2}$; quella che cerchiamo ora è semplicemente

$$\frac{1}{\log 2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2^x - 4}}{2} + c$$