Esercizi sulla

CONVOLUZIONE

INTRODUZIONE

Si ricorda che la convoluzione tra due segnali x(t) e y(t), reali o complessi, indicata simbolicamente come:

$$C_{xy}(\tau) = x(t) * y(t)$$

è data indifferentemente dalle due espressioni:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t)dt$$

e

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau - t)y(t)dt$$

Dalla prima si passa alla seconda con un semplice cambiamento di variabili ($\tau - t = t'$).

La convoluzione è un operatore lineare, come è facile dimostrare applicando la definizione, per cui se y(t) = u(t) + v(t) si ha:

$$C_{xy}(\tau) = x(t) * (u(t) + v(t)) = C_{xu}(\tau) + C_{xv}(\tau)$$

Questa proprietà è molto utile per semplificare il calcolo di convoluzioni di segnali decomponibili nella somma di segnali più semplici.

E' anche facile dimostrare che se è nota la $C_{xy}(\tau)$, la convoluzione tra $x(t - t_0)$ e $y(t - t_1)$ vale $C_{xy}(\tau - t_0 - t_1)$. Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)y(\tau - t + t_1)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t + t_1 + t_0)dt = C_{xy}(\tau - t_1 - t_0)$$

Per calcolare una convoluzione nel dominio del tempo bisogna successivamente eseguire le seguenti operazioni:

1) Invertire l'asse di rappresentazione di uno dei due segnali [Si passa cioè da x(t) a x(-t) oppure da y(t) a y(-t)];
2) sul segnale il cui asse è stato invertito operare una traslazione che è negativa quando avviene verso sinistra e positiva quando avviene verso destra;
3) calcolare il prodotto tra il segnale traslato e l'altro non traslato;
4) calcolare l'area del prodotto.

Esercizio n.1

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A \, rect_{\Delta 1}(t - \Delta 1/2)$$

e

$$y(t) = B \, rect_{\Delta 2}(t - \Delta 2/2)$$

essendo $\Delta 1$ più piccolo di $\Delta 2$.
I due segnali sono riportati nella figura 1.1

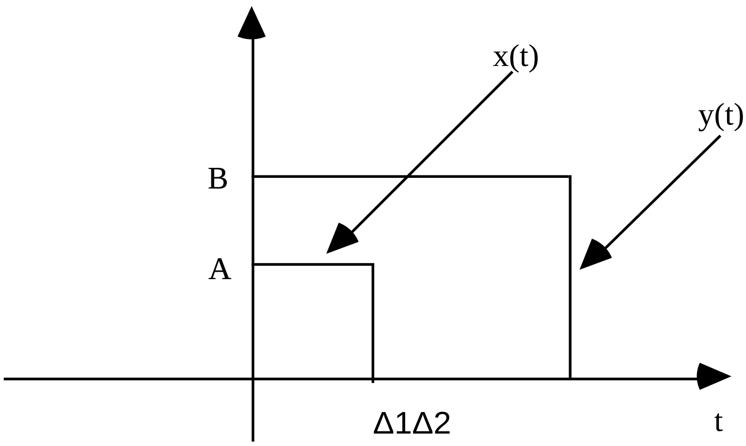


Fig.1.1

Come sopra riportato, la prima operazione da fare è quella di invertire l'asse di uno dei due segnali, ad esempio x(t) (Fig.1.2).

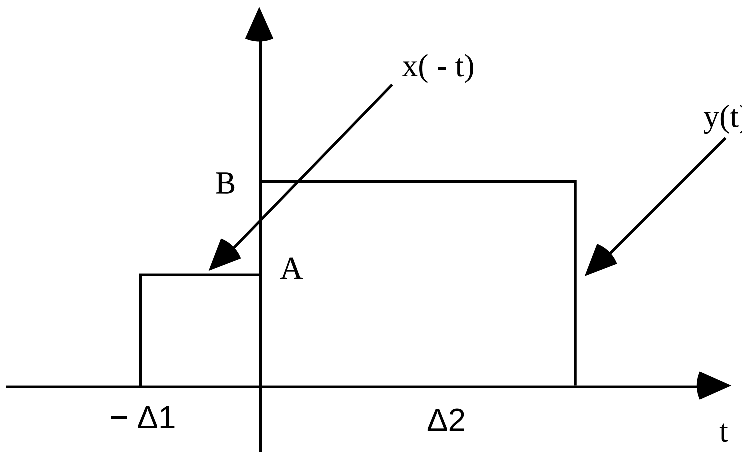


Fig.1.2

Successivamente si deve traslare x (-t); è evidente che traslazioni negative, cioè verso sinistra, fanno si che non vi siano intervalli di tempo in cui i due segnali x (τ -t) e y(t) siano

contemporaneamente presenti; questo implica che il loro prodotto è sempre nullo e quindi per τ minore di zero $C_{xy}(\tau)$ è sempre nulla.
La figura 1.3 mostra la situazione esistente per traslazioni positive e minori di $\Delta 1$.

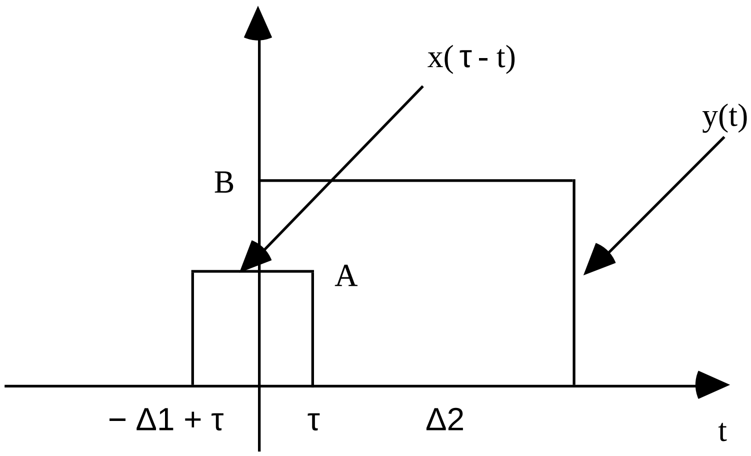


Fig.1.3

Gli estremi di integrazione dell'integrale di convoluzione saranno allora 0 e τ e pertanto si scriverà :

$$C_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} ABdt \quad = AB\tau$$

La convoluzione cresce linearmente raggiungendo per $\tau = \Delta 1$ il valore $AB\Delta 1$.

Per τ compreso tra $\Delta 1$ e $\Delta 2$ si può facilmente osservare come il valore della convoluzione rimanga costante; infatti, indipendentemente dal valore di τ, la durata della sovrapposizione dei due segnali rettangolari rimane $\Delta 1$ e pertanto il valore della convoluzione è $AB\Delta 1$.

Successivamente per traslazioni comprese tra $\Delta 2$ e $(\Delta 2 + \Delta 1)$ si realizza la situazione descritta in fig. 1.4 .
In questo caso si scriverà:

$$C_{xv}(\tau) = \int_{\tau - \Delta 1}^{\Delta 2} ABdt \quad = AB(\Delta 2 + \Delta 1 - \tau)$$

Per valori di τ ancora maggiori si realizza nuovamente la situazione iniziale di segnali non sovrapposti e quindi la convoluzione è nulla.

