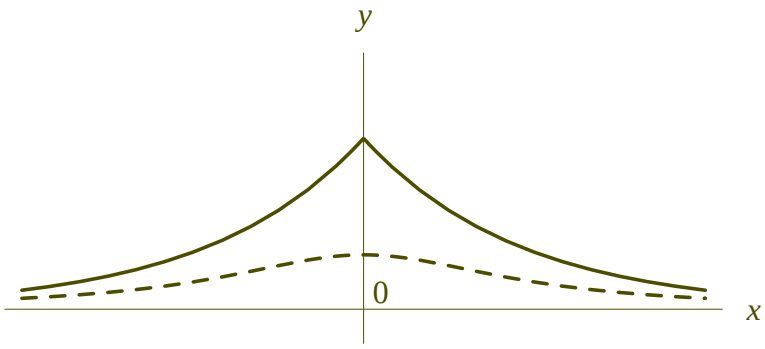
Michele Campiti

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Matematica Applicata



a.a. 2003-2004

Dispensa per il Corso di "Metodi Matematici per l'Ingegneria" per *Ingegneria Gestionale,* e per il Corso di "*Matematica Applicata*" per *Ingegneria Informatica,* Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Lecce

In copertina: Trasformata di Fourier della funzione $1/(\pi + \pi x^2)$

Prefazione

I capitoli considerati costituiscono in parte una sintesi ed in parte un approfondimento delle lezioni tenute per il corso di "Matematica Applicata" per Ingegneria Informatica della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Lecce.

L'intento é da un lato quello di fornire un riferimento organico per alcune delle questioni più rilevanti trattati durante il corso e dall'altro quello di fornire ove necessario del materiale sussidiario in modo da rendere il corso autonomo.

Dopo aver esposto alcuni richiami elementari sui numeri complessi, vengono studiati gli aspetti principali dell'analisi complessa, alcuni cenni di teoria delle distribuzioni e le trasformate di Laplace e di Fourier.

La presente trattazione é disponibile in rete nel "Materiale didattico" delle sezioni relative alla didattica all'indirizzo

`http://www.matematica.unile.it/docenti/campiti`

ed é aggiornata periodicamente; suggerimenti e correzioni da apportare possono essere segnalati al seguente indirizzo E-Mail:

`michele.campiti@unile.it` .

Bari, novembre 2003

Michele Campiti

Indice

1 Preliminari **1**

1.1 Richiami sui numeri complessi 1

1.1.1 Proprietà generali dei numeri complessi 1

1.1.2 Coordinate polari e forma trigonometrica dei numeri complessi 3

1.1.3 Proprietà metriche dell'insieme dei numeri complessi . 7

2 Funzioni complesse **9**

2.1 Limiti e continuità in $\mathbb{C}$ 9

2.2 Funzioni olomorfe 11

2.3 Serie di potenze in campo complesso 16

2.3.1 Richiami sulle successioni e serie di funzioni 16

2.3.2 Serie di potenze 18

2.4 Funzioni elementari complesse 19

2.5 Cammini ed integrali curvilinei 23

2.6 Funzioni analitiche 27

2.7 Circuiti omotopici 34

2.8 Zeri di una funzione olomorfa 35

2.9 Singolarità e serie di Laurent 38

2.10 Il teorema dei residui 42

2.11 Il residuo all'infinito 43

2.12 Teoremi di Jordan 44

2.13 Applicazioni al calcolo degli integrali 45

2.14 Somma di una serie 72

3 Cenni di teoria della misura **77**

3.1 La teoria della misura secondo Lebesgue 77

3.2 Funzioni misurabili e sommabili 80

3.3 Spazi L^p 81

3.4 Spazi di Hilbert e prodotto scalare in $L^2(E)$ 87

3.5 Cenni sugli spazi di Schwartz 89

4 La trasformata di Fourier **93**
4.1 Definizioni e prime proprietà 93
4.2 Esempi ed applicazioni 97
4.3 Applicazioni a problemi differenziali 104

5 La trasformata di Laplace **105**
5.1 Proprietà generali 105
5.2 Inversione della trasformata di Laplace 111
5.3 Applicazioni a problemi differenziali 113
5.4 Esempi ed applicazioni 113

Bibliografia **123**

Notazioni utilizzate

Simboli logici

$\Rightarrow$	Implicazione logica (implica)
$\Leftrightarrow$	Equivalenza logica (equivale)
$\exists$, $\exists\vert$	Quantificatore esistenziale (esiste, esiste uno ed un solo)
$\forall$	Quantificatore universale (per ogni)
t.c. , (oppure $\ni'$)	Abbreviazione linguistica: tale che
:	Abbreviazione linguistica: risulta che
$=$, $\neq$	Uguaglianza, non uguaglianza (uguale, diverso)
$\in$, $\notin$	Appartenenza, non appartenenza (appartiene, non appartiene)
$\subset$, $\not\subset$	Inclusione, non inclusione (contenuto, non contenuto)

Simboli insiemistici

$\emptyset$	Insieme vuoto
$\{x\}$	Insieme ridotto al solo elemento x
$\{x, y\}$	Coppia non ordinata x, y
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	Insieme costituito dagli elementi $x_1, \ldots, x_n$
(x, y)	Coppia ordinata x, y
(x, y, z)	Terna ordinata x, y, z
$(x_1, \ldots, x_n)$	n-pla ordinata $x_1, \ldots, x_n$
$(a_i)_{i\in I}$	Famiglia di elementi di un insieme
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Successione di elementi di un insieme
$E \cup F$	Unione degli insiemi E ed F
$E \cap F$	Intersezione degli insiemi E ed F
$\complement_E(A)$	Complementare di A in E
$E \setminus F$	Differenza dei due insiemi E ed F
$E \times F$	Insieme prodotto di E per F
$\bigcup_{i\in I} E_i$, $\bigcap_{i\in I} E_i$	Unione, rispettivamente intersezione, della famiglia di insiemi $(E_i)_{i\in I}$

$\prod_{i\in I} E_i$	Prodotto (cartesiano) della famiglia di insiemi $(E_i)_{i\in I}$

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri interi relativi
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi
$\bar{R}, \tilde{R}, \hat{R}$	Insieme ampliato dei numeri reali
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$	Insieme privato del numero 0
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$	Insieme degli elementi positivi dell'insieme considerato
$\mathbb{Z}_-, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_-$	Insieme degli elementi negativi dell'insieme considerato
$]a,b[, [a,b]$,	Intervalli limitati aperti e chiusi di $\mathbb{R}$
$[a,b[,]a,b]$	Intervalli limitati semiaperti di $\mathbb{R}$
$]a, \rightarrow [,]a, +\infty[$,	Intervalli illimitati a destra aperti di $\mathbb{R}$
$] \leftarrow, a[,]-\infty, a[$,	Intervalli illimitati a sinistra aperti di $\mathbb{R}$
$[a, \rightarrow [, [a, +\infty[$,	Intervalli illimitati a destra chiusi di $\mathbb{R}$
$] \leftarrow, a],]-\infty, a]$	Intervalli illimitati a sinistra chiusi di $\mathbb{R}$
$]x-\delta, x+\delta[, [x-\delta, x+\delta]$	Intervalli centrati aperti, chiusi, di centro x e raggio δ
$n!$	Fattoriale di n
$\binom{n}{k}$	Coefficiente binomiale n su k
$\lvert x\rvert$	Valore assoluto di x
$[x]$	Parte intera di x
$\bar{z}$	Numero complesso coniugato di z
$\lvert z\rvert$	Modulo del numero complesso z
$\Im(z),\ \operatorname{Im} z$	Parte immaginaria di z
$\Re(z),\ \operatorname{Re} z$	Parte reale di z
e	Numero di Nepero
i	Unità immaginaria
π	Lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1

Capitolo 1

Preliminari

Nel presente capitolo vengono richiamate alcune questioni di carattere elementare che interverranno in tutto il seguito senza un esplicito richiamo. Lo scopo del presente capitolo è anche quello di fissare le notazioni utilizzate nei capitoli successivi.

1.1 Richiami sui numeri complessi

1.1.1 Proprietà generali dei numeri complessi

Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è possibile risolvere tutte le equazioni algebriche; ad esempio, l'equazione $x^2+1=0$ non ammette alcuna soluzione reale. L'insieme dei numeri complessi permette di risolvere in modo definitivo tale problema nel senso che, in tale insieme, tutte le equazioni algebriche ammettono almeno una soluzione. Tuttavia in tale estensione si perdono alcune proprietà importanti di $\mathbb{R}$, come quelle relative alla relazione d'ordine: nell'insieme dei numeri complessi non è infatti possibile definire una relazione d'ordine totale compatibile con le operazioni algebriche.

Partendo dall'equazione $x^2+1=0$, se si vuole che essa ammetta almeno una soluzione, bisogna ammettere l'esistenza di un elemento il cui quadrato sia -1. Tale elemento, che non può essere un numero reale in quanto i quadrati dei numeri reali sono sempre positivi, verrà denotato con i e verrà denominato *unità immaginaria*. Quindi il 'numero' i è caratterizzato dalla proprietà:

$$i^2 = -1 \, .$$

Assunta l'esistenza del numero i, anche le equazioni di secondo grado della forma $(x-a)^2+b^2=0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ ammettono le soluzioni $a \pm i \cdot b$.

Al fine di precisare le operazioni di addizione e moltiplicazione, conviene innanzitutto osservare che tali numeri sono caratterizzati dalla coppia (a, b) di numeri reali. In questo modo, è possibile trasferire lo studio delle operazioni algebriche nell'insieme già noto $\mathbb{R}^2$. In $\mathbb{R}^2$ l'addizione viene definita

ponendo, per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \, .$$

Tale addizione verifica le proprietà associativa e commutativa, e inoltre l'elemento neutro 0 è dato dalla coppia (0,0); infine, per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'opposto di (a,b), che si denota con $-(a,b)$, è la coppia $(-a,-b)$.

La moltiplicazione di $\mathbb{R}^2$ viene invece definita nel seguente modo, per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Anche per la moltiplicazione è facile riconoscere la validità delle proprietà associativa e commutativa, l'esistenza dell'elemento neutro 1 dato dalla coppia (1,0) e, per ogni $(a,b) \neq (0,0)$, l'esistenza dell'elemento inverso (reciproco di (a,b)) che si denota con $(a,b)^{-1}$ oppure con $\dfrac{1}{(a,b)}$, ed è dato dalla coppia

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

L'insieme $\mathbb{R}^2$, munito dell'addizione e della moltiplicazione definite sopra, viene denominato *insieme dei numeri complessi* e denotato con il simbolo $\mathbb{C}$. Si tratta di un campo.

Se $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, il numero (reale) a viene denominato *parte reale* di z e denotato con $\Re(z)$ oppure con $\operatorname{Re} z$, mentre il numero (reale) b viene denominato *parte immaginaria* di z e denotato con il simbolo $\Im(z)$ oppure con $\operatorname{Im} z$. In questo modo un numero complesso z può essere rappresentato come $z = (\Re(z), \Im(z))$. La coppia $(\Re(z), \Im(z))$ viene anche denominata *forma geometrica* di z.

L'unità immaginaria i è rappresentata ovviamente dalla coppia (0,1). Inoltre un numero reale a è rappresentato dalla coppia $(a,0)$.

Per ogni $(a,b) \in \mathbb{C}$,

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = (a,0) + i \cdot (b,0) = a + i \cdot b$$

e si ottiene così la *forma algebrica* di z.

La forma geometrica dei numeri complessi rende possibile la loro rappresentazione come elementi di un piano, sul quale sia stato fissato un sistema di assi cartesiani; in tal caso si preferisce parlare di *piano complesso* anziché di piano cartesiano e di *asse reale* e *asse immaginario* anziché di asse delle ascisse e rispettivamente delle ordinate. Naturalmente, anziché parlare di ascissa ed ordinata di un numero complesso si preferisce utilizzare le definizioni già introdotte di parte reale e di parte immaginaria.

▷ Assegnato un numero complesso $z = a + ib$, il numero complesso $w = a - ib$ viene denominato numero complesso *coniugato* di z e denotato con il simbolo $\overline{z}$.

Infine, come si vede dal calcolo del reciproco di un numero complesso, è anche utile definire, per ogni numero complesso $z = a + ib$, il numero reale $\sqrt{a^2 + b^2}$, il quale prende il nome di *modulo* di z e viene denotato con il simbolo $|z|$ (l'uso dello stesso simbolo che rappresenta il valore assoluto di un numero reale non dà luogo ad equivoci in quanto, se si considera un numero reale $a \in \mathbb{R}$ come numero complesso della forma $z = a + i \cdot 0$, si ha $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$).

Nel piano complesso, il coniugato di un numero complesso z è il simmetrico di z rispetto all'asse reale mentre il modulo rappresenta la distanza di z dall'origine.

Si considerano ora altre forme in cui possono essere espressi i numeri complessi; è necessario, per questo, un sistema diverso di coordinate nel piano cartesiano.

1.1.2 Coordinate polari e forma trigonometrica dei numeri complessi

Sia assegnato un piano π e si fissi su di esso un riferimento cartesiano ortonormale; quindi ogni elemento $P \in \pi$ può essere univocamente individuato mediante una coppia (x, y). Se il punto P non coincide con l'origine, esso può essere individuato in modo alternativo assegnando la sua distanza ρ dall'origine e l'arco di circonferenza unitaria θ compreso tra il semiasse positivo dell'asse reale e la semiretta uscente dall'origine e passante per P. Gli elementi ρ e θ così definiti vengono denominati *coordinate polari* del punto P. Il numero ρ viene denominato *modulo* (oppure *raggio vettore*) di P, mentre il numero θ viene denominato *argomento* (oppure *anomalia*) di P. Bisogna osservare che l'argomento non è individuato univocamente; infatti se θ è un argomento di P, ogni altro numero del tipo $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, è ancora un argomento di P. Tuttavia, esiste sicuramente uno ed un solo argomento θ di P che verifica le condizioni $-\pi < \theta \leq \pi$; tale argomento viene denominato *argomento principale* di P. Per quanto riguarda l'origine, essa è individuata univocamente dalla condizione $\rho = 0$; per convenzione, all'origine si può attribuire un argomento arbitrario. Se si conoscono le coordinate cartesiane (x, y) di un punto P diverso dall'origine, le coordinate polari ρ e θ di P si ottengono dalle formule

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho}\ , \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\rho}\ ; \end{cases} \tag{1.1.1}$$

in particolare, se $x = 0$, l'argomento principale è

$$\theta = \begin{cases} \pi/2\ , & \text{se } y > 0\ , \\ -\pi/2\ , & \text{se } y < 0\ ; \end{cases}$$

se invece $x \neq 0$, l'argomento principale è

$$\theta = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} \ , & \text{se } x > 0 \ , \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x} \ , & \text{se } x < 0, \ y \geq 0 \ , \\ -\pi + \arctan \dfrac{y}{x} \ , & \text{se } x < 0, \ y < 0 \ . \end{cases}$$

Viceversa, se sono note le coordinate polari (ρ, θ) di P, si possono ricavare facilmente le coordinate cartesiane di P ponendo

$$\begin{cases} x = \rho \ \cos\theta \ , \\ y = \rho \ \sin\theta \ , \end{cases}$$

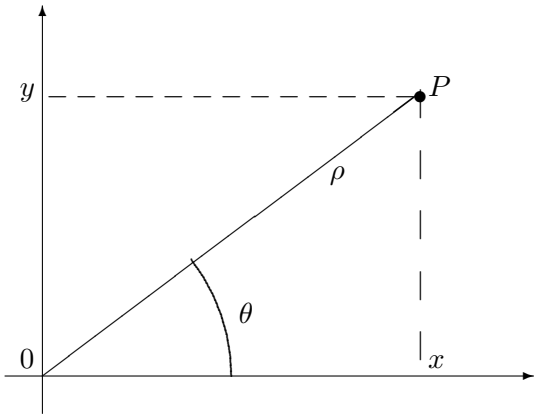


Figura 1.1: *Coordinate polari*

La forma trigonometrica di un numero complesso z si ottiene semplicemente considerando le coordinate polari del punto P corrispondente a z nel piano complesso.

