Argomenti trattati nel ciclo di lezioni di **Analisi Matematica I**
per il corso serale – a.a. 2011/12
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi sono stati dimostrati.

- 10.10.2011 Qualche elemento di teoria degli insiemi. Insiemi numerici $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Q}^*$. Alcune osservazioni sulla riduzione in fattori primi di un numero naturale (la riduzione è unica; un numero e tutte le sue potenze hanno esattamente gli stessi fattori primi nella loro riduzione). Il numero $\sqrt{2}$ non è razionale (*). Modulo (o valore assoluto) di un numero reale e sue proprietà (in particolare: disuguaglianza triangolare (*)). Sottoinsiemi di $\mathbf{R}$: intervalli, intorno (o palle), definizioni di insieme superiormente limitato, inferiormente limitato, aperto, chiuso. Esempi.
- 12.10.2011 Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo per un insieme. Esempi e commenti. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore per un insieme limitato (e non vuoto). Se il minimo di un insieme A esiste allora è anche l'estremo inferiore di A , se il massimo di un insieme A esiste allora è anche l'estremo superiore di A . Assiomi che caratterizzano l'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$ con particolare attenzione all'assioma di completezza (o assioma di Dedekind). Si è visto con un esempio che l'estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbf{Q}$ (l'insieme dei numeri razionali) può non essere razionale. Caratterizzazione di estremo superiore ed estremo inferiore (*). L'insieme dei numeri razionali $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$.
Estremi superiore ed inferiore degli intervalli (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$.
Estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme $\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n}, x \in \mathbf{N}^*\}$.
- 17.10.2011 Binomio di Newton (*). La media geometrica di n numeri positivi è minore o uguale della loro media aritmetica. Altri esempi di dimostrazione per induzione.

Funzioni: definizione di funzione, immagine, grafico, restrizione di una funzione, funzioni iniettive, suriettive, biiettive, invertibili. Esempi di corrispondenze iniettive, suriettive, biiettive.
- 19.10.2011 Funzione identità di un insieme X . Operazione di composizione tra due funzioni.
Funzioni reali di una variabile reale: funzioni crescenti, strettamente

crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti, monotone, strettamente monotone. Iniettività e invertibilità delle funzioni strettamente monotone.

Funzioni elementari: potenze ad esponente naturale, radici n -esime, potenze ad esponente razionale, funzione esponenziale sui razionali.

24.11.2006 Funzione esponenziale sui reali e sue proprietà, in particolare biiettività della funzione ($a > 0, a \neq 1$)

$$\begin{array}{ll} \mathbf{R} & \longrightarrow (0, +\infty) \\ x & \mapsto a^x. \end{array}$$

Logaritmo $\log_a$ come inversa della funzione precedentemente definita. Proprietà del logaritmo.

Funzioni trigonometriche: definizione di $\sin$, $\cos$, $\tan$, loro grafici e alcune formule che legano tra loro seno e coseno. Funzione $\arcsin$. Grafici della composizione tra $\sin$ e $\arcsin$ e tra $\arcsin$ e $\sin$.

26.10.2011 Funzioni $\arccos$ e $\arctg$. Grafici delle funzioni $x \mapsto \arccos(\cos x)$ e $x \mapsto \arctg(\tan x)$.

Disegni qualitativi di grafici manipolando grafici noti.

Successioni - Definizione di successione, definizione di limite per una successione, successioni convergenti, divergenti, regolari, indeterminate. Esempi.

2.11.2011 Successioni - Definizione di sottosuccessione di una successione data. Data una successione che ammette limite, ogni sua sottosuccessione ammette lo stesso limite. Teorema della permanenza del segno. Ogni successione convergente è limitata. Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Esempi e controesempi. Teorema dei due carabinieri (*). Operazioni con i limiti. Esempi e controesempi. Teorema del confronto. Successioni monotone. Una successione monotona ammette limite. Alcuni limiti: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$ con $a \in \mathbf{R}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, p e q polinomi. Criterio del rapporto per successioni: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^k}$ con $a > 1$ e $k > 0$. Alcuni esempi.

7.11.2011 Le due successioni $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $b_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n}$ sono strettamente monotone (*). Il numero e come limite di $(1 + \frac{1}{n})^n$ per $n \rightarrow +\infty$; anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$ (*). In generale valgono

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}} = e^x \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

per ogni successione $\{a_n\}_n$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Esempi.

Alcuni limiti: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (*), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ (*),

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$ (*).

Limiti notevoli - Data $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ val-

gono: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ (*), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ (*), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} =$

1 , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_e(1+a_n)}{a_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+a_n)^p - 1}{a_n} = p$ per ogni $p > 0$.

Esempi ed esercizi.

9.11.2011 Esercizi su limiti di successioni.

12.11.2011 (recupero del 31 ottobre) Serie - Introduzione, definizione, serie geometrica di ragione q ($\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$). Calcolo di $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{10})^n$; come conseguenza il numero $0, \bar{9} = 1$. Carattere di una serie: serie convergenti, divergenti positivamente, divergenti negativamente, indeterminate. Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga è che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (*). Il viceversa non è vero: cioè, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ in generale non posso concludere nulla riguardo il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Esempi - la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge a 1 e $\lim_n \frac{1}{n(n+1)} = 0$; la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n})$ diverge a $+\infty$ e $\lim_n \log(1 + \frac{1}{n}) = 0$. Definizione di successione di Cauchy e criterio di convergenza di Cauchy. Applicazione alla successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ per mostrare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$.