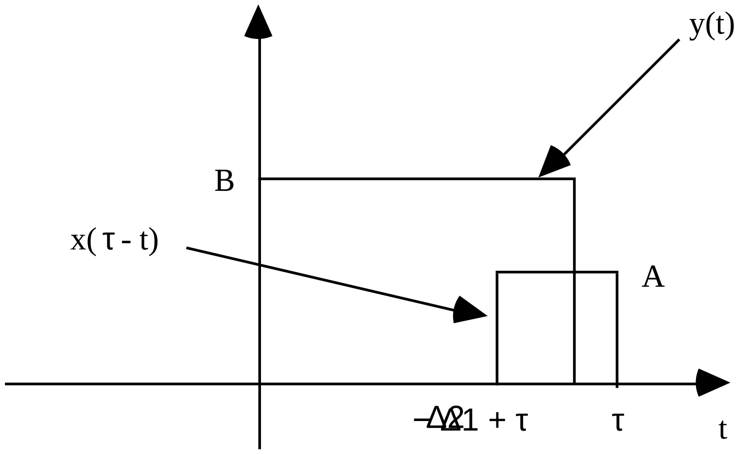


Fig.1.4

In definitiva si ha:

$C_{xy}(\tau) = 0$ per $\tau \le 0$ e per $\tau > (\Delta1 + \Delta2)$

$C_{xy}(\tau) = AB\,\tau$ per $0 < \tau \le \Delta1$

$C_{xy}(\tau) = AB\,\Delta1$ per $\Delta1 < \tau \le \Delta2$

$C_{xy}(\tau) = AB\,(\Delta2 + \Delta1 - \tau)$ per $\Delta2 < \tau \le (\Delta1 + \Delta2)$

L’andamento della convoluzione è riportato nella fig.1.5
Si può osservare, e questo vale in generale, che l'intervallo di tempo in cui la convoluzione è diversa da 0 dura la somma degli intervalli in cui sono diversi da 0 i segnali convoluti.

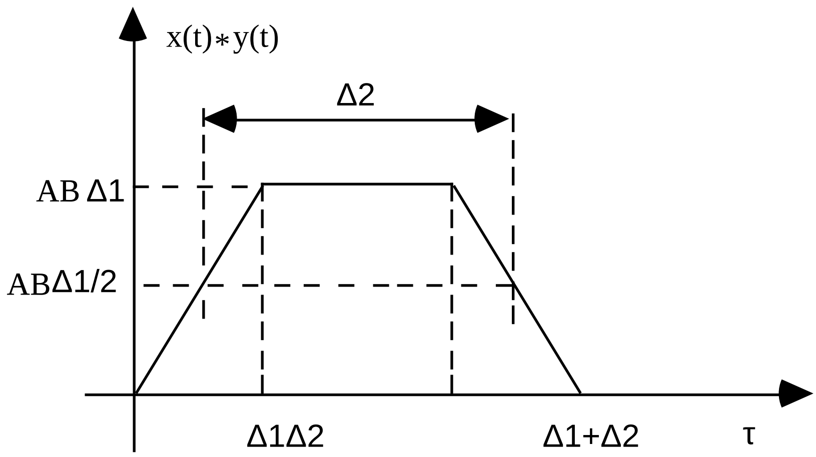


Fig.1.5

Si dice che l'impuso di fig.1.5 ha una durata $\Delta2$ in quanto convenzionalmente si assume come durata di un impulso il tempo che passa tra l'istante in cui, nel tempo di salita, si raggiunge un

valore che è il 50% di quello finale e quello, nel tempo di discesa, in cui si raggiunge lo stesso valore. Il tempo di salita e quello di discesa sono in questo caso entrambi uguali a $\Delta 1$.
Un segnale a forma trapezoidale è pertanto ottenuto come convoluzione di due segnali rettangolari di cui uno dura quanto il tempo di salita ($\Delta 1$) e il secondo quanto dura lo stesso impulso trapezoidale ($\Delta 2$).
Nel caso particolare in cui in cui $\Delta 1$ sia uguale a $\Delta 2$ (si indica con Δ il valore comune), il trapezio degenera in un triangolo di base 2Δ e altezza $AB\Delta$; la durata convenzionale - come sopra definita - è ancora Δ (fig.1.6).

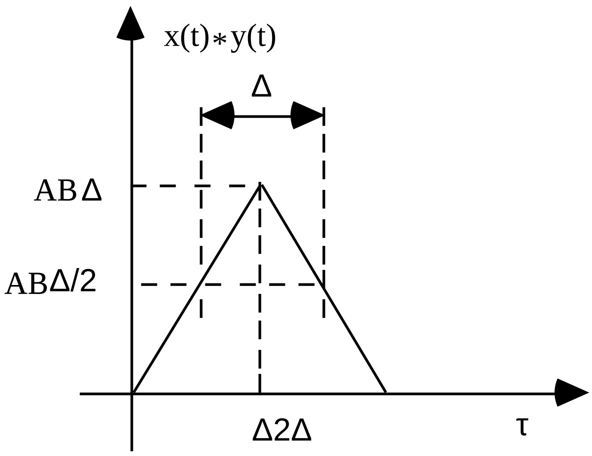


Fig.1.6

Simbolicamente questo segnale si indica come $AB\Delta \mathrm{tri}_{\Delta}(t - \Delta)$, essendo $\mathrm{tri}_{\Delta}(t)$ un segnale triangolare di ampiezza unitaria e centrato nell'origine.

Esercizio n.2

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = (At/\Delta 1)\, \mathrm{rect}_{\Delta 1}(t - \Delta 1/2)$$

e

$$y(t) = B\, \mathrm{rect}_{\Delta 2}(t - \Delta 2/2)$$

essendo $\Delta 1$ più piccolo di $\Delta 2$.
I due segnali sono riportati nella figura 2.1

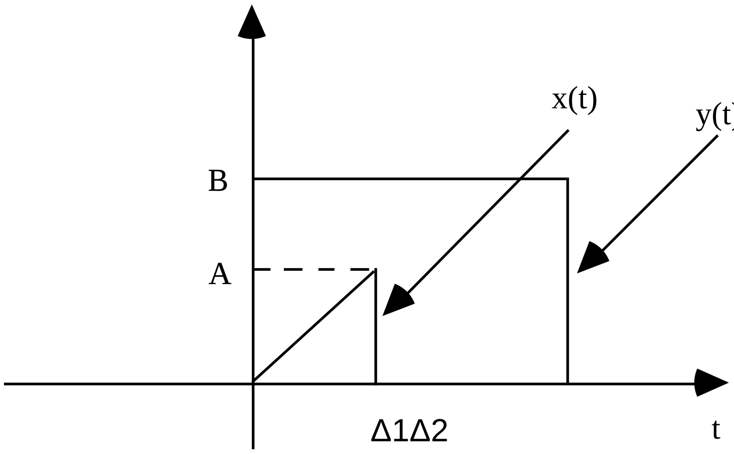


Fig.2.1

La prima operazione da fare è sempre quella di invertire l'asse di uno dei due segnali, anche in questo caso x(t) (Fig.2.2).