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$; allora le coordinate polari di z si possono ottenere ponendo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e considerando θ soddisfacente le relazioni $\cos\theta = x/\rho$ e $\sin\theta = y/\rho$; pertanto, il numero z si potrà quindi scrivere nella forma

$$z = \rho(\cos\theta + i \ \sin\theta) \ ,$$

che viene appunto denominata *forma trigonometrica* di z. Ad esempio, $1 = \cos 0 + i \sin 0$, $-1 = \cos\pi + i \sin\pi$, $i = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$, $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$.

La forma trigonometrica di z non è univocamente determinata; gli argomenti di z sono del tipo $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e, in particolare, il numero 0 ha modulo 0 e argomento arbitrario. Tuttavia, l'argomento di un numero complesso diverso da 0 risulta univocamente determinato se si considera quello principale nell'intervallo $]-\pi, \pi]$.

▷ Si studiano a questo punto le operazioni algebriche in forma trigonometrica. Per le operazioni di somma e differenza di due numeri complessi conviene utilizzare soprattutto la forma algebrica o geometrica, mentre le operazioni di prodotto, reciproco, quoziente, potenza e radice si possono eseguire in modo molto semplice utilizzando la forma trigonometrica.

Siano, infatti, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ due numeri complessi. Poiché la forma algebrica di z e w è data da $z = (\rho\cos\theta) + i(\rho\sin\theta)$, $w = (\sigma\cos\varphi) + i(\sigma\sin\varphi)$ il prodotto $z \cdot w$ è dato da

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho \cdot \sigma((\cos\theta\ \cos\varphi - \sin\theta\ \sin\varphi) + i(\cos\theta\ \sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)) \\ &= \rho \cdot \sigma(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)) \ . \end{aligned}$$

Quindi il prodotto in forma trigonometrica di due numeri complessi z e w ha come modulo il prodotto dei moduli di z e di w e come argomento la somma degli argomenti di z e di w:

$$z \cdot w = \rho \cdot \sigma(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)) \ .$$

In generale, se θ e φ sono gli argomenti principali di z e rispettivamente di w, non è detto che $\theta+\varphi$ sia l'argomento principale di $z \cdot w$, ma potrebbe infatti essere necessario aggiungere o sottrarre 2π.

Sia ora $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ un numero complesso diverso da 0; si verifica facilmente che il reciproco di z è dato da

$$z^{-1} = \rho^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

Pertanto, il reciproco di un numero complesso diverso da 0 ha come modulo il reciproco del modulo di z e come argomento quello opposto dell'argomento di z.

Da tale regola, si ricava anche la regola sul quoziente di due numeri complessi. Infatti, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ con $w \neq 0$, allora

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \frac{\rho}{\sigma}(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)) \ .$$

Si conclude che il quoziente di z e w ha come modulo il quoziente dei moduli di z e di w e come argomento la differenza degli argomenti di z e di w

Come conseguenza della regola sul prodotto, si ottiene facilmente anche il calcolo delle potenze di un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Si ha infatti $z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$ e più in generale, procedendo per induzione, per ogni $n \geq 1$,

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \ .$$

La formula precedente viene denominata *formula di De Moivre*.

▷ Viene considerato infine, il calcolo delle radici n-esime ($n \geq 2$) di un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Una radice di z è definita come un numero complesso $w \in \mathbb{C}$ che verifica la proprietà $w^n = z$. Si riconosce in modo immediato che l'unica radice di 0 è il numero 0. Si supponga quindi che $z \neq 0$. Se si pone $w = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, si ricava $w^n = \sigma^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, e quindi, imponendo l'uguaglianza $w^n = z$,

$$\rho = \sigma^n \ , \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z};$$

quindi $\sigma = \sqrt[n]{\rho}$ e $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, con $k \in \mathbb{Z}$; si osserva a questo punto che, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, gli argomenti $\varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ non danno tutti luogo a numeri complessi distinti, in quanto, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi \ ;$$

quindi si possono considerare solo n argomenti distinti corrispondenti ai valori $k = 0, \ldots, n-1$ e tali argomenti forniscono tutte le possibili radici n-esime di z, che sono date quindi da:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \ , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

Quindi ogni numero complesso z diverso da 0 ammette esattamente n radici distinte, che si trovano tutte su una stessa circonferenza con centro nell'origine e raggio uguale alla radice n-esima del modulo di z e formano i vertici di un poligono regolare con n lati. Geometricamente, quindi, è sufficiente individuare uno dei vertici che ha argomento uguale alla n-esima parte dell'argomento di z.

Nella Figura seguente vengono rappresentati un esempio di radici quinte ed uno di radici terze di un numero complesso z.

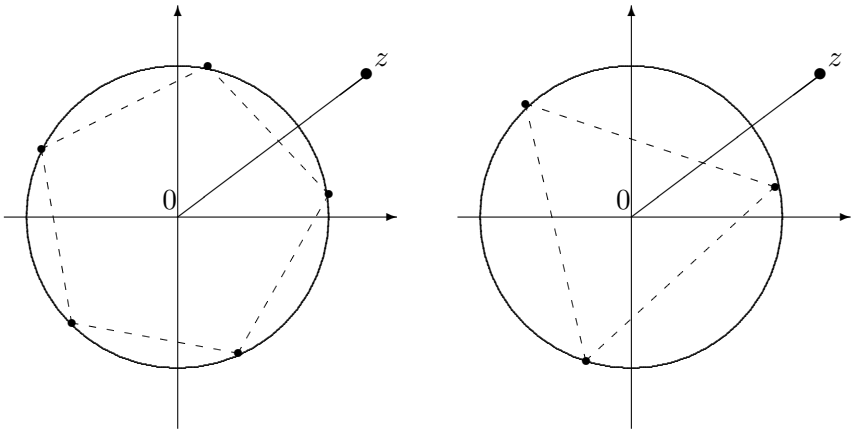


Figura 1.2: *Radici quinte e terze di un numero complesso z*

È facile constatare che le radici quadrate di un numero complesso sono l'una l'opposta dell'altra (in quanto i loro argomenti differiscono di π); in particolare, le due radici complesse di un numero reale positivo sono una reale positiva (che coincide con la radice quadrata aritmetica) e l'altra reale negativa (l'opposta della prima); se, invece, si considera un numero reale strettamente negativo, le due radici complesse saranno immaginarie pure l'una l'opposta dell'altra). Per quanto riguarda le radici terze complesse di un numero reale, si può osservare che esse sono una reale (coincidente con la radice terza aritmetica) e due tra loro complesse coniugate.

1.1.3 Proprietà metriche dell'insieme dei numeri complessi

A causa dell'interpretazione geometrica dell'insieme dei numeri complessi, la struttura metrica di $\mathbb{C}$ è quella di $\mathbb{R}^2$; tuttavia, per chiarire le nozioni che verranno utilizzate in seguito, si richiamano esplicitamente alcune nozioni metriche di $\mathbb{C}$.

▷ Innanzitutto, in $\mathbb{C}$ la *distanza* è definita ponendo,per ogni $z = a + ib$ e $w = c + id$,

$$d(z, w) := |z - w| \qquad \left(= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\right) \ .$$

Dalla nozione di distanza, si ricavano subito quelle di *sfera aperta* e di *sfera chiusa* di centro $z \in \mathbb{C}$ e raggio $r > 0$

$$B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid d(z, w) < r\} \ , \qquad B'_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid d(z, w) \leq r\} \ .$$

▷ Un sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$ viene denominato *limitato* se è contenuto in una sfera; conseguentemente, Ω sarà non limitato se, per ogni $r > 0$, esiste almeno un elemento $z \in \Omega$ tale che $|z| > r$.

▷ Si dice che $z \in \mathbb{C}$ è *interno* ad un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{C}$ se esiste una sfera di centro z contenuta in Ω, cioè se

$$\exists \ r > 0 \ t.c. \ B_r(z) \subset \Omega \ .$$

Un sottoinsieme U di $\mathbb{C}$ viene denominato *intorno di* $z \in \mathbb{C}$ se z è interno ad U. L'*insieme degli intorni* di un punto fissato $z \in \mathbb{C}$ viene denotato con $\mathcal{I}(z)$.

Inoltre, un sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$ si dice *aperto* se ogni suo punto è interno o, equivalentemente, se Ω è un intorno di ogni suo punto, cioè se

$$\forall \ z \in \Omega \ \exists \ r > 0 \ t.c. \ B_r(z) \subset \Omega \ .$$

Considerato un qualsiasi sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$, si può definire l'*interno* $\overset{\circ}{\Omega}$ di Ω come l'insieme dei punti interni di Ω:

$$\overset{\circ}{\Omega} := \{z \in \Omega \mid \exists \ r > 0 \ t.c. \ B_r(z) \subset \Omega\} \ .$$

Si verificano facilmente le seguenti proprietà dell'interno di un sottoinsieme.

1. $\overset{\circ}{\Omega} \subset \Omega$;
2. $\overset{\circ}{\Omega}$ è un insieme aperto;
3. $\overset{\circ}{\Omega}$ è il più grande (per inclusione) degli insiemi aperti contenuti in Ω, cioè è l'unione degli insiemi aperti contenuti in Ω;
4. Ω è aperto se e solo se coincide con il suo interno $\overset{\circ}{\Omega}$.

▷ Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{C}$ si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto e quindi se

$$z \in \mathbb{C} \setminus A \;\Rightarrow\; \exists\, r > 0 \text{ t.c. } B_r(z) \cap A = \emptyset \,.$$

Un punto $z \in \mathbb{C}$ si dice di *accumulazione* per A se verifica la condizione seguente

$$\forall\, r > 0 \;:\; A \cap B_r(z) \setminus \{z\} \neq \emptyset \,.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di un sottoinsieme A di $\mathbb{C}$ viene denominato *derivato* di A e denotato con $D(A)$.

Gli elementi di A che non sono di accumulazione per A vengono denominati *punti isolati* di A. L'insieme dei punti isolati di A viene denotato con $I(A)$.

Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{C}$, la chiusura $\overline{A}$ di A si definisce come segue

$$\overline{A} := D(A) \cup I(A) \qquad (= A \cup D(A)) \,.$$

Si può riconoscere che la chiusura di un sottoinsieme coincide con il complementare dell'interno del suo complementare:

$$\overline{A} = \mathbb{C} \setminus (\overbrace{\mathbb{C} \setminus A}^{\circ}) \,.$$

Conseguentemente valgono le seguenti proprietà della chiusura di un sottoinsieme.

1. $A \subset \overline{A}$;
2. $\overline{A}$ è un insieme chiuso;
3. $\overline{A}$ è il più piccolo (per inclusione) degli insiemi chiusi contenenti A, cioè è l'intersezione degli insiemi chiusi contenenti A;
4. A è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura $\overline{A}$.

▷ Infine, si definisce *frontiera* di un sottoinsieme A di $\mathbb{C}$, il seguente sottoinsieme

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{C} \setminus A)} \,.$$

All'insieme $\mathbb{C}$ viene aggiunto un solo punto all'infinito ∞ i cui intorni sono dati dagli insiemi che contengono il complementare di una sfera o, equivalentemente, i complementari degli insiemi limitati.

Capitolo 2

Funzioni complesse di variabile complessa

L'obiettivo del presente capitolo è quello di studiare le funzioni definite in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$ ed a valori in $\mathbb{C}$ (denominate *funzioni complesse di variabile complessa*), privilegiando gli aspetti che non presentano una completa analogia con il caso delle funzioni reali di variabile reale.

In tutto il seguito verranno prese quindi in considerazione funzioni $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dove Ω è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{C}$.

Si osserva che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, posto $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ e $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$, si ottiene $f = u + iv$ e quindi assegnare una funzione complessa in Ω equivale ad assegnarne due reali in Ω. Se poi si riguarda Ω come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, le funzioni u e v possono essere considerate come funzioni reali di due variabili reali:

$$\forall\ z = (x, y) \in \Omega\ :\qquad u(x, y) := \operatorname{Re} f(z)\ ,\quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(z)\ .$$

2.1 Limiti e continuità in $\mathbb{C}$

Tali nozioni vengono trattate in maniera molto rapida in quanto sono completamente analoghe al caso reale.

▷ Siano Ω un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ è un punto di accumulazione per Ω e se $\ell \in \mathbb{C}$, si dice che ℓ è il *limite di* f in z_0 se

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \textit{t.c.}\ \forall\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}\ :\ |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - \ell| < \varepsilon\ .$$

In tal caso, si scrive $\ell = \lim_{z \to z_0} f(z)$.

▷ Se Ω non è limitato, si può considerare il limite di f nel punto ∞; $\ell \in \mathbb{C}$ si dice *limite di* f in ∞ se

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ r > 0\ \textit{t.c.}\ \forall\ z \in \Omega\ :\ |z| > r\ \Rightarrow\ |f(z) - \ell| < \varepsilon\ .$$

In tal caso, si scrive $\ell = \lim_{|z|\to+\infty} f(z)$.

Si riconosce facilmente che, posto $f = u + iv$, $z_0 = (x_0, y_0)$ ed $\ell = s + it$, risulta

$$\ell = \lim_{z\to z_0} f(z) \iff s = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)\ , \quad t = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)\ .$$

Pertanto, lo studio di un limite di complesso equivale allo studio di due limiti reali. Le proprietà dei limiti (unicità, operazioni sui limiti e forme indeterminate) derivano dalla equivalenza precedente.

Esempi 2.1.1 1. Si consideri il seguente limite

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{z+\overline{z}}\ .$$

Da quanto detto e tenendo presente che

$$\frac{z^2}{z+\overline{z}} = \frac{x^2-y^2}{2x} + iy\ ,$$

lo studio del limite precedente è equivalente a quello dei seguenti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{2x}\ , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ ,$$

e pertanto è uguale a $0 = 0 + i\cdot 0$. Allo stesso risultato si perviene più direttamente usando le coordinate polari

$$\lim_{z\to 0} \frac{\rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}{2\rho\cos\theta}\ .$$

2. Si consideri il seguente limite

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}\ .$$

Si riconosce facilmente che, per ogni z reale e diverso da 0, si ha $\overline{z}/z = z/z = 1$, mentre, per ogni z immaginario puro e diverso da 0, si ha $\overline{z}/z = -z/z = -1$; pertanto in ogni intorno di 0, la funzione in esame assume i valori 1 e -1 e quindi non può tendere verso alcun limite.

