

### Corso serale - Primo compito parziale - 7.12.2011

1. Studiare i seguenti limiti e, se esistono, calcolarli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\operatorname{arctg} \frac{1}{n} + \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \left[ (1 - \cos x)^{\frac{1}{\log x}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - x - 6)}{\log(x - 2)}$$

2. Mostrare per induzione che

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dedurre che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  converge.

3. Studiare il carattere delle seguenti serie:

i)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^n}{(\log n)^a}$  al variare del parametro  $a > 0$ .

ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right)}$  al variare del parametro  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

iii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{n} - \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]$ .