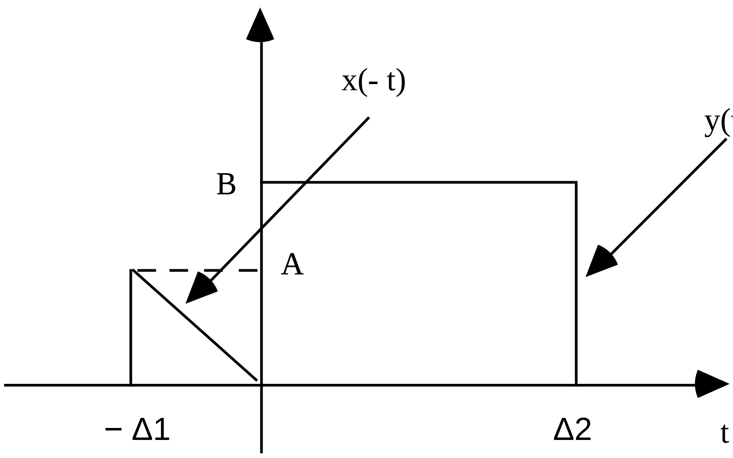


Fig.2.2

Successivamente si deve traslare x (-t); le traslazioni negative, anche in questo caso, fanno si che non vi siano intervalli di tempo in cui i due segnali x (τ -t) e y(t) siano contemporaneamente presenti; allora il loro prodotto è nullo e quindi per τ minore di zero $C_{xy}(\tau)$ è sempre nulla.
La figura 2.3 mostra la situazione esistente per traslazioni positive e minori di $\Delta 1$.

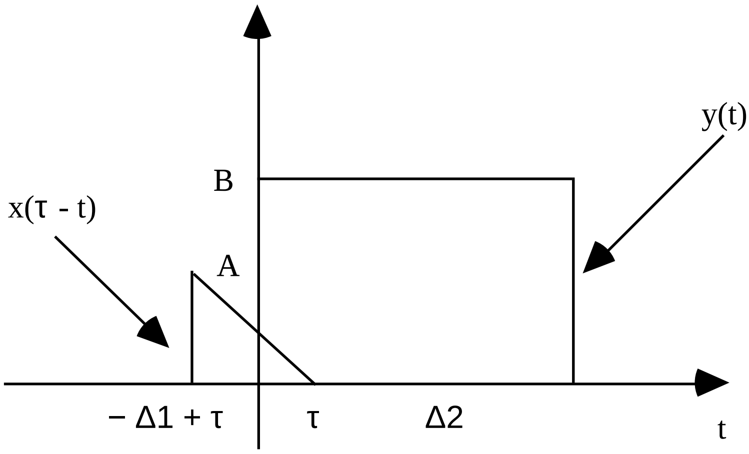


Fig.2.3

La regione in cui entrambi i segnali non sono nulli è quella compresa tra 0 e τ. Gli estremi di integrazione dell'integrale di convoluzione saranno allora 0 e τ:

$$C_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{1}{\Delta 1} AB(\tau - t)dt$$

Per risolvere facilmente questo integrale si può osservare che esso non è altro se non l'area di un triangolo di base τ e altezza $AB\tau/\Delta 1$; la sua area pertanto vale $AB\tau^2/2\Delta 1$ e questo è allora il valore della convoluzione nell'intervallo di tempo in esame.
La convoluzione cresce in modo parabolico raggiungendo per $\tau = \Delta 1$ il valore $AB\Delta 1/2$
Anche adesso per τ compreso tra Δ1 e Δ2 si può facilmente osservare come il valore della convoluzione rimanga costante; infatti, indipendentemente dal valore di τ, la durata della sovrapposizione dei due segnali rettangolari rimane Δ1 (fig.2.4) e pertanto il valore della convoluzione è $AB\Delta 1/2$.

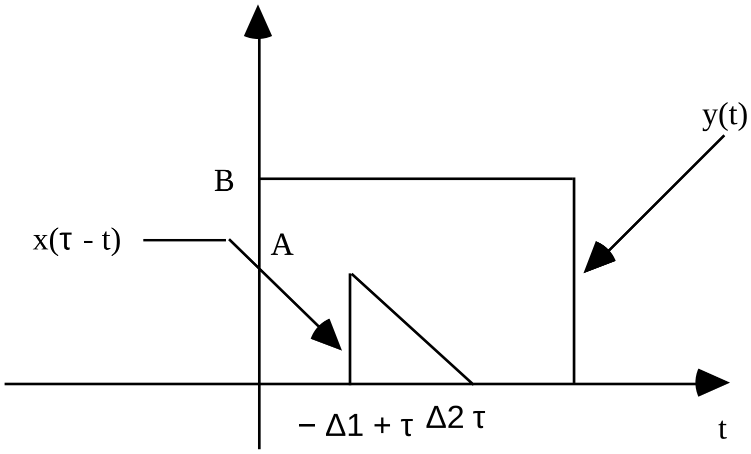


Fig.2.4

Successivamente per traslazioni comprese tra Δ2 e (Δ2 + Δ1) si realizza la situazione descritta in fig. 2.5 .
In questo caso si scriverà

$$C_{xy}(\tau) = \int_{\tau - \Delta 1}^{\Delta 2} \frac{1}{\Delta 1} AB(\tau - t)dt$$

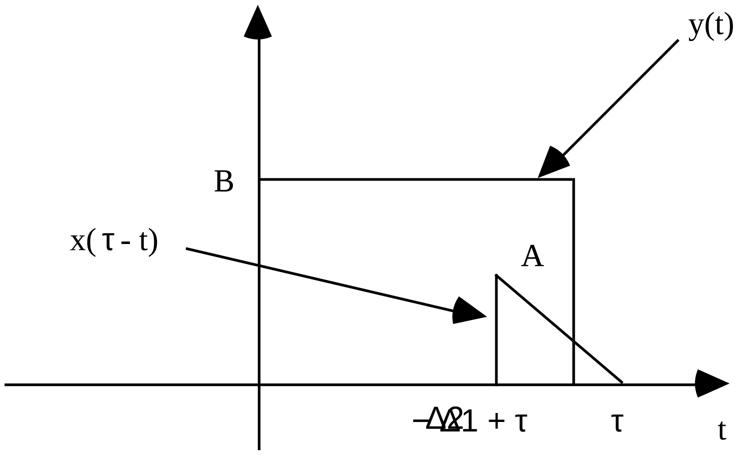


Fig.2.5

Si può osservare che, in questo caso , il calcolo dell'integrale di convoluzione coincide con il calcolo dell'area del trapezio rettangolo di altezza (Δ2 + Δ1− τ), base maggiore AB e base minore AB(τ − Δ2)/Δ1 (per calcolare tale valore basta ricorrere alla similitudine dei triangoli).