▷ Si conclude la presente sezione con la nozione di continuità.
Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$, si dice che f è *continua in* z_0 se

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ t.c.\ \forall\ z \in \Omega\ :\ |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\ .$$

La condizione precedente è ovviamente soddisfatta se z_0 è un punto isolato di Ω, mentre è equivalente alla condizione

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

se z_0 è un punto di accumulazione per Ω.

Come per le funzioni reali, f si dice *continua in un sottoinsieme* $A \subset \Omega$ se è continua in ogni $z_0 \in A$ ed f si dice *continua* se è continua in Ω.

2.2 Funzioni olomorfe

A differenza delle nozioni precedenti, quella di funzione derivabile presenta diverse proprietà che non valgono nel caso reale e sulle quali conviene pertanto soffermarsi.

▷ Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Se $z_0 \in \Omega$, si dice che f è *derivabile in* z_0 se il seguente limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad \left(\text{equivalentemente, } \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right), \quad (2.2.1)$$

esiste ed è finito in $\mathbb{C}$.

In tal caso, si pone

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} .$$

Come per le funzioni reali, la derivata $f'(z_0)$ può essere denotata anche con uno dei seguenti simboli

$$Df(z_0) , \qquad \frac{df}{dz}(z_0) , \qquad (Df(z))_{z=z_0} , \qquad \left(\frac{df}{dz}(z)\right)_{z=z_0} .$$

Una funzione derivabile in ogni punto di un sottoinsieme A di Ω viene denominata *olomorfa in* A.

Infine, f si dice *olomorfa* se è olomorfa in Ω.

Osservazione 2.2.1 Utilizzando i noti simboli di Landau,[1] si riconosce facilmente che la derivabilità di f in z_0 equivale all'esistenza di $\ell \in \mathbb{C}$ tale che

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \ell\, h + o(h) \qquad \text{in } z_0$$

ed in tal caso si ha $\ell = f'(z_0)$.

[1] Si ricorda che la scrittura $g(x) = o(h(x))$ in x_0 indica che il rapporto $g(x)/h(x)$ tende a 0 in x_0, mentre la scrittura $g(x) = O(h(x))$ in x_0 indica che lo stesso rapporto è limitato in un intorno di x_0.

Infatti, se f è derivabile in z_0, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)\,h}{h} = 0\ ,$$

da cui $f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)\,h = o(h)$ e quindi anche $\ell = f'(z_0)$. Viceversa, se $f(z_0+h) = f(z_0) + \ell\,h + o(h)$ in z_0, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \ell$$

e quindi f è derivabile in z_0 con $\ell = f'(z_0)$.

▷ Dalla osservazione precedente, si ricava immediatamente che, se f è derivabile in z_0, allora f è anche continua in z_0.

▷ Poiché la definizione di derivabilità si avvale dello stesso limite considerato nel caso reale, per tale nozione continuano a valere le regole di derivazione già note nel caso reale. In particolare, valgono le seguenti proprietà.

1. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$, allora $f + g$ è derivabile in z_0 e si ha
$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)\ .$$

2. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$, allora $f \cdot g$ è derivabile in z_0 e si ha
$$(f\cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\,g(z_0) + f(z_0)\,g'(z_0)\ .$$

3. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$ e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora $1/f$ è derivabile in z_0 e si ha
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}\ .$$

4. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$ e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora f/g è derivabile in z_0 e si ha
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\,g(z_0) - f(z_0)\,g'(z_0)}{g(z_0)^2}\ .$$

5. Se $\Omega, \Gamma \subset \mathbb{C}$ e se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$ e $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ è derivabile in $w_0 := f(z_0)$, allora la funzione composta $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $(g\circ f)(z) = g(f(z))$ è derivabile in z_0 e si ha
$$(g\circ f)'(z_0) = g'(w_0)\cdot f'(z_0)\ .$$

6. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione ingettiva e si supponga che sia derivabile in $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$. Posto $\Gamma = f(\Omega)$, si consideri la funzione inversa $f^{-1} : \Gamma \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $w \in \Gamma$, $f^{-1}(w) = z$ con $z \in \Omega$ tale che $f(z) = w$. Se f^{-1} è continua in $w_0 := f(z_0)$, allora f^{-1} è anche derivabile in w_0 e si ha

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \, .$$

Esempi 2.2.2 1. Si consideri la funzione potenza $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$; se $z_0 \neq 0$, risulta

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} \\ &= z_0^n \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\dfrac{h}{z_0}\right)^n - 1}{h} \\ &= z_0^{n-1} \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\dfrac{h}{z_0}\right)^n - 1}{h/z_0} = n z_0^{n-1} \end{aligned}$$

e quindi f è derivabile in z_0. Se $z_0 = 0$, si ha inoltre

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^n}{h} = \begin{cases} 1 \, , & n = 1 \, , \\ 0 \, , & n \geq 2 \, , \end{cases}$$

e quindi f è derivabile anche in 0.

Dunque z^n è olomorfa e $Dz^n = nz^{n-1}$.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{Re} z$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z_0+h) - \operatorname{Re} z_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste in quanto per $h \neq 0$ reale si ha $\operatorname{Re} h/h = 1$ mentre per h immaginario puro si ha $\operatorname{Re} h/h = 0$.

Quindi f non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{C}$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z_0+h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste come si è visto nell'Esempio 2.1.1, 2.

Quindi f non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{C}$.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = |z|$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|z_0+h| - |z_0|}{h} .$$

Si supponga in una prima fase $z_0 \neq 0$. Considerando $h = tz_0$, con $t \in \mathbb{R}$, si ottiene il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t+1)|z_0| - |z_0|}{tz_0} = \frac{|z_0|}{z_0} .$$

Considerando invece i numeri complessi h tali che $z_0 + h$ si trovi sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $|z_0|$ (per cui $|z_0 + h| = |z_0|$), si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{|z_0+h| - |z_0|}{h} = 0 .$$

Si può quindi concludere che il limite non esiste e quindi f non è derivabile in z_0.

Infine, se $z_0 = 0$, si ottiene il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

e anch'esso non esiste in quanto ad esempio, per h reale si ha $|h|/h = 1$ se $h > 0$ e $|h|/h = -1$ se $h < 0$.

Quindi f non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{C}$.

▷ Si studia a questo punto il primo importante risultato sulle funzioni derivabili. Come al solito, considerate le parti reali ed immaginarie di f, si scrive $f = u + iv$ con u, v funzioni reali di due variabili reali.

Teorema 2.2.3 (Teorema di Cauchy-Riemann) *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto in $\mathbb{C}$ ed $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa.*

Se $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, le seguenti proposizioni sono equivalenti

a) f è derivabile in z_0;

b) Le funzioni u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) ed inoltre

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) . \tag{2.2.2}$$

Inoltre, vera l'una e quindi ciascuna delle proposizioni equivalenti precedenti, risulta

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ .^2 \tag{2.2.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che f sia derivabile in z_0 e si ponga $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Per ogni $h = p + iq \neq 0$, risulta

$$f(z_0{+}h) = u(x_0{+}p, y_0{+}q){+}i\,v(x_0{+}p, y_0{+}q)\ , \quad f(z_0) = u(x_0, y_0){+}i\,v(x_0, y_0)$$

e inoltre

$$f'(z_0)h = (\alpha + i\beta)(p + iq) = (\alpha p - \beta q) + i(\alpha q + \beta p)$$

e quindi, dall'Osservazione 2.2.1,

$$\begin{aligned} &u(x_0 + p, y_0 + q) + i\,v(x_0 + p, y_0 + q) \\ &\quad = u(x_0, y_0) + i\,v(x_0, y_0) + (\alpha p - \beta q) + i(\alpha q + \beta p) + o(h)\ . \end{aligned}$$

Separando le parti reali e immaginarie si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} u(x_0 + p, y_0 + q) = u(x_0, y_0) + \alpha p - \beta q + o(\sqrt{p^2 + q^2})\ , \\ v(x_0 + p, y_0 + q) = v(x_0, y_0) + \alpha q + \beta p + o(\sqrt{p^2 + q^2})\ , \end{cases}$$

dove si è potuto considerare $o(\sqrt{p^2 + q^2})$ al posto di $o(h)$ in quanto il rapporto $\sqrt{p^2 + q^2}/h = |h|/h$ è limitato.

Dalle equazioni precedenti si ricava

$$\lim_{(p,q)\to(0,0)} \frac{u(x_0 + p, y_0 + q) - u(x_0, y_0) - \alpha p + \beta q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0\ ,$$

$$\lim_{(p,q)\to(0,0)} \frac{v(x_0 + p, y_0 + q) - v(x_0, y_0) - \beta p - \alpha q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0\ ,$$

e quindi u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e inoltre

$$du(x_0, y_0)(p, q) = \alpha p - \beta q\ , \qquad dv(x_0, y_0)(p, q) = \beta p + \alpha q\ .$$

Pertanto

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = du(x_0, y_0)(1, 0) = \alpha\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = du(x_0, y_0)(0, 1) = -\beta\ ,$$

[2] Se u e v sono derivabili parzialmente rispetto ad x ed y in (x_0, y_0), si pone per convenzione,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\ .$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = dv(x_0, y_0)(1, 0) = \beta \ , \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = dv(x_0, y_0)(0, 1) = \alpha \ ,$$

da cui seguono anche le (2.2.2) e (2.2.3).

Il viceversa si può dimostrare ripercorrendo a ritroso la dimostrazione già svolta. □

Le condizioni (2.2.2) vengono denominate *equazioni di Cauchy-Riemann.*

Corollario 2.2.4 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e tale che $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, posto $f = u + iv$, risulta $v = 0$ e inoltre, dalle equazioni di Cauchy-Riemann (2.2.2), $\partial u/\partial x = 0$, $\partial u/\partial y = 0$. Quindi u, e conseguentemente f, è costante. □

Dal Corollario 2.2.4 precedente si ottiene subito che le funzioni considerate negli Esempi 2.2.2, 2. e 4., non possono essere olomorfe, altrimenti dovrebbero essere costanti.

Si osservi che il corollario precedente rimane valido se si suppone che $f = u + ci$ con $c \in \mathbb{R}$ costante fissata.

Osservazione 2.2.5 Si dimostrerà in seguito che se f è olomorfa, le funzioni u e v sono derivabili parzialmente infinite volte. Da ciò e dalle equazioni di Cauchy-Riemann, segue allora facilmente che u e v sono funzioni *armoniche*, cioè verificano le condizioni

$$\Delta u = 0 \ , \quad \Delta v = 0 \ .^3$$

Infatti, per ogni $(x, y) \in \Omega$, dalle equazioni di Cauchy-Riemann (2.2.2), si ha

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x, y) = 0 \ .$$

2.3 Serie di potenze in campo complesso

2.3.1 Richiami sulle successioni e serie di funzioni

Si richiamano brevemente alcune nozioni fondamentali relative alle successioni ed alle serie di funzioni.

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un insieme Ω (non necessariamente sottoinsieme di $\mathbb{C}$) ed a valori in $\mathbb{C}$. Si dice che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *puntualmente convergente* (oppure *semplicemente convergente*) se, per ogni $z_0 \in \Omega$, esiste in $\mathbb{C}$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z_0) \quad \in \mathbb{C} \ .$$

[3] Si ricorda che il *Laplaciano* Δu di una funzione $u \in C^2(\Omega)$ è definito ponendo, per ogni $(x, y) \in \Omega$,

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \ .$$

In tal caso, si può definire la funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $z_0 \in \Omega$,

$$f(z_0) := \lim_{n \to +\infty} f_n(z_0)$$

e si dice anche che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge puntualmente* (oppure *semplicemente*) verso f. Quindi

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n \quad \text{puntualmente}$$

se e solo se

$$\forall\, z \in \Omega\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu : \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\ .$$

La condizione di *convergenza uniforme* della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ viene imposta richiedendo che nella condizione precedente si possa determinare il numero naturale ν indipendentemente da $z \in \Omega$ (quindi ν dipende solamente da ε). Pertanto, si dice che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformemente* verso f e si scrive

$$f = \lim_{n \to +\infty} f_n \quad \text{uniformemente}$$

se è verificata la condizione seguente

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu\ \forall\, z \in \Omega : \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\ .$$

Per quanto riguarda le serie di funzioni in campo complesso, si introducono nozioni analoghe, riferendosi alla successione delle somme parziali delle funzioni assegnate.

Precisamente, assegnare una serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

vuol dire assegnare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, una funzione $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ e studiare la successione delle somme parziali $s_n : \Omega \to \mathbb{C}$ definite ponendo, per ogni $z \in \Omega$,

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\ .$$

Pertanto, si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge puntualmente* (oppure *semplicemente*) verso un'ulteriore funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e si scrive

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{puntualmente}$$

se è verificata la condizione seguente

$$\forall\, z \in \Omega\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu : \ \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon\ .$$

Infine, si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente* verso f e si scrive

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{uniformemente}$$

se è verificata la condizione seguente

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \forall\, n \geq \nu\ \forall\, z \in \Omega : \ \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon\ .$$

2.3.2 Serie di potenze

La teoria delle serie di potenze in campo complesso generalizza in maniera naturale quella nota nel caso reale. Nella presente sezione si richiamano alcune definizioni e risultati utili per il seguito.

▷ Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi. La serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.3.1}$$

viene denominata *serie di potenze* di *centro* z_0 e con *coefficienti* a_n, $n \in \mathbb{N}$.

Il raggio di convergenza della serie (2.3.1) si definisce al modo seguente

$$R = \sup \left\{ \rho \in [0, +\infty[\mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \text{ è convergente} \right\} .$$

Valgono le seguenti proprietà del raggio di convergenza.

1. Se $R = 0$, la serie (2.3.1) converge solamente nel centro z_0;
2. Se $R = +\infty$, la serie (2.3.1) converge in ogni $z \in \mathbb{C}$;
3. Se $R \in]0, +\infty[$, la serie (2.3.1) converge in $B_R(z_0)$ e non converge in $\mathbb{C} \setminus B'_r(z_0)$; per i punti della circonferenza $\partial B_R(z_0)$ non si può dire nulla in generale.

Il raggio di convergenza può essere calcolato utilizzando uno dei seguenti metodi.

1. *Metodo di d'Alembert o della radice.* Se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty]$, allora $R = 1/\ell$.[4] Più precisamente, si ha sempre $R = 1/\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
2. *Metodo di Cauchy o del rapporto.* Se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} |a_n|/|a_{n+1}|$, allora R coincide con tale limite.

▷ Assegnata la serie (2.3.1), la nuova serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \tag{2.3.2}$$

viene denominata *serie ottenuta per derivazione* dalla serie (2.3.1).

Si verifica facilmente che, denotato con R' il raggio di convergenza della serie (2.3.2) e con R quello della serie (2.3.1), risulta $R' = R$.