14.11.2011 Serie a termini positivi - Criteri del confronto, del confronto asintotico, del rapporto, e suo corollario, della radice n -esima e suo corollario. Criterio di condensazione di Cauchy. Commenti. Serie armonica generalizzata. Esercizi sulle serie.

16.11.2011 Criterio di Leibniz (*). Serie a segno variabile: convergenza assoluta. Se una serie converge assolutamente converge anche semplicemente. Esercizi sulle serie.

21.11.2011 Limite per funzioni definite in un sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ e a valori in $\mathbf{R}$ - Definizione, esempi, commenti e proprietà (teorema della permanenza del segno, se il limite è finito la funzione localmente è limitata, confronto, teorema dei due carabinieri limite della somma e del prodotto di due funzioni).

23.11.2011 (3 ore) Definizione di funzione continua. Differenze con la definizione di limite. Osservazione: una funzione è continua in un punto x_0 del suo do-

minio se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Esempi di funzioni continue e di funzioni discontinue. Tipi di discontinuità. La composizione, la somma, il prodotto di funzioni continue sono continui. Le funzioni elementari sono continue.

Esercizi sui limiti.

28.11.2011 Teorema degli zeri e suo corollario ($f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continua in I e I intervallo, allora $f(I)$ è un intervallo). Commenti ed esempi (controesempi).

Teorema di Weierstarss: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è continua, f ammette massimo e minimo in $[a, b]$ (se f è continua in $[a, b]$, $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato). Commenti ed esempi (controesempi).

Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ è continua e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ allora f ammette minimo in (a, b) . Commenti ed esempi.

Se $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ è continua e invertibile, I intervallo, allora $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ è continua. Commenti ed esempi (controesempi).

30.11.2011 Funzioni derivabili - Retta passante per due punti e retta passante per un punto e con un dato coefficiente angolare; rapporto incrementale; definizione di derivata di una funzione in un punto; retta tangente al grafico di una funzione in un dato punto; esempi di alcune funzioni non derivabili in un punto. Derivata della somma, prodotto, rapporto di due funzioni derivabili. Formula della derivata in un punto $y_0 = f(x_0)$ della funzione inversa di una funzione f invertibile e derivabile in un punto x_0 con $f'(x_0) \neq 0$. Derivate di alcune funzioni elementari: $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbf{N}$ (*), $x \mapsto \sin x$ (*), $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto e^x$ (*), $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ (*), $x \mapsto \operatorname{arcsen} x$, $x \mapsto \operatorname{arccos} x$. Derivata della composizione di più funzioni. Esempi.

5.12.2011 Teorema di Fermat (*). Teorema di Rolle (*). Teorema di Lagrange sul valor medio (*). Una funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile la cui derivata è nulla è costante in ogni intervallo $I \subset D$. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile in I , I intervallo aperto, è crescente se e solo se $f' \geq 0$ per ogni $x \in I$, è decrescente se e solo se $f' \leq 0$ per ogni $x \in I$. Regola di de l'Hôpital. Esempi di limiti con tale regola.

7.12.2011 compito

12.12.2011 Derivate di ordine successivo: funzioni di classe C^k . Esempio di una funzione derivabile, ma non C^1 . Funzioni derivabili due volte: classificazione dei punti di estremo tramite la derivata seconda (*); una funzione derivabile $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ è convessa se e solo se f' è crescente; se inoltre è derivabile due volte f è convessa se e solo se f'' è non negativa.

Esercizi su grafici di funzioni.

14.12.2011 Esercizi su grafici di funzioni.

19.12.2011 Confronto locale tra funzioni - Dati $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, I intervallo aperto, $x_0 \in I$, $\alpha > 0$: f è asintotica a $|x - x_0|^\alpha$ ($\alpha > 0$) in x_0 , f è infinitesima in x_0 , f è infinitesima di ordine α in x_0 , f è "o piccolo" di $|x - x_0|^\alpha$ ($\alpha > 0$) in un punto x_0 , f è un infinito in x_0 , f è infinito di ordine α in x_0 . Formula di Taylor con resto di Peano. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Verifica di alcuni limiti noti (limiti notevoli) usando gli sviluppi di Taylor.

21.12.2011 Esercizi: applicazione della formula di Taylor al calcolo di limiti e allo studio di serie numeriche.

9.1.2012 (3 ore) Integrali - Introduzione. Calcolo di $\sum_{k=1}^n k^2$. Calcolo dell'area del sottografico di una arco di parabola tramite un'approssimazione con aree di rettangoli inscritti.

Definizione di suddivisione, somme inferiori e somme superiori di una funzione relativamente ad una suddivisione, integrale superiore ed integrale inferiore. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Condizioni equivalenti ad essere integrabile secondo Riemann. Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann. Le funzioni limitate e continue, le funzioni limitate e discontinue in un numero finito di punti, e funzioni limitate e monotone sono integrabili secondo Riemann. Proprietà dell'integrale: linearità, positività, isotonia. Integrali su sottointervalli e integrali orientati. Lemma della media integrale (*). Teorema fondamentale del calcolo integrale (*).

11.1.2012 Formula di integrazione per parti: esempi ed esercizi. Integrazione per sostituzione. Esercizi. Integrali razionali.

16.1.2012 Integrali razionali: continuazione. Esempi ed esercizi. Alcune sostituzioni standard: integrali del tipo $\int R(\sin x, \cos x) dx$ e $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Esercizi.

18.1.2012 Esercizi di riepilogo.