Allora l'integrale di convoluzione vale:

$$C_{xy}(\tau) = AB(\Delta2 + \Delta1 - \tau)[(\tau - \Delta2)/\Delta1 + 1]/2 = AB[\Delta1^2 - (\tau - \Delta2)^2]/2\Delta1$$

La convoluzione assume il valore $AB\Delta1/2$ per $\tau = \Delta2$ e vale 0 per $\tau = \Delta1 + \Delta2$.

Per valori di τ ancora maggiori si realizza nuovamente la situazione iniziale di segnali non sovrapposti e quindi la convoluzione è nulla.

In definitiva si ha:

$C_{xy}(\tau) = 0$	per $\tau \le 0$ e per $\tau > (\Delta1 + \Delta2)$
$C_{xy}(\tau) = AB\tau^2/2\Delta1$	per $0 < \tau \le \Delta1$
$C_{xy}(\tau) = AB\,\Delta1/2$	per $\Delta1 < \tau \le \Delta2$
$C_{xy}(\tau) = AB[\Delta1^2 - (\tau - \Delta2)^2]/2\Delta1$	per $\Delta2 < \tau \le (\Delta1 + \Delta2)$

Tale andamento è riportato nella fig.2.6

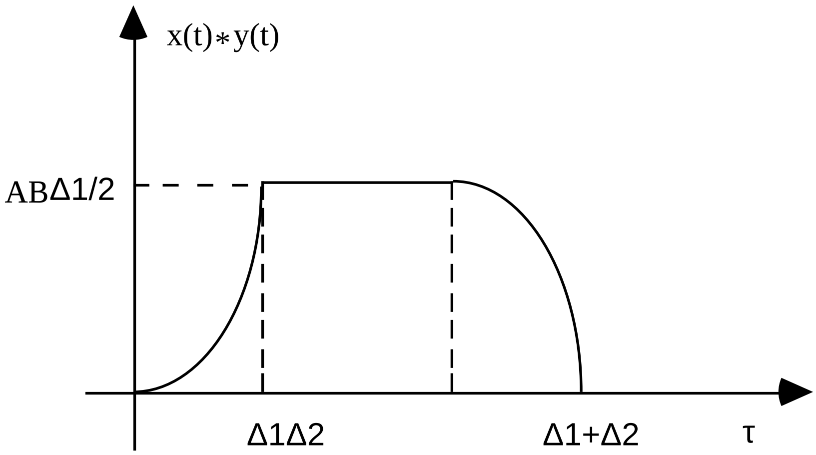


Fig.2.6

Si può ancora osservare che l'intervallo di tempo in cui la convoluzione è diversa da 0 dura la somma degli intervalli in cui sono diversi da 0 i segnali convoluti.

Esercizio n.3

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\, e^{-a\,(t-t_0)}\, u_{-1}(t-t_0)$$

e

$$y(t) = B\, e^{-b\,(t-t_1)}\, u_{-1}(t-t_1)$$

a, b sono due quantità positive con a>b. I due segnali sono riportati nella fig. 3.1.

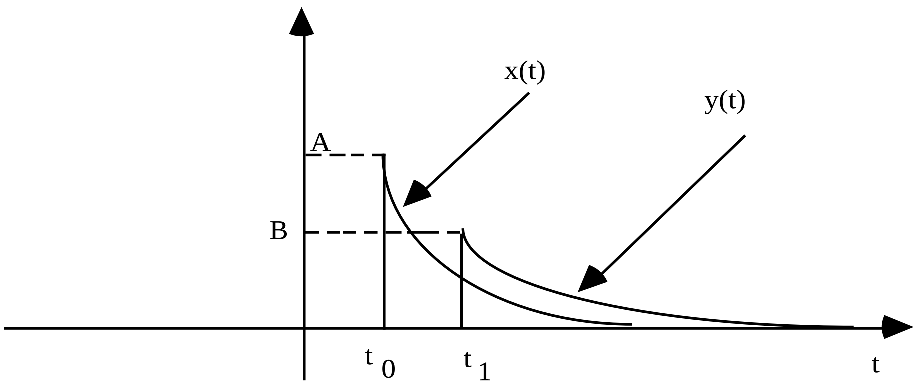


Fig.3.1

Come al solito bisogna invertire l'asse di uno dei due segnali prima di operare le traslazioni. (fig.3.2).

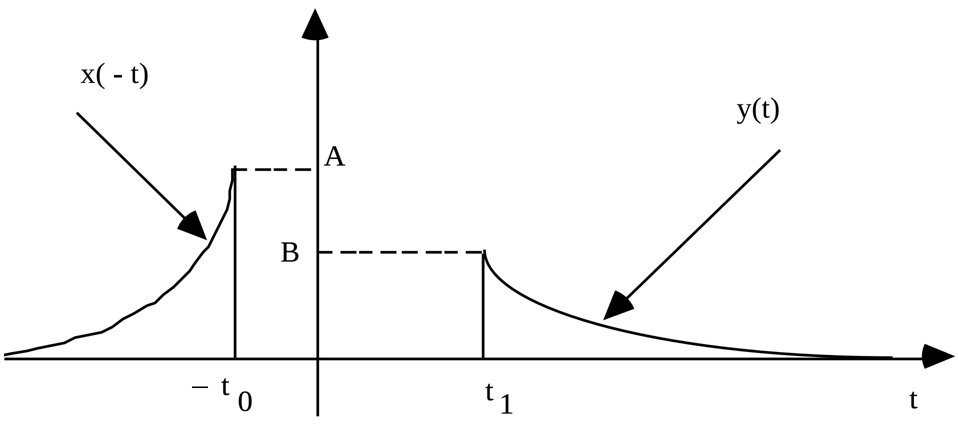


Fig.3.2

In questo caso è facile osservare come traslazioni negative conducono ad una convoluzione nulla, ma questo risultato si ottiene anche per traslazioni positive e inferiori a $t_0 + t_1$.In entrambi i casi $x(\tau - t)$ e $y(t)$ non sono mai contemporaneamente diversi da 0.
Per valori di τ maggiori di $t_0 + t_1$ la convoluzione non è nulla (Fig.3.3).