[4] Per convenzione, si pone in questo caso $R = 0$ se $\ell = +\infty$ e $R = +\infty$ se $\ell = 0$.

Infatti, tenendo presente che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n/n} = e^0 = 1 \,,$$

si ha

$$R' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \ \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R \,.$$

2.4 Funzioni elementari complesse

Nella presente sezione vengono presentate le definizioni di alcune funzioni elementari complesse. Si rimanda lo studio delle proprietà relative di ogni funzione al momento in cui queste interverranno nel seguito.

▷ La funzione potenza n-esima $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$f_n(z) := z^n \,. \tag{2.4.1}$$

Quindi, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, si ha $f_n(z) = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ e da ciò si ricavano facilmente le proprietà geometriche della funzione potenza n-esima. In particolare, si osserva che la funzione potenza n-esima non è ingettiva per $n \geq 2$. Infatti, per ogni $z \neq 0 \in \mathbb{C}$, vi sono esattamente n radici distinte di z^n e quindi vi sono n numeri complesi distinti in cui la funzione potenza assume lo stesso valore z^n.

▷ La funzione esponenziale $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \,. \tag{2.4.2}$$

Dalla seguente *equazione di Eulero*

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n y^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos y + i\sin y \,, \end{aligned}$$

si ricava, in definitiva,

$$e^z = e^x e^{iy} = e^{x+iy} \,.$$

Si mette in evidenza il fatto che $e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ (infatti $0 \neq e = e^{1-z}e^z$ e quindi e^{1-z} e e^z sono entrambi non nulli) e inoltre la funzione exp è periodica di periodo $2\pi i$ (infatti, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z \,).$$

In particolare, la funzione esponenziale non è ingettiva, mentre lo sono le sue restrizioni ad ogni sottoinsieme di $\mathbb{C}$ del tipo

$$D_\alpha := \mathbb{R} + i \cdot [\alpha, \alpha + 2\pi[\quad (= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in [\alpha, \alpha + 2\pi[\}).$$

Per quanto riguarda la derivabilità della funzione esponenziale, si osserva che in questo caso le parti reali ed immaginarie sono date da

$$u(x, y) = e^x \cos y \ , \qquad v(x, y) = e^x \sin y \ ,$$

e quindi u e v sono differenziabili e verificano le condizioni di Cauchy-Riemann; infatti, per ogni $(x, y) \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y \ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y \ , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y \ .$$

Dal Teorema di Cauchy-Riemann 2.2.3, si ottiene che exp è olomorfa e inoltre, per ogni $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$De^z = \frac{\partial \exp}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z \ .$$

▷ Si definiscono in maniera analoga le seguenti ulteriori funzioni, per le quali ci si limita a riportare la definizione lasciando per esercizio la verifica della validità delle condizioni di Cauchy-Riemann.

a) La funzione *coseno iperbolico* $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ . \tag{2.4.3}$$

Si verifica facilmente che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\cosh z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ .$$

b) La funzione *seno iperbolico* $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ . \tag{2.4.4}$$

Si verifica facilmente che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\sinh z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

c) La funzione *coseno* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ . \tag{2.4.5}$$

Si verifica facilmente che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ .$$

d) La funzione *seno* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ . \tag{2.4.6}$$

Si verifica facilmente che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

▷ Si è osservato in precedenza che le funzioni elementari sopra introdotte non sono ingettive e pertanto di esse non può essere considerata la funzione inversa, almeno al solito modo. Per poter definire le funzioni inverse delle funzioni elementari è pertanto necessario introdurre le *funzioni polidrome*, che sono definite in sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ ed assumono in ogni punto un insieme non vuoto di valori in $\mathbb{C}$, che almeno in un punto è costituito da almeno due elementi. Le funzioni polidrome sono assegnate in contrapposizione alle *funzioni monodrome* finora considerate, che in ogni punto assumono uno ed un solo valore. Assegnata una funzione polidroma $f : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$, si dice *determinazione* di f ogni funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tale che, per ogni $z \in \Omega$, $g(z) \in f(z)$.

Le funzioni polidrome vengono introdotte per poter opportunamente invertire le funzioni elementari.

▷ Se $n \geq 2$, si definisce funzione *radice* n-esima, la funzione polidroma $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definita ponendo, per ogni $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$,

$$\sqrt[n]{z} := \begin{cases} 0 \ , & \text{se } z = 0 \ , \\ \left\{ \sqrt[n]{\rho}\ e^{(\theta+2k\pi)/n} \mid k = 0, \dots, n-1 \right\} \ , & \text{se } z \neq 0 \ , \end{cases} \tag{2.4.7}$$

▷ Se $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, l'*insieme degli argomenti* di z viene denotato con $\arg z$; dunque

$$\arg z := \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Inoltre, l'*argomento principale* di z verrà denotato con $\operatorname{Arg} z$; quindi $\operatorname{Arg} z$ è l'unico elemento di $\arg z$ tale che

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi \ .$$

Premesso ciò, la funzione *logaritmo* in campo complesso è la funzione polidroma $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definita ponendo, per ogni $z = \rho\, e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\log z := \log |z| + i \arg z \quad (= \{\log \rho + i(\theta + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}\ ). \tag{2.4.8}$$

La determinazione $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z = \rho\, e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\operatorname{Log} z := \log \rho + i \operatorname{Arg} z \tag{2.4.9}$$

viene denominata funzione *logaritmo principale*.

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si può definire la determinazione $\log_{(\alpha)} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\log_{(\alpha)} z = \log |z| + i\theta$$

con $\theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$. Tale funzione non è continua sulla semiretta $r_\alpha := \{\rho e^{i\alpha} \mid \rho > 0\}$ e quindi in tale insieme non può essere olomorfa.

Precisamente, considerato $\rho > 0$, si riconosce che la funzione $\log_{(\alpha)}$ non è continua nel punto $\rho e^{i\alpha}$ di r_α; infatti, considerati i numeri complessi $\rho e^{i\beta}$ con $\beta \in]\alpha - 2\pi, \alpha + 2\pi[$ e tenendo presente la definizione di $\log_{(\alpha)}$, risulta

$$\log_{(\alpha)}(\rho e^{i\beta}) = \begin{cases} \log \rho + i\beta \ , & \beta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[\ , \\ \log \rho + i(\beta + 2\pi) \ , & \beta \in]\alpha - 2\pi, \alpha[\end{cases}$$

(se $\beta \in]\alpha - 2\pi, \alpha[$, nel calcolo di $\log_{(\alpha)}(\rho e^{i\beta})$ bisogna aggiungere 2π per ottenere un argomento nell'intervallo $[\alpha, \alpha + 2\pi[$).

Da quanto sopra segue

$$\lim_{\beta \to \alpha^+} \log_{(\alpha)}(\rho e^{i\beta}) = \log \rho + i\alpha \ , \qquad \lim_{\beta \to \alpha^-} \log_{(\alpha)}(\rho e^{i\beta}) = \log \rho + i(\alpha + 2\pi) \ ,$$

e quindi $\log_{(\alpha)}$ non è continua in $\rho e^{i\alpha}$.

Pertanto la discontinuità dipende dal fatto che l'argomento deve essere sempre scelto nell'intervallo $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ e quindi bisogna considerare un salto di $2\pi i$ quando si passa da argomenti minori di α ad argomenti maggiori di α.)

Nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \bar{r}_\alpha$, la funzione $\log_{(\alpha)}$ è invece olomorfa.

Naturalmente, per quanto riguarda la funzione logaritmo principale, si conclude analogamente che essa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \bar{r}_\pi$ mentre nei punti della semiretta r_π, la funzione Log non è continua.

▷ La definizione della funzione logaritmo consente di definire in modo naturale anche la *potenza ad esponente complesso* di un numero complesso $z \neq 0$; per ogni $w \in \mathbb{C}$ si pone infatti

$$z^w = e^{w \cdot \log z} \ . \tag{2.4.10}$$

La *potenza principale* è ovviamente definita ponendo

$$z^w = e^{w \cdot \mathrm{Log}\, z} \ . \tag{2.4.11}$$

2.5 Cammini ed integrali curvilinei

Una funzione continua $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ viene denominata *curva di Jordan*. Quindi assegnare una curva di Jordan è equivalente ad assegnare due funzioni continue $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ e $y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\gamma(t) = x(t) + i\, y(t)$$

(dunque $x(t) := \mathrm{Re}\, \gamma(t)$ e $y(t) := \mathrm{Im}\, \gamma(t)$).

Il *supporto* di γ è definito come l'insieme dei valori di γ e viene denotato con γ^*; dunque

$$\gamma^* := \gamma([\alpha, \beta]) \ . \tag{2.5.1}$$

Una curva di Jordan viene denominata *semplice* se la sua restrizione a $[\alpha, \beta[$ è ingettiva.

Inoltre, una curva di Jordan viene denominata *chiusa* se $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

▷ Una curva di Jordan viene denominata *regolare* se è derivabile con derivata continua e inoltre $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$ (quindi, le funzioni x ed y sono derivabili e con derivate continue e mai contemporaneamente nulle).

Per le curve regolari si può definire la nozione di *lunghezza* ponendo

$$\ell(\gamma) := \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt \qquad \left(= \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\right) . \tag{2.5.2}$$

▷ A questo punto si può dare la definizione di cammino, sulla quale ci si soffermerà con lo studio di diverse proprietà.

Una curva di Jordan $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ viene denominata *cammino* se è regolare a tratti, cioè se esiste una suddivisione $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ di elementi di $[\alpha, \beta]$ tale che, per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, la restrizione $\gamma_{|[\alpha_i, \alpha_{i+1}]}$ è regolare.[5]

Anche per i cammini si può considerare la nozione di lunghezza definita dalla (2.5.2) (in quanto la funzione integranda è continua a tratti).

Un cammino chiuso viene spesso denominato anche *circuito*.

[5] Si ricorda che una suddivisione $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ dell'intervallo $[\alpha, \beta]$ è un insieme di punti di $[\alpha, \beta]$ tali che $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ e, per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, si abbia $\alpha_i < \alpha_{i+1}$.

▷ Un esempio molto semplice di cammino che verrà utilizzato frequentemente nel seguito è costituito dalla *circonferenza* $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *di raggio* $r > 0$ definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_r(t) := r\, e^{it} .$$

In questo caso si ha $x(t) := r \cos t$ e $y(t) := r \sin t$; si tratta ovviamente di un cammino semplice e chiuso la cui lunghezza è data da

$$\ell(\gamma_r) = \int_0^{2\pi} |r\, i\, e^{it}|\, dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r .$$

Se $z_0 \in \mathbb{C}$, la *circonferenza* $\gamma_{z_0,r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *di centro* z_0 *e raggio* $r > 0$ si può definire ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_{z_0,r} := z_0 + r\, e^{it} .$$

La lunghezza rimane ovviamente invariata.

▷ Si considerino ora un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ ed una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Se $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ è un cammino con supporto contenuto in Ω ($\gamma^* \subset \Omega$), si definisce integrale curvilineo di f lungo γ, il seguente numero complesso

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt . \tag{2.5.3}$$

▷ Si enunciano a questo punto alcune semplici proprietà degli integrali curvilinei lungo un cammino.

1. *(Proprietà di linearità degli integrali curvilinei)* Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funzioni continue e sia $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un cammino tale che $\gamma^* \subset \Omega$. Allora
$$\int_\gamma (f + g)(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz .$$
Inoltre, se $c \in \mathbb{C}$,
$$\int_\gamma (cf)(z)\, dz = c \int_\gamma f(z)\, dz .$$

2. *(Teorema della media)* Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un cammino tale che $\gamma^* \subset \Omega$. Allora
$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \le \max_{z \in \gamma^*} |f(z)|\ \ell(\gamma) . \tag{2.5.4}$$
Infatti,
$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| &= \left| \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \right| \le \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt \\ &\le \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt = \max_{z \in \gamma^*} |f(z)|\ \ell(\gamma) . \end{aligned}$$

3. *(Proprietà di decomposizione degli integrali curvilinei)* Si definisce innanzitutto il *cammino unione* (denominato spesso anche *cammino somma*) di due cammini. Siano $\gamma_1 : [\alpha, \beta_1] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [\beta_1, \beta] \to \mathbb{C}$ due cammini tali che $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\beta_1)$.[6]

   Allora, si verifica facilmente che la curva $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $t \in [\alpha, \beta]$,

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) , & \text{se } t \in [\alpha, \beta_1] , \\ \gamma_2(t) , & \text{se } t \in]\beta_1, \beta] , \end{cases}$$

   è a sua volta un cammino, il quale viene appunto denominato unione dei cammini γ_1 e γ_2 (talvolta viene anche denotato con $\gamma_1 \oplus \gamma_2$).

   Si osserva che se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e se $\gamma_1^* \subset \Omega$ e $\gamma_2^* \subset \Omega$, allora anche $(\gamma_1 \cup \gamma_2)^* \subset \Omega$.

   Se inoltre $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, vale ovviamente la seguente proprietà

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz .$$

4. *(Integrale curvilineo sul cammino opposto)* Si consideri un cammino $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Si definisce *cammino opposto* a γ il cammino $\gamma^o : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ definito ponendo, per ogni $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\gamma^o(t) := \gamma(\alpha + \beta - t) .$$

   Si verifica facilmente che $(\gamma^o)^* = \gamma^*$ e inoltre $\gamma^o(\alpha) = \gamma(\beta)$ mentre $\gamma^o(\beta) = \gamma(\alpha)$.

   Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ tale che $\gamma^* \subset \Omega$ e se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, si ha

$$\int_{\gamma^o} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz .$$

   Quindi l'integrale curvilineo di una funzione dipende dal verso di percorrenza della curva.

[6] Non è restrittivo supporre che l'estremo destro dell'intervallo base di γ_1 coincida con l'estremo sinistro dell'intervallo base di γ_2; infatti, se $\gamma_3 : [\beta_2, \beta_3] \to \mathbb{C}$ è un cammino, si può traslare l'intervallo base e considerare il nuovo cammino $\gamma_2 : [\beta_1, \beta] \to \mathbb{C}$ dove $\beta = \beta_1 + \beta_3 - \beta_2$ e, per ogni $t \in [\beta_1, \beta]$, si pone $\gamma_2(t) := \gamma_3(\beta_2 + t - \beta_1)$. Si verifica allora che γ_2 e γ_3 hanno lo stesso supporto e che l'integrale di una funzione lungo γ_2 coincide con l'integrale della stessa funzione lungo γ_3.

Infatti

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^o} f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta f(\gamma^o(t))\,(\gamma^o)'(t)\,dt \\ &= -\int_\alpha^\beta f(\gamma(\alpha+\beta-t))\,\gamma'(\alpha+\beta-t)\,dt \\ &= \int_\beta^\alpha f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = -\int_\alpha^\beta f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds \\ &= -\int_\gamma f(z)\,dz\ ,\end{aligned}$$

dove si posto $s = \alpha + \beta - t$ e si è tenuto presente che in α e β tale cambiamento di variabili assume i valori β e rispettivamente α.