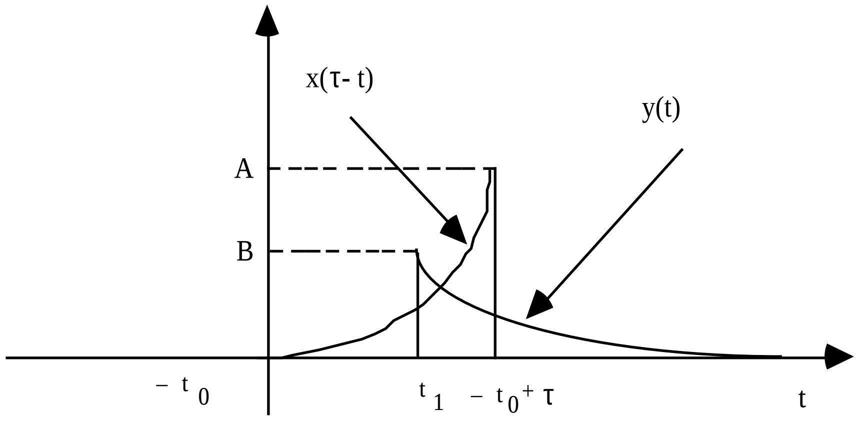


Fig.3.3

e sarà data dalla espressione:

$$C_{xy}(\tau) = AB\int_{t_1}^{-t_0+\tau} e^{-b\,(t\,-\,t_1)}\, e^{-\,a(\tau\,-\,t\,-\,t_0)}\, dt$$

che dà:

$$C_{xy}(\tau) = ABe^{\,b\,t_1\,+\,a(\,t_0-\,\tau)}\int_{t_1}^{-t_0+\tau} e^{\,(\,a\,-\,b)\,t}\, dt$$

e quindi:

$$C_{xy}(\tau) = ABe^{\,b\,t_1\,+\,a(\,t_0-\,\tau)}\frac{1}{(\,a\,-\,b)}\left(e^{\,(a-b)(-\,t_0+\,\tau)} - e^{\,(a-b)t_1}\right)$$

che può essere modificato come:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{AB}{(a-b)}\left(e^{-b(\tau-\,t_0-\,t_1)} - e^{-a(\tau-\,t_0-\,t_1)}\right)$$

Nel caso in cui t_0 e t_1 fossero entrambi nulli si avrebbe il risultato:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{AB}{(a-b)}\left(e^{-b\tau} - e^{-a\tau}\right)$$

Si può verificare come la presenza dei termini di ritardo t_0 e t_1 causa una traslazione di $t_0 + t_1$ della convoluzione calcolata per ritardi nulli, come indicato nell'introduzione.

La fig.3.4 rappresenta il risultato della convoluzione per AB = 8, a =2 , b =1, t_0 e t_1 nulli.

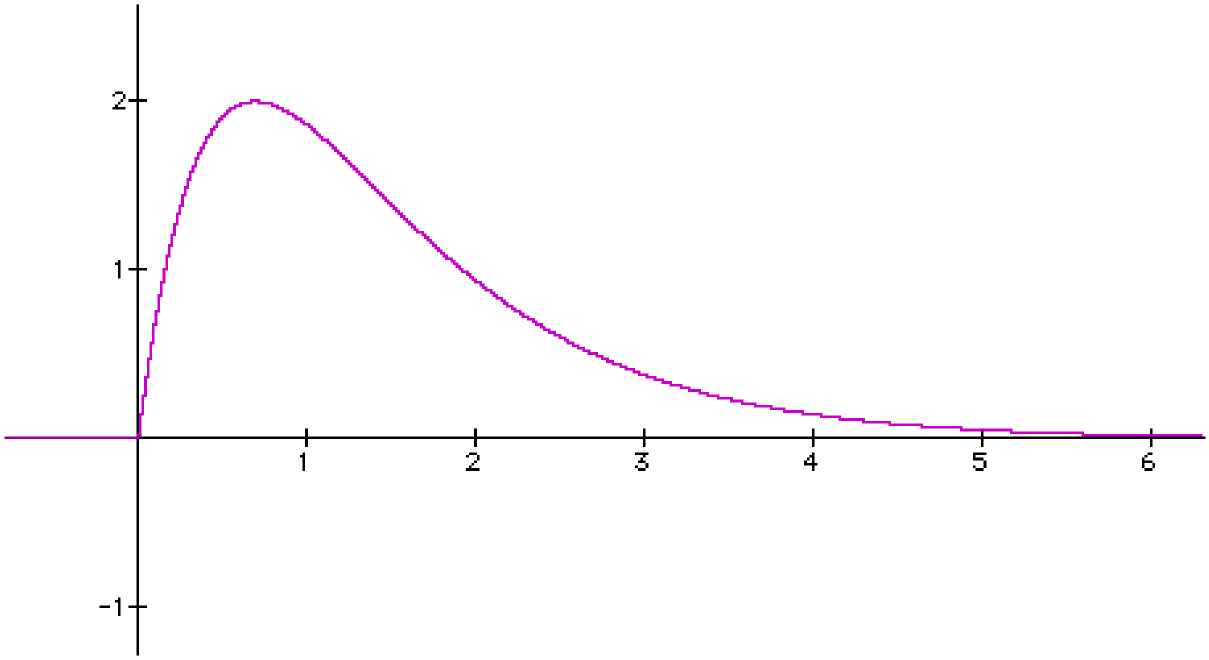


Fig.3.4

Nel caso in cui i coefficienti a e b fossero tra loro uguali le due precedenti formule, ponendo semplicemente b = a, ci porterebbero a forme indeterminate.
Con normali operazioni di limite si ottiene:

$$C_{xy}(\tau) = AB\,(\tau - t_0 - t_1)e^{-a(\tau - t_0 - t_1)}$$

e:

$$C_{xy}(\tau) = AB\,\tau e^{-a\tau}$$

Queste formule valgono per $\tau > t_0 + t_1$ e > 0 rispettivamente essendo nulla la convoluzione per valori di tempo negativi.
La fig.3.5 rappresenta il risultato della convoluzione nel caso a =b =1 e AB ancora uguale a 8.

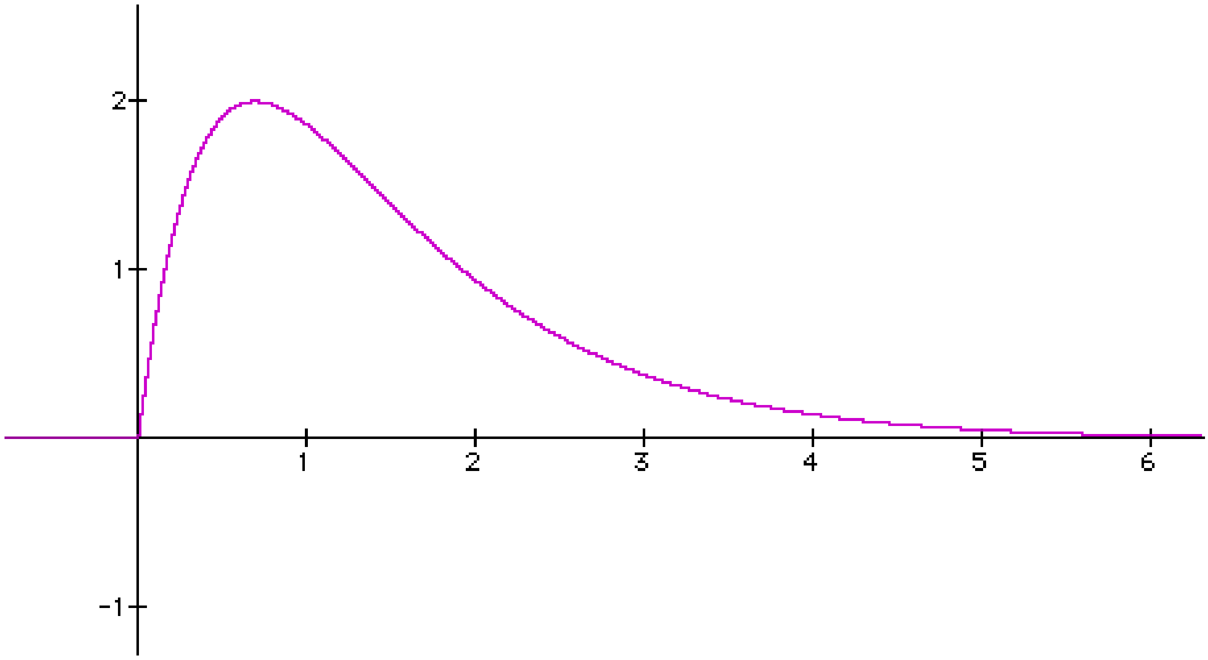


Fig.3.5

Esercizio n.4

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\ \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

e

$$y(t) = A\ [\mathrm{rect}_{\Delta}(t - 5\Delta/2) - \mathrm{rect}_{\Delta}(t - 7\Delta/2)]$$

I due segnali sono riportati nella figura 4.1

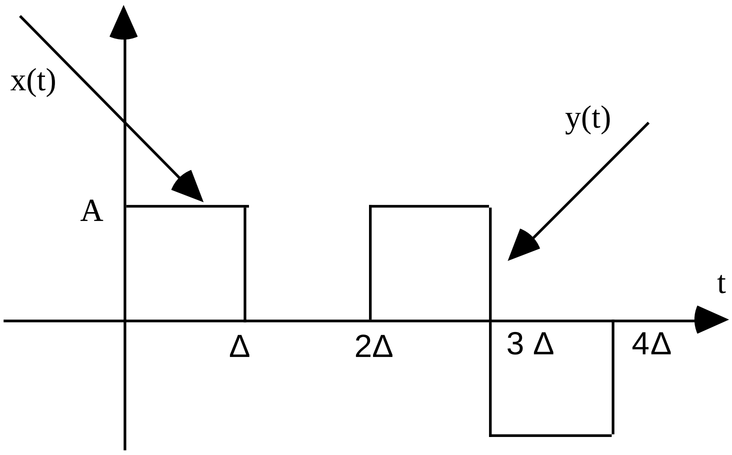


Fig.4.1

Per risolvere facilmente tale problema si può ricorrere a quanto indicato nell'introduzione circa la linearità dell'operazione convoluzione.

Allora:

$$x(t) * y(t) = A\,\mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2) * A\,[\mathrm{rect}_{\Delta}(t - 5\Delta/2) - \mathrm{rect}_{\Delta}(t - 7\Delta/2)] =$$
$$= A^2\{\mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2) * \mathrm{rect}_{\Delta}(t - 5\Delta/2) + \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2) * \mathrm{rect}_{\Delta}(t - 7\Delta/2)\}$$

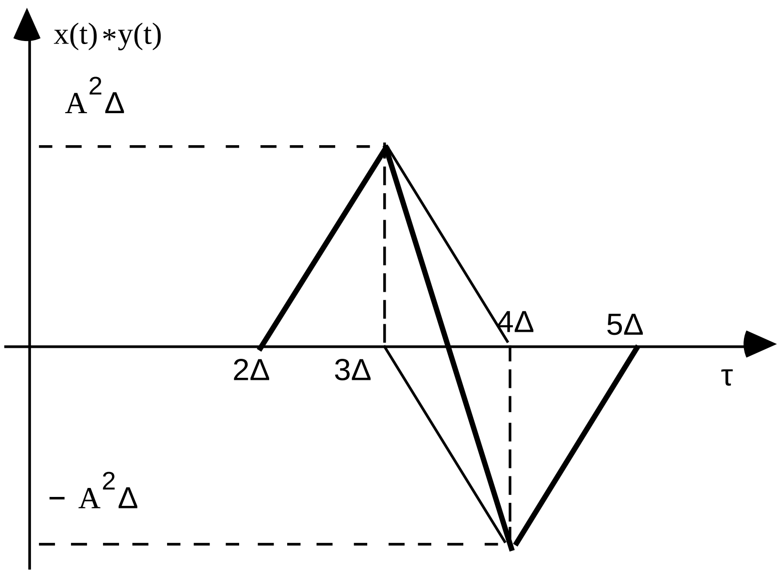
Dall'esercizio 1 possiamo ricavare l'espressione della convoluzione tra due rettangoli che dà:

$$\mathrm{rect}_{\Delta}(t) * \mathrm{rect}_{\Delta}(t) = \Delta\,\mathrm{tri}_{\Delta}(t)$$

Tenendo conto della regola di traslazionesi ottiene allora in conclusione:

$$C_{xy}(\tau) = A^2\{\Delta\,\mathrm{tri}_{\Delta}(t - 3\Delta) - \Delta\,\mathrm{tri}_{\Delta}(t - 4\Delta)\}$$

La fig.4.2 illustra $C_{xy}(\tau)$.



Questo esercizio consente di dare un criterio semplice di soluzione di problemi che trattino la convoluzione di segnali che abbiano in comune la caratteristica di essere costruiti su impulsi rettangolari della stessa durata. A parte, infatti, il ritardo che come detto nell'introduzione

Fig.4.2

Esercizio n.5

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = t\ \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

e

$$y(t) = (\Delta - t)\ \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

I due segnali sono riportati nella figura 5.1

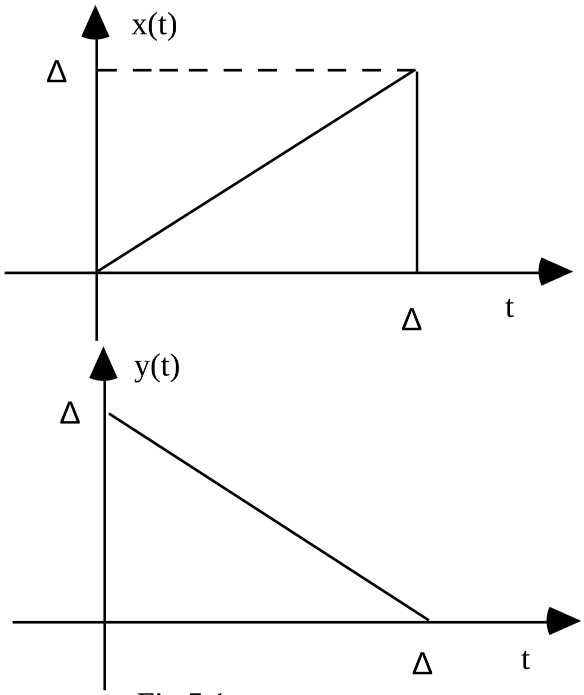


Fig.5.1

Anche ora è facile osservare che per τ minore di zero $C_{xy}(\tau)$ è sempre nulla.
Per $0 \leq \tau < \Delta$ si ha la situazione descritta in figura 5.2.