▷ Ad esempio, si consideri la circonferenza γ_r di centro 0 e raggio $r > 0$; allora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} z^n\,dz &= \int_0^{2\pi} r^n\,e^{int}\,r\,i\,e^{it}\,dt = i\,r^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt \\ &= r^{n+1}\,i\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1}\,(e^{2\pi(n+1)i} - e^0) = 0\ ,\end{aligned}$$

mentre

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\,e^{it}}\,r\,i\,e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\ . \tag{2.5.5}$$

Come ulteriore esempio, si consideri il circuito $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ costituito dalle curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ definite ponendo, per ogni $t \in [-1, 1]$,

$$\gamma_1(t) := t - i\ ,\quad \gamma_2(t) := 1 + it\ ,\quad \gamma_3(t) := i - t\ ,\quad \gamma_4(t) := -1 - it\ .$$

Dalle proprietà sopra elencate, considerando ancora la funzione $f(z) = 1/z$, risulta

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,dz &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\gamma_4} \frac{1}{z}\,dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{t-i}\,dt + \int_{-1}^1 \frac{i}{1+it}\,dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{i-t}\,dt - \int_{-1}^1 \frac{i}{-1-it}\,dt \\ &= 2\int_{-1}^1 \frac{1}{t-i}\,dt + 2\int_{-1}^1 \frac{i}{1+it}\,dt \\ &= 2\left([\mathrm{Log}\,(t-i)]_{-1}^1 + [\mathrm{Log}\,(1+it)]_{-1}^1\right) \\ &= 2\,(\mathrm{Log}\,(1-i) - \mathrm{Log}\,(-1-i) + \mathrm{Log}\,(1+i) - \mathrm{Log}\,(1-i)) \\ &= 2(-\mathrm{Log}\,(-1-i) + \mathrm{Log}\,(1+i)) \\ &= 2(-\log\sqrt{2} - i\,(-\frac{3}{4}\pi) + \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}) = 2\pi\,i\ .\end{aligned}$$

Come si è riconosciuto direttamente, l'integrale lungo il circuito γ coincide con quello precedentemente trovato lungo la circonferenza con centro nell'origine e raggio r. Ciò in realtà è conseguenza di proprietà più generali che saranno esaminate successivamente.

▷ Si concludono ora le proprietà generali degli integrali curvilinei con un importante risultato di cui tuttavia per brevità viene omessa la dimostrazione.

Teorema 2.5.1 (Teorema di Jordan) *Sia $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un cammino semplice e chiuso. Allora esiste uno ed un solo sottoinsieme aperto connesso e limitato Ω_γ di $\mathbb{C}$ tale che $\partial\Omega_\gamma = \gamma^*$.*

2.6 Funzioni analitiche

▷ Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Si dice che f è *analitica* se, per ogni $z_0 \in \Omega$, esistono $r > 0$ ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri complessi tali che, per ogni $z \in B_r(z_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \, .$$

Quindi una funzione è analitica se si può esprimere localmente come somma di una serie di potenze.

Esempio 2.6.1 La funzione $1/z$ è analitica in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Infatti, fissato $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha, per ogni $z \in B_{|z_0|}(z_0)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1}{z_0} \, \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{-z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-z_0)^n} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n \, , \end{aligned}$$

dove la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-z_0)^n} (z - z_0)^n$ converge in quanto dalla condizione $z \in B_{|z_0|}(z_0)$ segue $|z - z_0|/|z_0| < 1$.

Per le funzioni analitiche si dimostra agevolmente il seguente risultato.

Teorema 2.6.2 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora f è olomorfa ed inoltre la sua derivata f' è anch'essa una funzione analitica.*

DIMOSTRAZIONE. Si fissi $z_0 \in \Omega$ e siano $r_0 > 0$ ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri complessi tali che, per ogni $z \in B_{r_0}(z_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \ .$$

Si consideri la serie ottenuta per derivazione (la quale è anch'essa convergente in $B_{r_0}(z_0)$) e si consideri la funzione somma

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \ , \qquad z \in B_{r_0}(z_0) \ .$$

Si fissi ora $0 < r < r_0$ (ciò assicura che le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ e quelle ottenute per derivazione siano convergenti per $w = r$) e sia $z \in B_r(z_0)$. Per ogni $h \in \mathbb{C}$ tale che $|h| < r - |z - z_0|$ risulta $z + h \in B_r(z_0)$ (infatti $|z + h - z_0| \leq |z - z_0| + |h| < r$), ed inoltre

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z + h - z_0)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left((z + h - z_0)^n - (z - z_0)^n\right)}{(z + h - z_0) - (z - z_0)} - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} (z + h - z_0)^{n-1-j} (z - z_0)^j - \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left((z + h - z_0)^{n-1-j} (z - z_0)^j - (z - z_0)^{n-1} \right) \right) .
\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left((z+h-z_0)^{n-1-j}(z-z_0)^j-(z-z_0)^{n-1}\right)\right| \\
&=\left|\sum_{j=0}^{n-1}(z-z_0)^j\left((z+h-z_0)^{n-1-j}-(z-z_0)^{n-1-j}\right)\right| \\
&\leq\sum_{j=0}^{n-1}r^j\left|((z+h-z_0)-(z-z_0))\sum_{i=0}^{n-2-j}(z+h-z_0)^i(z-z_0)^{n-2-j-i}\right| \\
&\leq\sum_{j=0}^{n-1}r^j\,|h|\,(n-1-j)\,r^{n-2-j} \\
&=|h|\,r^{n-2}\sum_{j=0}^{n-1}(n-1-j)=\frac{n(n-1)}{2}\,r^{n-2}|h|\,,
\end{aligned}$$

e poiché la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n r^{n-2}$ è convergente in quanto ottenuta per derivazione da una serie convergente, si ha che

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right|=0$$

e ciò dimostra che f è derivabile in z. Dall'arbitrarietà di $z\in B_r(z_0)$ segue inoltre $f'=g$ in $B_r(z_0)$ e quindi f' è analitica. □

Dal risultato precedente si ottiene immediatamente il seguente corollario.

Corollario 2.6.3 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora f è derivabile infinite volte e tutte le derivate sono anch'esse funzioni analitiche.*

▷ Si approfondisce ora lo studio dei legami tra funzioni analitiche e funzioni olomorfe dimostrando che ogni funzione olomorfa è analitica. Da ciò seguirà per quanto detto sopra che le funzioni olomorfe sono in realtà funzioni dotate di derivate di ogni ordine.

Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, si denoterà con $\mathcal{H}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe definite in Ω:

$$\mathcal{H}(\Omega):=\{f:\Omega\to\mathbb{C}\mid f\text{ olomorfa}\}\,. \tag{2.6.1}$$

Si può enunciare subito il seguente risultato preliminare.

Lemma 2.6.4 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $F\in\mathcal{H}(\Omega)$ e si ponga $f=F'$. Se $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ è un cammino tale che $\gamma^*\subset\Omega$, allora*

$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(\gamma(\beta))-F(\gamma(\alpha))\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_{\gamma(\alpha)}^{\gamma(\beta)} F'(s)\,ds = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))\ ,$$

dove si è posto $s = \gamma(t)$. □

In particolare, se γ è un circuito, allora l'integrale di f lungo γ risulta nullo. Questo risultato può essere dimostrato anche in ipotesi più generali che saranno prese in considerazione nel seguito.

▷ A questo punto è utile richiamare la definizione di insieme stellato. Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, si dice che Ω è *stellato rispetto ad un punto* $z_0 \in \Omega$ se verifica la seguente condizione

$$\forall\ z \in \Omega\ \forall\ t \in [0,1]\ :\quad tz + (1-t)z_0 \in \Omega\ ; \tag{2.6.2}$$

la formula precedente esprime il fatto che per ogni $z \in \Omega$, il segmento di estremi z_0 e z è interamente contenuto in Ω.

Un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{C}$ si dice *stellato* se è stellato almeno rispetto ad un suo punto.

Teorema 2.6.5 (Teorema di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto stellato di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ un circuito tale che $\gamma^* \subset \Omega$. Allora*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, posto come al solito, $f = u + iv$ e $\gamma = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta (u(\gamma(t)) + i\,v(\gamma(t)))\cdot(x'(t) + i\,y'(t))\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta (u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t))\,dt \\
&\quad + i\int_\alpha^\beta (v(\gamma(t))x'(t) + u(\gamma(t))y'(t))\,dt\ ,
\end{aligned}$$

e quindi, considerati i campi vettoriali $\Phi := (u,-v)$ e $\Psi = (v,u)$, si può scrivere

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \Phi(s)\,ds + \ i\int_\alpha^\beta \Psi(s)\,ds\ .$$

Dalle equazioni di Cauchy-Riemann (2.2.2) deriva subito che i campi Φ e Ψ sono irrotazionali e poiché Ω è un insieme aperto stellato, essi sono conservativi. Poiché l'integrale viene effettuato lungo una curva chiusa, si deve avere $\int_\alpha^\beta \Phi(s)\,ds = 0$ e $\int_\alpha^\beta \Psi(s)\,ds = 0$, da cui anche $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. □

Teorema 2.6.6 (Formula di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto stellato di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un cammino semplice e chiuso tale che $\gamma^* \subset \Omega$. Allora $\Omega_\gamma \subset \Omega$ e inoltre, per ogni $z_0 \in \Omega_\gamma$,*

$$f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \,. \tag{2.6.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra la tesi nel caso particolare in cui γ sia la circonferenza di centro z_0 e raggio $r > 0$, supponendo ovviamente che $B'_r(z_0) \subset \Omega$. Si consideri la funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \Omega$,

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \,, & z \in \Omega \setminus \{z_0\} \,, \\ f'(z_0) \,, & z = z_0 \,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che g è continua in Ω (in quanto f è derivabile in z_0) ed olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ (in quanto rapporto di funzioni olomorfe).

Si può dimostrare inoltre che alla funzione g può essere applicato il Teorema di Cauchy 2.6.5 il quale, tenendo presente che $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz = 2\pi i$ (vedasi la (2.5.5)), fornisce

$$0 = \int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i\, f(z_0) \,,$$

da cui $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$ e quindi la tesi. □

S può a questo punto dimostrare che le funzioni olomorfe sono analitiche.

Teorema 2.6.7 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è analitica e inoltre, se $z_0 \in \Omega$ e se $r > 0$ è tale che $B'_r(z_0) \subset \Omega$, si ha, per ogni $z \in B_r(z_0)$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \right) (z - z_0)^n \,. \tag{2.6.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per ogni $z \in B_r(z_0)$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \right) (z - z_0)^n \,. \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.6.8 Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ risulta olomorfa se e solo se essa è analitica. Tale equivalenza segue direttamente dai Teoremi 2.6.2 e 2.6.7.

Inoltre, dagli stessi teoremi segue anche che se f è olomorfa, anche f' è olomorfa. Conseguentemente, f è dotata delle derivate di ogni ordine e, posto $f = u + iv$, risulta $u \in C^\infty(\Omega)$, $v \in C^\infty(\Omega)$. Ciò giustifica pienamente anche quanto affermato nell'Osservazione 2.2.5, in quanto una volta che u e v sono differenziabili con continuità due volte, ha senso il calcolo effettuato del laplaciano che, come dimostrato, risulta nullo. Si conclude pertanto che u e v sono armoniche.

▷ Per stabilire che una funzione è olomorfa, può essere talvolta utile il seguente risultato.

Proposizione 2.6.9 (Teorema di Morera) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Si supponga che, per ogni triangolo $T \subset \Omega$, risulti*

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0 \, .$$

Allora f è olomorfa.

Si studiano ora ulteriori conseguenze dell'analiticità delle funzioni olomorfe.

Corollario 2.6.10 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in \Omega$, allora f è derivabile infinite volte in z_0 e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \, , \tag{2.6.5}$$

dove $r > 0$ è un arbitrario numero strettamente positivo tale che $B'_r(z_0) \subset \Omega$.

Dimostrazione. Poiché f è olomorfa e quindi è sviluppabile localmente in serie di potenze, il coefficiente n-esimo della serie (2.6.4) coincide con $f^{(n)}(z_0)$ e da ciò segue direttamente la (2.6.5). □

Corollario 2.6.11 (Diseguaglianza di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in \Omega$ e se $r > 0$ è tale che $B'_r(z_0) \subset \Omega$, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{z \in \gamma^*_{z_0,r}} |f(z)| \, . \tag{2.6.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ponga per brevità $M := \max_{z\in\gamma^*_{z_0,r}} |f(z)|$. Utilizzando la proprietà (2.5.4) ed il Corollario 2.6.10 e tenendo presente che, per ogni $z \in \gamma^*_{z_0,r}$, risulta $|f(z)/(z-z_0)^{n+1}| \leq M/r^{n+1}$, si ha

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\,\frac{M}{r^{n+1}}\,\ell(\gamma_{z_0,r}) = \frac{n!}{2\pi}\,\frac{M}{r^{n+1}}\,2\pi\,r = \frac{n!}{r^n}\,M\ .$$

□

Teorema 2.6.12 (Teorema di Liouville) *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e limitata. Allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè f è limitata, si può considerare una costante $K > 0$ tale che $|f(z)| \leq K$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Si fissi $z_0 \in \mathbb{C}$; allora, dalla diseguaglianza di Cauchy (2.6.6) applicata per $n = 1$, si ottiene

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}\max_{z\in\gamma^*_{z_0,r}} |f(z)| \leq \frac{K}{r}\ ,$$

ed essendo $r > 0$ arbitrario ciò comporta $f'(z_0) = 0$; dall'arbitrarietà di z_0, segue $f' = 0$ e quindi f è costante. □

Teorema 2.6.13 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora P ammette almeno uno zero (cioè esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$).*

DIMOSTRAZIONE. Si supponga, per assurdo, che P non si annulli in alcun elemento di $\mathbb{C}$; allora la funzione reciproca $f = 1/P$ risulta olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ in quanto rapporto di funzioni olomorfe.

Si riconosce ora che f è limitata. Infatti, considerati $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ e tali che $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ risulta $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ (infatti $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)/(a_n z^n)| = 1$ e $\lim_{|z|\to+\infty} |a_n z^n| = +\infty$ in quanto $n \geq 1$). Pertanto $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to+\infty} |1/P(z)| = 0$. Applicando la definizione di limite, si può trovare una sfera $B_\rho(0)$ tale che $|f| \leq 1$ in $\mathbb{C}\setminus B_\rho(0)$; inoltre, f è limitata in $B'_\rho(0)$ per il teorema di Weierstrass e quindi f è limitata in tutto $\mathbb{C}$.

Dal Teorema di Liouville segue che f deve essere costante e ciò è assurdo in quanto P è un polinomio di grado $n \geq 1$. □

Dal teorema fondamentale dell'algebra segue che un polinomio di grado $n \geq 1$ ammette esattamente n zeri; infatti, basta reiterare l'applicazione del Teorema 2.6.13 tenendo presente che se z_0 è uno zero di un polinomio P di grado $n \geq 1$, allora P si decompone nella forma $P(z) = (z - z_0)P_1(z)$ con P_1 polinomio di grado $n - 1$.

Al fine di approfondire lo studio delle funzioni complesse, sono necessari a questo punto ulteriori strumenti forniti nelle sezioni successive.

2.7 Circuiti omotopici

Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e siano $\gamma_0 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ due circuiti tali che $\gamma_0^* \subset \Omega$, $\gamma_1^* \subset \Omega$. Si dice che γ_0 e γ_1 sono *omotopici* o equivalentemente che γ_0 è *deformabile con continuità* in γ_1 nell'insieme Ω se esiste una funzione continua $H : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ verificante le seguenti condizioni

1. L'immagine di H è contenuta in Ω ($H([\alpha, \beta] \times [0, 1]) \subset \Omega$).
2. Per ogni $s \in [0, 1]$, la funzione $H(\cdot, s)$ è un circuito (si ricorda che $H(\cdot, s) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $t \in [\alpha, \beta]$, $H(\cdot, s) = H(t, s)$).
3. $H(\cdot, 0) = \gamma_0$, $H(\cdot, 1) = \gamma_1$.

▷ Una funzione H verificante le proprietà elencate sopra viene denominata *omotopia* tra i circuiti γ_0 e γ_1.

▷ Una *circuito ridotto al punto* $z_1 \in \mathbb{C}$ è una funzione costante $\gamma_{z_1} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ di costante valore z_1 (per ogni $t \in [\alpha, \beta]$, $\gamma_{z_1}(t) = z_1$).[7]

▷ Si dice che un circuito $\gamma_0 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ è *continuamente deformabile in un punto* z_1 (oppure che è *omotopico ad un punto* z_1) se esiste un'omotopia tra γ_0 e il circuito costante γ_{z_1} definito sopra.

▷ Il risultato più importante della presente sezione riguarda l'uguaglianza dell'integrale curvilineo lungo due circuiti omotopici.

Teorema 2.7.1 (Teorema di Cauchy sui circuiti omotopici) *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $\gamma_0 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sono due circuiti in Ω, allora*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz \, .$$

In particolare, se $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ è un circuito omotopico ad un punto di Ω, allora

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0 \, .$$

▷ L'ultima parte segue dal fatto che

▷ Si ricorda che un sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$ si dice *semplicemente connesso* se è connesso[8] e se ogni circuito con supporto contenuto in Ω è omotopico ad un punto di Ω.

[7] La denominazione di circuito viene attribuita impropriamente alla funzione γ_{z_1} in quanto essa non è una curva regolare a tratti.

[8] Si dice che Ω è connesso se non esistono due insiemi aperti disgiunti U e V di $\mathbb{C}$ tali che

$$\Omega \subset U \cup V \, , \qquad U \cap \Omega \neq \emptyset \, , \qquad V \cap \Omega \neq \emptyset \, .$$

Dal teorema precedente, segue che se Ω è un insieme aperto semplicemente connesso, allora $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ per ogni circuito γ con supporto contenuto in Ω.

Tale risultato inverte il Teorema di Morera 2.6.9 e dimostra che negli insiemi semplicemente connessi le funzioni continue con integrale nullo lungo ogni circuito (oppure lungo la frontiera di ogni triangolo) sono tutte e sole le funzioni olomorfe.

2.8 Zeri di una funzione olomorfa

Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Si denomina *zero* di f ogni elemento $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = 0$. Pertanto, l'*insieme degli zeri* di f, che si denota con $\mathcal{Z}(f)$, è dato dal seguente sottoinsieme di Ω

$$\mathcal{Z}(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\} .$$

Gli zeri delle funzioni olomorfe hanno alcune proprietà particolari di seguito descritte. Si considera dapprima il caso in cui f sia sviluppabile in serie di potenze.

Proposizione 2.8.1 *Si consideri una funzione sviluppabile in serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.8.1}$$

in $B_r(z_0)$. Allora z_0 è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$ se e solo se f è identicamente nulla in $B_r(z_0)$ (cioè $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

Dimostrazione. Se f è identicamente nulla, ovviamente z_0 è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$. Viceversa, si supponga che f non sia identicamente nulla, per cui l'insieme

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

è non vuoto e si denoti con m il suo più piccolo elemento. Se $m = 0$ allora $f(z_0) = a_0 \neq 0$ e quindi, poichè f è continua, esiste un intorno di z_0 in cui f non assume mai il valore 0; pertanto in questo caso z_0 non è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$. Si supponga ora $m \geq 1$; allora la funzione f può essere scritta nella forma

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} .$$

Si consideri la funzione

$$g(z) := \sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} \qquad \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n\right) ;$$

Equivalentemente, si può dire che Ω è connesso se gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi in Ω sono $\emptyset$ e lo stesso Ω.

si ha $g(z_0) = a_m \neq 0$ e poichè anche g è continua, essa non si annulla mai in un opportuno intorno $B_{r_1}(z_0)$ di z_0; inoltre $(z - z_0)^m$ si annulla solamente in z_0 e pertanto $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ in $B_{r_1}(z_0)$ si annulla solamente in z_0; segue che in questo caso z_0 è un punto isolato di $\mathcal{Z}(f)$. □

Dalla proposizione precedente segue che per una funzione non identicamente nulla del tipo (2.8.1) che si annulla in z_0, si ha che z_0 è un punto isolato di $\mathcal{Z}(f)$.

Dal caso semplice delle serie di potenze si deduce il seguente risultato generale riguardante le funzioni analitiche.

Teorema 2.8.2 (Teorema sull'annullamento delle funzioni olomorfe) *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) L'insieme $\mathcal{Z}(f)$ è dotato di punti di accumulazione in Ω;

b) f è identicamente nulla.

DIMOSTRAZIONE. a)⇒b) Si consideri l'insieme B dei punti di Ω di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$ che, supponendo vera la a), deve essere non vuoto. Inoltre B è chiuso in Ω in quanto f è continua.[9] Infine B è anche aperto in quanto, se si considera $z_0 \in B$, dal fatto che f è analitica segue che f può essere sviluppata in serie di potenze in una sfera $B_r(z_0) \subset \Omega$ e, dalla Proposizione 2.8.1 precedente, si ricava che f si annulla in $B_r(z_0)$. Quindi B contiene un intorno di z_0 in Ω ed è pertanto aperto in Ω. Poichè Ω è connesso, i suoi unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto e l'intero Ω; essendo $B \neq \emptyset$, deve essere $B = \Omega$ e quindi f si annulla in tutto Ω.

b)⇒a) Ovvia. □

Osservazione 2.8.3 Il teorema precedente afferma che una funzione olomorfa non identicamente nulla non può avere zeri non isolati all'interno del suo insieme di definizione. Tuttavia, non è escluso che l'insieme degli zeri possa avere dei punti di accumulazione sulla frontiera di Ω.

Ad esempio, si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) := \sin(1/z)$. Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in quanto composta da funzioni olomorfe; inoltre, è ovvio che l'insieme degli zeri di f contiene i punti $z_k = 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, e quindi 0 è un punto di accumulazione per tale insieme.

[9] Infatti, se $(z_n)_{n\geq 1}$ è una successione di elementi di B convergente verso $z \in B$, dal fatto che $z_n \in B$ si deduce innanzitutto $f(z_n) = 0$; infatti, z_n è un punto di accumulazione di zeri di f e quindi è a sua volta il limite di una successione di punti in cui la funzione f si annulla; a causa della continuità di f, anche z_n deve essere uno zero di f. A questo punto basta osservare che z viene ad essere anch'esso limite di una successione di punti in cui f si annulla e ancora a causa della continuità di f, deve essere $f(z) = 0$, da cui $z \in B$.

▷ Ulteriori conseguenze del Teorema 2.8.2 vengono fornite dai seguenti corollari.

Corollario 2.8.4 *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) Esiste un punto $z_0 \in \Omega$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$;

b) f è identicamente nulla.

DIMOSTRAZIONE. La tesi direttamente dal Teorema 2.8.2, tenendo presente che la condizione a) è equivalente al fatto che f si annulli in tutta una sfera di centro z_0 contenuta in Ω a causa dell'analiticità di f. □

Corollario 2.8.5 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non identicamente nulla. Se $z_0 \in \Omega$ e $f(z_0) = 0$ allora esiste un unico numero naturale $n \geq 1$ tale che*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} .$$

Pertanto, gli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla sono isolati ed hanno ordine intero.

Corollario 2.8.6 (Estensione dell'annullamento) *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ tale che $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se f si annulla in $\Omega \cap \mathbb{R}$, allora f è identicamente nulla in tutto Ω.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 2.8.2, tenendo presente che l'insieme $\Omega \cap \mathbb{R}$ è dotato di punti di accumulazione in Ω in quanto Ω è aperto. □

L'ultimo corollario può essere utilizzato per dimostrare che alcune uguaglianze valide in $\mathbb{R}$ possono essere estese anche all'insieme $\mathbb{C}$.

Ad esempio, si consideri l'uguaglianza

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

valida per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) := \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ è olomorfa e si annulla in $\mathbb{R}$; dal Corollario 2.8.6, deve essere $f = 0$ in tutto $\mathbb{C}$ e quindi si conclude

$$\forall\ z \in \mathbb{C}\ :\quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1 .$$

Il Corollario 2.8.6 può essere enunciato anche dicendo che se $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono due funzioni olomorfe in un insieme aperto connesso Ω tale che $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ e se $f = g$ in $\Omega \cap \mathbb{R}$, allora $f = g$ in Ω.

Infatti, basta applicare il Corollario 2.8.6 alla funzione $f - g$.

▷ Da tale ultima proprietà si deduce l'unicità del prolungamento olomorfo di una funzione reale derivabile in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Si ricorda innanzitutto che una funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ viene denominata *prolungamento* di una funzione $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ se $\Gamma \subsetneqq \Omega$ e inoltre, per ogni $z \in \Gamma$, risulta $g(z) = f(z)$. Se f e g sono continue o rispettivamente olomorfe, si dice che g è un *prolungamento continuo* o rispettivamente un *prolungamento olomorfo* di f.

Se Ω è un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ e se $f : \Omega \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale derivabile, da quanto sopra si deduce che può esistere al più un unico prolungamento olomorfo $g : \Omega \to \mathbb{C}$ di f.

2.9 Singolarità e serie di Laurent

Nella presente sezione ci si occupa dello sviluppo in serie di una funzione che presenta delle singolarità isolate.

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione definita in un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{C}$, si dice che un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ è di *singolarità* per f se $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ ed f è olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, per un opportuno $r > 0$.

Nel seguito si denoterà con $S(z_0; r, R)$ la *corona circolare aperta* di centro z_0 e raggi r e R

$$S(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\} ; \tag{2.9.1}$$

analogamente, la *corona circolare chiusa* di centro z_0 e raggi r e R si definisce come segue

$$S'(z_0; r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z - z_0| \leq R\} . \tag{2.9.2}$$

Seguono ora i risultati più importanti riguardanti lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione.

Lemma 2.9.1 (Lemma di Laurent) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e si supponga che $S'(z_0; r, R) \subset \Omega$.*

Allora, per ogni $z \in S(z_0; r, R)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,R}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi , \tag{2.9.3}$$

dove $\gamma_{z_0,r}$ e $\gamma_{z_0,R}$ denotano le circonferenze di centro z_0 e raggi r e rispettivamente R.

Dimostrazione. Si segue un procedimento analogo a quello utilizzato per dimostrare la formula di Cauchy nel Teorema 2.6.6. Si fissi $z \in S(z_0; r, R)$ e

si consideri la funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $\xi \in \Omega$,

$$g(\xi) := \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} , & \xi \in \Omega \setminus \{z\} , \\ f'(z) , & \xi = z . \end{cases}$$

Si può riconoscere che g è olomorfa in tutto Ω e conseguentemente, poichè i circuiti $\gamma_{z_0,r}$ e $\gamma_{z_0,R}$ sono omotopici in Ω, dal Teorema di Cauchy 2.7.1 sui circuiti omotopici, segue

$$\int_{\gamma_{z_0,r}} g(\xi)\, d\xi = \int_{\gamma_{z_0,R}} g(\xi)\, d\xi$$

e tenendo presente la definizione di g si ottiene la tesi. □

Se f è olomorfa in $B_r(z_0)$ si ha $\displaystyle\int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = 0$ in quanto $z \notin B'_r(z_0)$ e quindi la formula di Laurent diventa quella di Cauchy per un cerchio.

Teorema 2.9.2 (Teorema sulla serie di Laurent in una corona circolare) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e si supponga che $S'(z_0; r, R) \subset \Omega$.*

Allora esistono una ed una sola successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed una ed una sola successione $(d_n)_{n\geq 1}$ tali che, per ogni $z \in S(z_0; r, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z - z_0)^n} \tag{2.9.4}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} &\forall\ n \in \mathbb{N} : \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,\rho}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi , \\ &\forall\ n \geq 1 : \quad d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,\rho}} f(\xi)\, (\xi - z_0)^{n-1}\, d\xi , \end{aligned} \tag{2.9.5}$$

con $r \leq \rho \leq R$ arbitrario.

Dimostrazione. La tesi si ottiene sviluppando in serie gli integrali previsti nel Lemma di Laurent 2.9.1. La prima somma viene ottenuta sviluppando in serie l'integrale di Cauchy $1/(2\pi i) \int_{\gamma_{z_0,R}} f(\xi)/(\xi - z)\, d\xi$ che è una funzione analitica in $B'_R(z_0)$. Analogamente, si sviluppa in serie il secondo integrale tenendo presente questa volta che

$$-\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - \xi} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

e quindi

$$-\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\xi) \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(\xi) \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} \ ,$$

dove l'ultima serie converge per $|z - z_0| > |\xi - z_0| = r$. □

Teorema 2.9.3 (Teorema sulla serie di Laurent in un intorno di un punto singolare isolato) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f. Allora esiste $R > 0$ tale che, per ogni $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z - z_0)^n}$$

dove i coefficienti c_n e d_n sono dati dalla (2.9.5)*.*

Dimostrazione. Si applica il teorema precedente in una corona circolare $S(z_0; r, R)$ con $0 < r < R$ arbitrario e poi considera $r \to 0$. □

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ viene denominata *parte regolare* di f, mentre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-z_0)^n}$ viene denominata *parte singolare* oppure *parte caratteristica* di f.

Si osserva che la parte regolare ha raggio di convergenza $\geq R$, mentre la parte singolare ha raggio di convergenza infinito. Inoltre la convergenza di entrambe le serie è totale in ogni corona circolare con raggi strettamente minori di R.

▷ La parte caratteristica consente di formulare la seguente classificazione dei punti singolari isolati.

Si fissino un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{C}$, una funzione olomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ed un punto di singolarità $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ per f. Si consideri $R > 0$ tale che, per ogni $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z - z_0)^n} \ .$$

Si assumono infatti le seguenti definizioni

1. Il punto z_0 si dice di singolarità *eliminabile* per f se $d_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. In tal caso, per ogni $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, risulta

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

   ed inoltre f ammette un prolungamento olomorfo considerando la funzione che in z_0 assume il valore c_0.