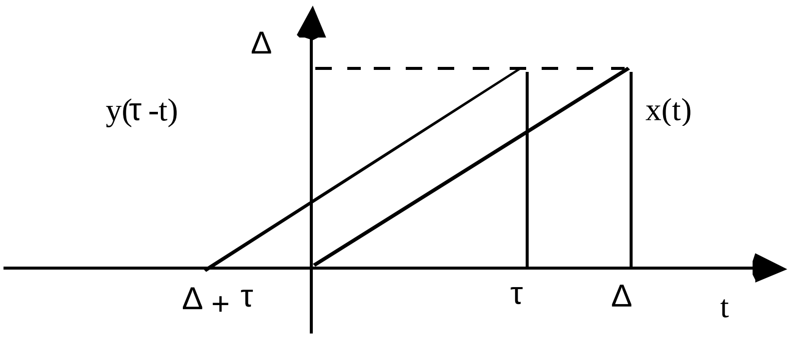


Fig.5.2

Si ha allora:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{0}^{\tau} t\ (\Delta - \tau + t)\ dt =$$

$$= (\Delta-\tau)\,\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} = \Delta\,\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6}$$

Per $\Delta \le \tau < 2\Delta$ si ha invece la situazione descritta in figura 5.3.

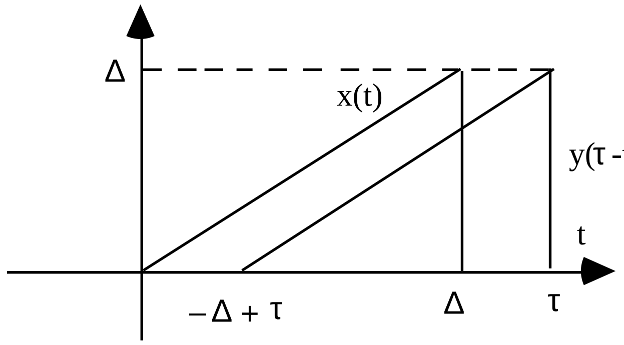


Fig.5.3

e la convoluzione diventa:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\Delta+\tau}^{\Delta} t\,(\Delta-\tau+t)\,dt = \int_{0}^{2\Delta-\tau} (x-\Delta+\tau)\,x\,dx =$$

$$= \frac{(2\Delta-\tau)^3}{3} + (\tau-\Delta)\frac{(2\Delta-\tau)^2}{2}$$

Per valori di τ superiori la convoluzione torna ad essere nulla.
Si può osservare che $C_{xy}(\Delta)$ vale $\Delta^3/3$. Il risultato della convoluzione è riportato nella fig.5.4 per $\Delta = 2$.

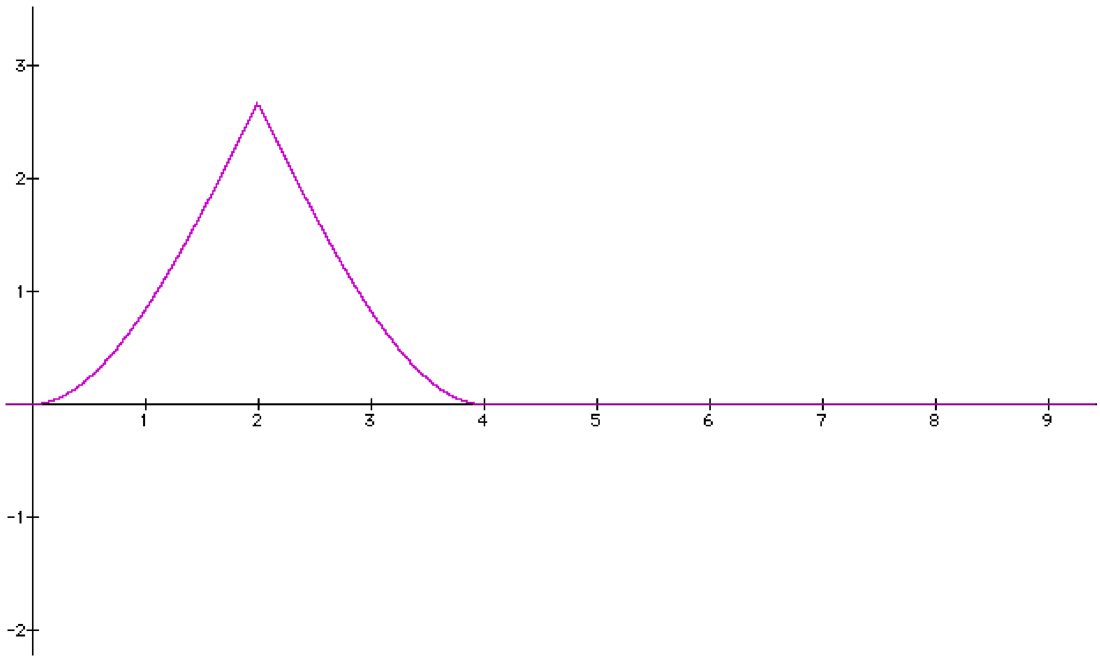


Fig.5.4

Esercizio n.6

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\, \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)$$

e

$$y(t) = \cos(2\pi f t)$$

Applicando la definizione di convoluzione si può scrivere:

$$C_{xy}(\tau) = A\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_{\Delta}(t - \Delta/2)\cos(2\pi f(\tau - t))\,dt$$

e quindi anche :

$$C_{xy}(\tau) = A\int_{0}^{\Delta} \cos(2\pi f(t - \tau))\,dt = \frac{A}{2\pi f}\int_{-2\pi f\tau}^{2\pi f(\Delta - \tau)} \cos x\,dx =$$

$$= \frac{A}{2\pi f}\left\{\sin(2\pi f(\Delta - \tau)) + \sin(2\pi f\tau)\right\}$$

Utilizzando note formule goniometriche si può ancora scrivere:

$$= \frac{A}{2\pi f}\left\{\sin(2\pi f\Delta)\cos(2\pi f\tau) + (1 - \cos(2\pi f\Delta))\sin(2\pi f\tau)\right\} =$$

$$= \frac{A}{2\pi f}\, M\cos(2\pi f\tau + \varphi)$$

con

$$M = \sqrt{2 - 2\cos(2\pi f\Delta)} = 2\sin(\pi f\Delta)$$

e

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\cos(2\pi f\Delta) - 1}{\sin(2\pi f\Delta)} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\cos^2(\pi f\Delta) - \sin^2(\pi f\Delta) - 1}{2\sin(\pi f\Delta)\cos(\pi f\Delta)} =$$

$$= \mathrm{tg}^{-1}\frac{-2\sin^2(\pi f\Delta)}{2\sin(\pi f\Delta)\cos(\pi f\Delta)} = -\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sin(\pi f\Delta)}{\cos(\pi f\Delta)} = -\pi f\Delta$$

Si può osservare come la convoluzione tra una sinusoide e un impulso rettangolare sia ancora una sinusoide della stessa frequenza con ampiezza e fase modificate.
Questo è vero qualunque sia la forma del segnale x(t).