2. Il punto z_0 si dice *polo* di ordine $k \geq 1$ se $d_k \neq 0$ ed inoltre $d_n = 0$ per ogni $n > k$. In questo caso la parte singolare è costituita da un numero finito di addendi.

3. Il punto z_0 si dice di singolarità *essenziale* per f se $d_n \neq 0$ per infiniti $n \geq 1$.

Si hanno le seguenti caratterizzazioni delle singolarità.

Teorema 2.9.4 (Caratterizzazione delle singolarità eliminabili) *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità per f. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) z_0 è un punto di singolarità eliminabile per f;

b) f ammette un prolungamento olomorfo in $\Omega \cup \{z_0\}$;

c) f è limitata in un intorno di z_0.

L'ultima delle equivalenze precedenti è giustificata dal fatto che la parte regolare è limitata in un intorno di z_0.

Osservazione 2.9.5 *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tale che $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ per un opportuno $r > 0$ ed $f : \Omega \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω e continua in z_0. Allora f è derivabile anche in z_0.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, dalla continuità di f in z_0 si deduce che f è limitata in un intorno di z_0 e quindi, per la caratterizzazione precedente, $f_{|\Omega}$ ammette un prolungamento olomorfo $g : \Omega \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Poiché f è continua in z_0 risulta $g(z_0)$ e quindi $f = g$, da cui segue che f è olomorfa. □

Teorema 2.9.6 (Caratterizzazione dei poli di ordine k) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità per f. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) z_0 è un polo di ordine k per f;

b) Esiste $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

c) Esiste una funzione olomorfa $g : \Omega \cup \{z_0\}$ tale che

$$g(z_0) \neq 0 \,, \qquad \forall\, z \in \Omega \;:\quad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \,.$$

In qualche caso può essere anche utile la seguente caratterizzazione dei poli indipendentemente dall'ordine. Per dimostrarla bisogna tener presente che un polo di ordine k per f è uno zero di ordine k per $1/f$ ed il Corollario 2.8.5.

Teorema 2.9.7 (Caratterizzazione dei poli indipendente dall'ordine) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità per f. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) z_0 è un polo (di un certo ordine) per f;

b) $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Teorema 2.9.8 (Caratterizzazione delle singolarità essenziali) *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità per f. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) z_0 è un punto di singolarità essenziale per f;

b) Per ogni $r > 0$, risulta $\overline{f(\Omega \cap B_r(z_0))} = \mathbb{C}$.

2.10 Il teorema dei residui

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ è un punto di singolarità per f, il coefficiente d_1 dello sviluppo in serie di Laurent (vedasi la (2.9.4)) si dice *residuo* di f in z_0 e si denota con $\mathrm{Res}(f; z_0)$.

Dalle caratterizzazioni delle singolarità ottenute nella sezione precedente, si ottengono le seguenti proprietà dei residui.

1. Se z_0 è un punto di singolarità eliminabile per f, allora $\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$.

2. Se z_0 è un polo del primo ordine per f, allora
$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z) \, .$$

3. Se z_0 è un polo del primo ordine per f, allora
$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0)} \, .$$

4. Se z_0 è un polo di ordine $k > 1$ per f, allora
$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z - z_0)^k f(z) \Big) \, .$$

5. *(Regola di L'Hôpital)* Se f e g hanno entrambe uno zero oppure entrambe un polo in z_0, allora
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \, .$$

6. Se f è olomorfa in z_0 e se g ha uno zero del primo ordine in z_0, allora

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \ .$$

Il risultato principale della presente sezione è il seguente teorema.

Teorema 2.10.1 (Teorema dei residui) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un circuito tale che $\Omega_\gamma \subset \Omega$, S un sottoinsieme finito di Ω_γ ed $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa per la quale gli elementi di S siano punti di singolarità. Allora*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in S} \mathrm{Res}(f; z) \ . \tag{2.10.1}$$

2.11 Il residuo all'infinito

Si consideri una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che esista $r > 0$ tale che $\mathbb{C} \setminus B'_r(0) \subset \Omega$ (cioè, f è definita al di fuori di un insieme chiuso e limitato); tale condizione viene espressa dicendo che *il punto ∞ è una singolarità isolata per f*.

Come nel caso dei punti singolari isolati in $\mathbb{C}$, anche ora si può dimostrare che vale uno sviluppo in serie di Laurent in un intorno del punto ∞. Precisamente, esistono un'unica successione $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ed un'unica successione $(d_n)_{n \geq 1}$ di numeri complessi tali che, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus B'_r(0)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n \ . \tag{2.11.1}$$

Il residuo di f nel punto ∞ viene definito come segue:

$$\mathrm{Res}(f; \infty) := -c_1 \ .$$

La definizione precedente è giustificata dal fatto che la funzione

$$g(z) := -\frac{1}{z^2}\ f\left(\frac{1}{z}\right) \ ,$$

è definita ed olomorfa in $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, ha nel punto 0 una singolarità isolata ed inoltre

$$\mathrm{Res}(f; \infty) = \mathrm{Res}(g; 0) \ .$$

▷ Una proprietà interessante è che se S è un sottoinsieme finito di $\mathbb{C}$ e se $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa che ha delle singolarità isolate nei punti di S, allora

$$\sum_{z \in S} \mathrm{Res}(f; z) + \mathrm{Res}(f; \infty) = 0 \ .$$

▷ La singolarità nel punto all'infinito può essere classificata allo stesso modo delle singolarità in elementi di $\mathbb{C}$. Precisamente, si dice che

1. Il punto ∞ è una *singolarità eliminabile* per f se, per ogni $n \geq 1$, risulta $d_n = 0$.

2. Il punto ∞ è un *polo di ordine* k per f (con $k \geq 1$) se $d_k \neq 0$ e, per ogni $n \geq k$, risulta $d_n = 0$.

3. Il punto ∞ è una *singolarità essenziale* per f se, per infiniti $n \geq 1$, risulta $d_n \neq 0$.

▷ Si consideri ora una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Allora f è analitica e pertanto può essere sviluppata in serie di potenze di punto iniziale 0. Quindi esiste una (ed una sola) successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi tale che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \ .$$

Dall'unicità dello sviluppo in serie di Laurent e confrontando con la (2.11.1), si ottiene $c_n = 0$ per ogni $n \geq 1$ ed inoltre $c_0 = a_0$ e $d_n = a_n$ per ogni $n \geq 1$. Conseguentemente è facile riconoscere quanto segue:

1. Il punto ∞ è una singolarità eliminabile per f se e solo se f è costante ($f \equiv c_0$);

2. Il punto ∞ è un polo di ordine $k \geq 1$ se e solo se f è un polinomio di grado k ($f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ con $a_k \neq 0$);

3. Il punto ∞ è una singolarità essenziale per f se e solo se esiste una successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non definitivamente nulla tale che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ (in questo caso si dice che f è una *funzione trascendente intera*).

2.12 Teoremi di Jordan

Si enunciano ora alcuni teoremi di Jordan che vengono sistematicamente utilizzati nelle applicazioni riguardanti il calcolo di integrali.

Si intenderà fissato un cammino il cui supporto è un arco di un semicerchio; pertanto, si considerano $t_0, t_1 \in [0, \pi]$ con $t_0 < t_1$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $R > 0$ e si definisce la curva $\gamma_R : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $t \in [t_0, t_1]$, $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$.

Teorema 2.12.1 (Teorema del grande cerchio di Jordan)
Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che, per ogni $r \geq R$ e per ogni $t \in [t_0, t_1]$, si abbia $z_0 + re^{it} \in \Omega$.

Allora

$$\lim_{|z|\to+\infty}(z-z_0)f(z)=\ell\in\mathbb{C}\implies\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=i\ell(t_1-t_0)\,.$$

Teorema 2.12.2 (Teorema del piccolo cerchio di Jordan)
Sia $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che, per ogni $0<r\le R$ e per ogni $t\in[t_0,t_1]$, si abbia $z_0+re^{it}\in\Omega$.
Allora

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\ell\in\mathbb{C}\implies\lim_{R\to0^+}\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=i\ell(t_1-t_0)\,.$$

▷ Si osservi che se z_0 ha un polo del primo ordine in z_0 risulta $d_1=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ e quindi

$$\lim_{R\to0^+}\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=i\,(t_1-t_0)\,\mathrm{Res}\,(f;z_0)\,.$$

Teorema 2.12.3 (Lemma di Jordan)
Sia $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che, per ogni $r\ge R$ e per ogni $t\in[t_0,t_1]$, si abbia $z_0+re^{it}\in\Omega$.
Allora

$$\lim_{|z|\to+\infty}f(z)=0\implies\forall\ \alpha>0:\ \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma}e^{i\alpha z}f(z)\,dz=0\,.$$

2.13 Applicazioni al calcolo degli integrali

Si considerano ora alcune applicazioni dei risultati precedenti.

Esempio 2.13.1 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx\,.$$

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x):=1/(x^2+2)^2$ è integrabile in $\mathbb{R}$ in quanto è definita e continua in $\mathbb{R}$ e nei punti $\pm\infty$ è un infinitesimo di ordine 4.

Si consideri ora la funzione complessa $f:\mathbb{C}\setminus\{\pm\sqrt{2}\,i\}\to\mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z\in\mathbb{C}\setminus\{\pm\sqrt{2}\,i\}$,

$$f(z):=\frac{1}{(z^2+2)^2}\,.$$

I punti singolari sono $\pm\sqrt{2}\,i$ (e il punto ∞).

Si fissi $R>\sqrt{2}$ e si consideri il circuito γ costituito dai due cammini $\gamma_{1,R}:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R}:[-R,R]\to\mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t):=Re^{it}\,,\quad t\in[0,\pi]\,,\qquad\qquad\gamma_{2,R}(t):=t\,,\quad t\in[-R,R]\,.$$

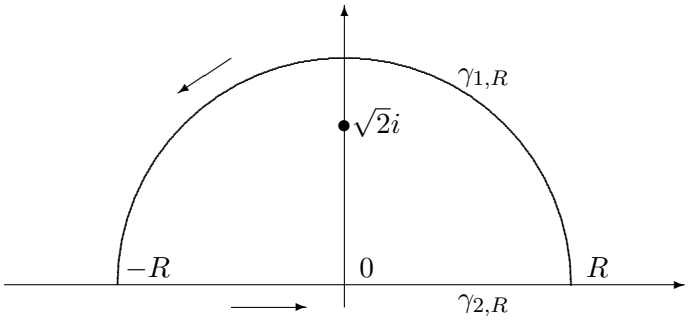


Figura 2.1: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.1*

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario.
Dal teorema dei residui segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f;\sqrt{2}\,i)$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto $\sqrt{2}i$) e inoltre, tenendo presente che $\sqrt{2}i$ è un polo del secondo ordine, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f;\sqrt{2}\,i) &= \lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{d}{dz}\left((z-\sqrt{2}i)^2\,f(z)\right)\\ &= \lim_{z\to\sqrt{2}i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+\sqrt{2}i)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to\sqrt{2}i}-\frac{2}{(z+\sqrt{2}i)^3} = -\frac{\sqrt{2}}{16}\,i\,.\end{aligned}$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}$ e $\gamma_{2,R}$,

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt = 2\pi\,i\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{16}\,i) = \frac{\sqrt{2}}{8}\,\pi\,.$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} z\cdot f(z) = 0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue anche $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$ e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{8}\,\pi\,.$$

Esempio 2.13.2 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+5}{(x^4+1)^3}\,dx\,.$$

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x) := (x+5)/(x^4+1)^3$ è integrabile in $\mathbb{R}$ in quanto è definita e continua in $\mathbb{R}$ e nei punti $\pm\infty$ è un infinitesimo di ordine 11.

Si consideri ora la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{2}(1+i)/2, \pm\sqrt{2}(1-i)/2\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo

$$f(z) := \frac{x+5}{(x^4+1)^3} \, .$$

I punti singolari sono $\pm\sqrt{2}(1+i)/2$ e $\pm\sqrt{2}(1-i)/2$.

Si fissi $R > 1$ e, come nell'esempio precedente, si consideri il circuito γ costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it} \, , \quad t \in [0,\pi] \, , \qquad\qquad \gamma_{2,R}(t) := t \, , \quad t \in [-R,R] \, .$$

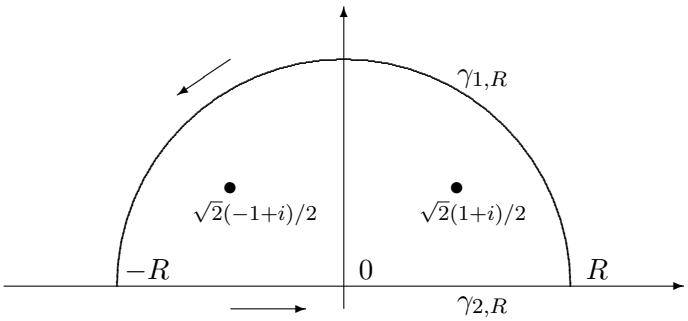


Figura 2.2: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.2*

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\,(f; \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)) + \mathrm{Res}\,(f; \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)) \right)$$

in quanto il circuito considerato contiene al suo interno solamente i punti $\sqrt{2}(\pm 1+i)/2$; tali punti sono poli del terzo ordine per f e pertanto

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f; \sqrt{2}(1+i)/2) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to \sqrt{2}(1+i)/2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right)^3 f(z) \right) \\ &= -\frac{3}{256}(35\sqrt{2} + (8+35\sqrt{2})\, i) \, ; \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(f; \sqrt{2}(-1+i)/2) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to \sqrt{2}(-1+i)/2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \right)^3 f(z) \right) \\ &= \frac{3}{256}(35\sqrt{2} + (8-35\sqrt{2})\, i) \, , \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathrm{Res}\,(f;\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))+\mathrm{Res}\,(f;\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i))=-\frac{105}{128}\sqrt{2}i\ .$$

Esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}$ e $\gamma_{2,R}$,

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz+\int_{-R}^{R}\frac{t+5}{(t^4+1)^3}\,dt=2\pi\,i\cdot(-\frac{105}{128}\sqrt{2}i)=\frac{105}{64}\,\sqrt{2}\,\pi\ .$$

Poiché anche in questo caso $\lim_{|z|\to+\infty} z\cdot f(z)=0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz=0$ e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t+5}{(t^4+1)^3}\,dt=\frac{105}{64}\,\sqrt{2}\,\pi\ .$$

Esempio 2.13.3 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx\ .$$

La funzione in esame è assolutamente integrabile in quanto nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine 2. Inoltre essa è pari e quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx\ .$$

Si consideri la funzione $f:\mathbb{C}\setminus\{\pm 2i\}\to\mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z\in\mathbb{C}\setminus\{\pm 2i\}$,

$$f(z):=\frac{e^{iz}}{z^2+4}$$

e, fissato $R>2$, si consideri il circuito γ costituito dai due cammini $\gamma_{1,R}:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R}:[-R,R]\to\mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t):=Re^{it}\ ,\quad t\in[0,\pi]\ ,\qquad\qquad \gamma_{2,R}(t):=t\ ,\quad t\in[-R,R]\ .$$

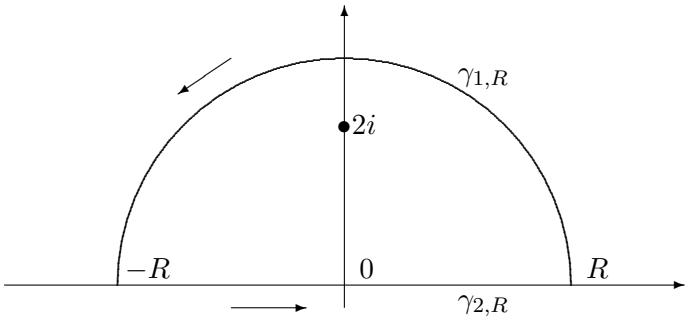


Figura 2.3: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.3*

Dal teorema dei residui segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f;2i)$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto $2i$) e inoltre, tenendo presente che $2i$ è un polo del primo ordine, si ha

$$\mathrm{Res}\,(f;2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\,f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{z+2i} = \frac{e^{-2}}{4i}\ .$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}$ e $\gamma_{2,R}$,

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{e^{it}}{t^2+4}\,dt = 2\pi\, i\cdot\frac{e^{-2}}{4i} = \frac{\pi}{2}e^{-2}\ .$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} 1/(z^2+4) = 0$, dal lemma di Jordan segue

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$$

e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^2+4}\,dt = \frac{\pi}{2}\,e^{-2}\ .$$

Infine, separando le parti reali ed immaginarie, si ottengono gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2+4}\,dt = \frac{\pi}{2}\,e^{-2}\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2+4}\,dt = 0\ ,$$

da cui

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2+4}\,dt = \frac{\pi}{4}\,e^{-2}$$

(il valore 0 del secondo integrale era prevedibile in quanto la funzione integranda è dispari).