Esercizio n.7

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = A\, tri_{\Delta}(t)$$

e

$$y(t) = u_0(t - \theta)$$

ove u_0 è un altro simbolo con cui è indicata la funzione impulso di Dirac.
Per definizione la convoluzione è:

$$C_{xy}(\tau) = A\int_{-\infty}^{+\infty} tri_{\Delta}(t)\, u_0(\tau - t - \theta)\ dt$$

Tenendo conto delle proprietà campionatrici della funzione di Dirac si ottiene facilmente:

$$C_{xy}(\tau) = A tri_{\Delta}(\tau - \theta)$$

L'impulso di Dirac ha "trascinato" il segnale con cui è convoluto nel suo punto di applicazione. Se è θ nullo si può osservare come la convoluzione del segnale con l'impulso di Dirac coincide col segnale stesso.

$$x(t) * u_0(t) = x(t)$$

Rispetto all'operatore "prodotto di convoluzione" l'impulso di Dirac centrato rappresenta l'elemento unitario.

Esercizio n.8

Calcolare la convoluzione tra i segnali :

$$x(t) = e^{j2\pi f_1 t}\, rect_{\Delta}(t)$$

e

$$y(t) = e^{j2\pi f_2 t}\, rect_{\Delta}(t)$$

Si consideri inizialmente il caso in cui le due frequenze siano uguali:

$$f_1 = f_2 = F$$

dalla definizione di convoluzione si ha:

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi F\tau}\, rect_{\Delta}(\tau) e^{j2\pi F(t-\tau)} rect_{\Delta}(t-\tau) d\tau$$

che può essere riscritta come:

$$C_{xy}(t) = e^{j2\pi Ft}\int_{-\infty}^{+\infty} rect_{\Delta}(\tau)\ \ rect_{\Delta}(t-\tau) d\tau$$

Si tratta allora del prodotto tra la sinusoide complessa a frequenza F e la convoluzione del rettangolo di durata Δ e centrato nell'origine con se stesso.

Ricordando il risultato dell'esercizio 1, nel caso di due rettangoli di uguale durata e tenendo conto che, in questo caso, i due rettangoli sono centrati nell'origine si ha:

$$C_{xy}(t) = \Delta\, e^{j2\pi Ft} \mathrm{tri}_\Delta(t)$$

La convoluzione è cioè, un segnale complesso a inviluppo triangolare:

$$\left|C_{xy}(t)\right| = \Delta\ \mathrm{tri}_\Delta(t)$$

la cui fase varia linearmente nel tempo.
Questo risultato può essere generalizzato nel senso che se si deve calcolare la convoluzione tra due segnali del tipo:

$$x(t) = e^{j2\pi Ft} g(t)$$

e

$$y(t) = e^{j2\pi Ft} h(t)$$

la convoluzione sarà:

$$C_{xy}(t) = e^{j2\pi Ft} C_{gh}(t)$$

Nel caso, invece, in cui le due frequenze siano diverse, la convoluzione si scrive come:

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_1\tau} \mathrm{rect}_\Delta(\tau) e^{j2\pi f_2(t-\tau)} \mathrm{rect}_\Delta(t-\tau)d\tau$$

cioè:

$$C_{xy}(t) = e^{j2\pi f_2 t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f_1-f_2)\tau} \mathrm{rect}_\Delta(\tau)\mathrm{rect}_\Delta(t-\tau)d\tau$$

Per traslazioni positive di t , per quello che riguarda i due rettangoli, si ha la situazione descritta in figura 8.1, essendo t la traslazione positiva dei fronti dell'impulso

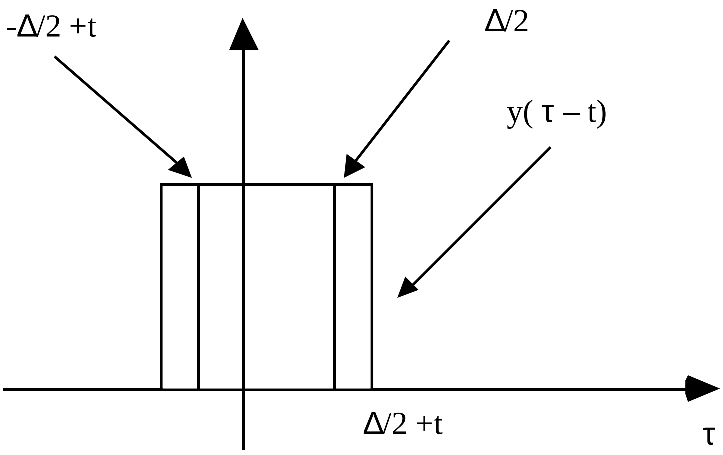


Fig.8.1

L'integrale di convoluzione diventa, per t compreso tra 0 e Δ:

$$C_{xy}(t) = e^{j2\pi f_2 t}\int_{t-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{j2\pi(f_1-f_2)\tau} d\tau$$

che dà:

$$C_{xy}(t) = e^{j2\pi f_2 t} \frac{e^{j2\pi(f_1 - f_2)\Delta/2} - e^{j2\pi(f_1 - f_2)(t-\Delta/2)}}{j2\pi(f_1 - f_2)}$$

analogamente si opera per traslazioni negative ottenendo la situazione di fig.8.2.

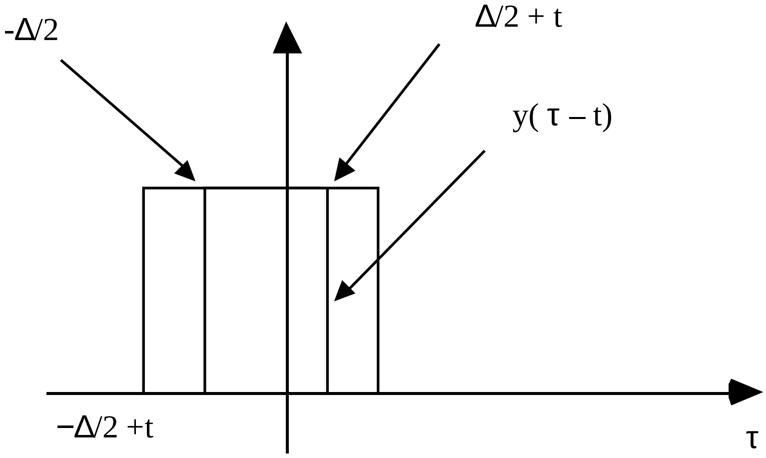


Fig. 8.2

L'integrale di convoluzione diventa, in questo caso (si ricordi che t è negativo) per t compreso tra – Δ e 0:

$$C_{xy}(t) = e^{j2\pi f_2 t} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2+t} e^{j2\pi(f_1 - f_2)\tau} d\tau$$

che dà:

$$C_{xy}(t) = e^{j2\pi f_2 t} \frac{e^{j2\pi(f_1 - f_2)(\Delta/2+t)} - e^{-j2\pi(f_1 - f_2)\Delta/2}}{j2\pi(f_1 - f_2)}$$

La convoluzione è nulla per $|t| > \Delta$.

Come si può osservarel'ipotesi di diversità delle frequenze rende il problema molto meno gestibile da un punto di vista analitico.