Esempio 2.13.4 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{x^2-2x+2}\,\cos x\,dx\ .$$

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x) := (x-1)/(x^2-2c+2)^3$ è integrabile (semplicemente ma non assolutamente) in $\mathbb{R}$ in quanto è definita

e continua in $\mathbb{R}$ e nei punti $\pm\infty$ è equivalente alla funzione $\cos x/x$ la quale è integrabile.[10]

Nel caso in esame conviene considerare la funzione complessa $f : \mathbb{C}\setminus\{1\pm i\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{1 \pm i\}$,

$$f(z) := \frac{z-1}{z^2-2z+2}\, e^{iz} .$$

I punti singolari sono $1 \pm i$.

Si fissi $R > \sqrt{2}$ e, come negli esempi precedenti, si consideri il circuito γ costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it} , \quad t \in [0,\pi] , \qquad\qquad \gamma_{2,R}(t) := t , \quad t \in [-R,R] .$$

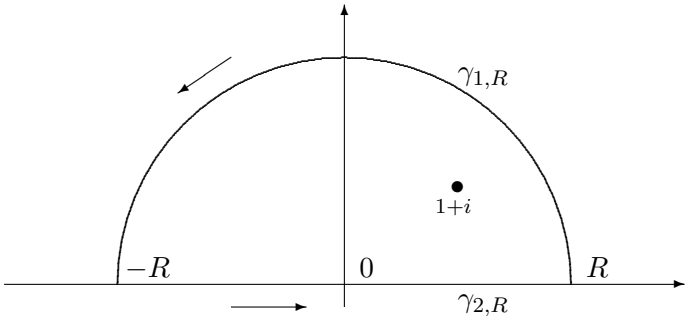


Figura 2.4: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.4*

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui segue

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1+i)$$

in quanto il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto $1+i$, che è un polo del primo ordine per f e pertanto

$$\operatorname{Res}(f; 1+i) = \lim_{z\to 1+i} (z-1-i)\, f(z) = \frac{1}{2}\, e^{-1+i} .$$

[10] Si dimostra, ad esempio, che la funzione $\cos x/x$ è integrabile nell'intervallo $[\pi/2, +\infty[$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ponga

$$a_n = \int_{\pi/2+n\pi}^{\pi/2+(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x}\, dx .$$

Si riconosce facilmente che la successione $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed infinitesima e pertanto la serie alternante $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente; segue che anche l'integrale improprio

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

è convergente.

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{t-1}{t^2-2t+2}\,e^{it}\,dt &= 2\pi\,i\,\frac{1}{2}\,e^{-1+i}\\ &= \pi i e^{-1+i}\\ &= \frac{\pi i}{e}(\cos 1 + i\sin 1)\\ &= -\frac{\pi}{e}\sin 1 + \frac{\pi i}{e}\cos 1\ .\end{aligned}$$

Utilizzando in questo caso il lemma di Jordan (in quanto $\lim_{|z|\to+\infty}(z-1)/(z^2-2z+2)=0$), si ottiene $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$ e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^2-2t+2}\,e^{it}\,dt = -\frac{\pi}{e}\sin 1 + \frac{\pi i}{e}\cos 1\ .$$

Infine, poiché

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^2-2t+2}e^{it}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^2-2t+2}\cos t\,dt + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^2-2t+2}\sin t\,dt\ ,$$

separando le parti reali ed immaginarie, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^2-2t+2}\cos t\,dt = -\frac{\pi}{e}\sin 1\ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^2-2t+2}\sin t\,dt = \frac{\pi}{e}\cos 1\ .$$

Si osserva che è stato calcolato anche l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^2-2t+2}\,\sin t\,dt\ .$$

Esempio 2.13.5 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+x^2+1}\,dx\ .$$

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x) := \cos 2x/(x^4+x^2+1)$ è integrabile in $\mathbb{R}$ in quanto è definita e continua in $\mathbb{R}$ e nei punti $\pm\infty$ è un infinitesimo di ordine 4.

Nel caso in esame conviene considerare la funzione complessa $f : \mathbb{C}\setminus\{1/2\pm i\sqrt{3}/2, -1/2\pm i\sqrt{3}/2\}\to\mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z\in\mathbb{C}\setminus\{1/2\pm i\sqrt{3}/2, -1/2\pm i\sqrt{3}/2\}$,

$$f(z) := \frac{1}{z^4+z^2+1}\,e^{2iz}\ .$$

I punti singolari sono $1/2\pm i\sqrt{3}/2$ e $-1/2\pm i\sqrt{3}/2$.

Si fissi $R>1$ e, come negli esempi precedenti, si consideri il circuito γ costituito dai due cammini $\gamma_{1,R}:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R}:[-R,R]\to\mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it}\ , \quad t\in[0,\pi]\ , \qquad\qquad \gamma_{2,R}(t) := t\ , \quad t\in[-R,R]\ .$$

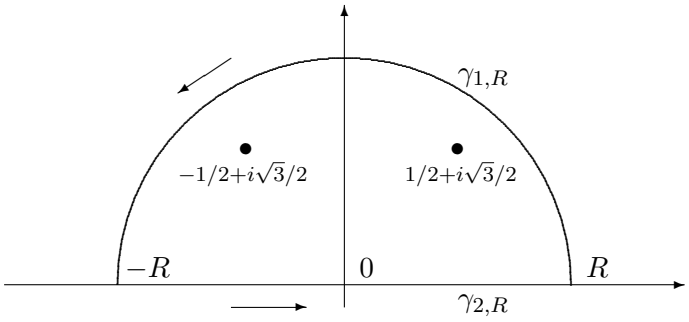


Figura 2.5: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.5*

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario.
Dal teorema dei residui segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(f; \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{Res}\left(f; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

in quanto il circuito considerato contiene al suo interno solamente i punti $\pm 1/2 + i\sqrt{3}/2$. Tali punti sono poli del primo ordine per f e pertanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(f; \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \lim_{z\to 1/2+i\sqrt{3}/2}\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) f(z) \\
&= \frac{e^{2i(1/2+i\sqrt{3}/2)}}{(1+i\sqrt{3})i\sqrt{3}} = \frac{e^{i-\sqrt{3}}}{i\sqrt{3}-3} \\
\mathrm{Res}\left(f; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \lim_{z\to -1/2+i\sqrt{3}/2}\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) f(z) \\
&= \frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{i\sqrt{3}+3}\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
&2\pi i \left(\mathrm{Res}\left(f; \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{Res}\left(f; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
&\qquad = 2\pi\left(\frac{e^{i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+3i} + \frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-3i}\right)\,.
\end{aligned}$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} \dfrac{1}{(z^4+z^2+1)} = 0$, dal lemma di Jordan segue

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$$

e quindi, passando al limite per $R \to +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, e^{2it}\, dt = 2\pi \left(\frac{e^{i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+3i} + \frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-3i} \right) .$$

A questo punto si osserva che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, e^{2it}\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, \cos 2t\, dt \\ &\quad + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, \sin 2t\, dt , \end{aligned}$$

e inoltre, con semplici calcoli e tenendo presente che la funzione seno è dispari mentre la funzione coseno è pari,

$$\begin{aligned} & 2\pi \left(\frac{e^{i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+3i} + \frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-3i} \right) \\ &\quad = \pi\, \frac{\sqrt{3}e^{i-\sqrt{3}} - 3ie^{i-\sqrt{3}} + \sqrt{3}e^{-i-\sqrt{3}} + 3ie^{-i-\sqrt{3}}}{6} \\ &\quad = \frac{\sqrt{3}}{3}\, \pi e^{-\sqrt{3}} \cos 1 + \pi e^{-\sqrt{3}} \sin 1 . \end{aligned}$$

e quindi, separando le parti reali ed immaginarie, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, \cos 2t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\, \pi e^{-\sqrt{3}} \cos 1 + 2\pi e^{-\sqrt{3}} \sin 1 ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, \sin 2t\, dt = 0 .$$

Il calcolo del secondo integrale era prevedibile osservando la disparità della funzione integranda. Tenendo invece presente che la funzione che compare nel primo integrale è pari, si ottiene l'integrale richiesto

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, \cos 2t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{6}\, \pi e^{-\sqrt{3}} \cos 1 + \frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{3}} \sin 1 .$$

Esempio 2.13.6 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx .$$

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x) := \sin x/x$ è integrabile (semplicemente ma non assolutamente) in $\mathbb{R}$ in quanto nel punto 0 è limitata e in un intorno dei punti $\pm\infty$ è integrabile (vedasi la nota all'Esercizio 2.13.4 precedente).

Nel caso in esame conviene considerare la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$f(z) := \frac{1}{z}\, e^{iz} \ .$$

Vi è l'unico punto singolare 0.

Si fissino ora $0 < r < R$ e si consideri il circuito γ costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R,-r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it} \ , \quad t \in [0,\pi] \ , \qquad \gamma_{2,r,R}(t) := t \ , \quad t \in [-R,-r] \ ,$$

$$\gamma_{3,r}(t) := re^{i(\pi - t)} \ , \quad t \in [0,\pi] \ , \qquad \gamma_{4,r,R}(t) := t \ , \quad t \in [r,R]$$

(si osservi che il cammino $\gamma_{3,r}$ è l'opposto del cammino $\gamma_{0,r}(t) := re^{it}$ in $[0,\pi]$ in modo da rispettare il verso antiorario).

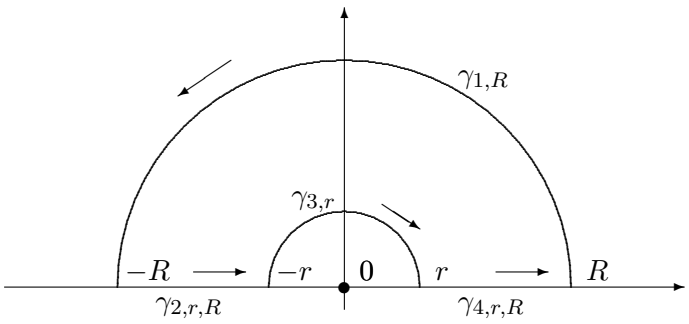


Figura 2.6: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.6*

La scelta di tale circuito è motivata dal fatto che bisogna scegliere una curva che non contiene punti singolari sul proprio supporto. Si osservi inoltre che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui, poiché non vi è alcun punto singolare interno al circuito considerato, segue

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \ ,$$

cioè

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\, dz + \int_{-R}^{-r} \frac{1}{t} e^{it}\, dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\, dz + \int_r^R \frac{1}{t} e^{it}\, dt = 0 \ .$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} 1/z = 0$, dal lemma di Jordan segue $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\, dz = 0$; inoltre, poiché $\lim_{z\to 0} z\, f(z) = 1$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio

si ha $\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = -i\pi$ (il segno "$-$" è giustificato dal fatto che il circuito $\gamma_{3,r}$ è l'opposto di quello considerato nel teorema di Jordan del piccolo cerchio).

Infine, si osserva che

$$\int_{-R}^{-r} \frac{1}{t}\, e^{it}\, dt = -\int_R^r \frac{1}{-s}\, e^{-is}\, ds = -\int_r^R \frac{1}{t}\, e^{-it}\, dt\ .$$

Passando al limite per $r \to 0^+$ e per $R \to +\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{it} - e^{-it}}{t}\, dt = i\pi$$

e pertanto

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = 2i \int_0^{+\infty} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it}\, dt = i\pi\ ,$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\ .$$

Infine, tenendo presente che la funzione $\sin x/x$ è pari, si ottiene l'integrale richiesto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi\ .$$

Esempio 2.13.7 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{(x^2+1)^2}\, dx\ .$$

La funzione in esame è sommabile in quanto nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine 3. Inoltre essa è pari e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{(x^2+1)^2}\, dx\ .$$

Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$,

$$f(z) := \frac{z\, e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$

e, fissato $R > 1$, si consideri il circuito γ costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it}\ , \quad t \in [0,\pi]\ , \qquad\qquad \gamma_{2,R}(t) := t\ , \quad t \in [-R,R]\ .$$

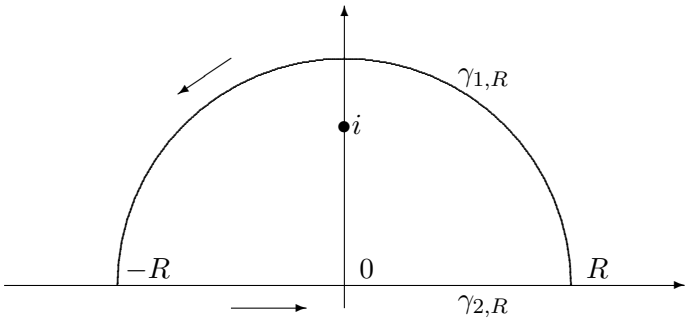


Figura 2.7: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.7*

Dal teorema dei residui segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i)$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto i) e inoltre, tenendo presente che i è un polo del secondo ordine, si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;i) &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right)\\ &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z\,e^{iz}}{(z+i)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}(1+iz)(z+i)^2 - 2z(z+i)e^{iz}}{(z+i)^4} = \frac{1}{4e}\,.\end{aligned}$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}$ e $\gamma_{2,R}$,

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{t\,e^{it}}{(t^2+1)^2}\,dt = 2\pi\,i\cdot\frac{1}{4e} = \frac{\pi i}{2e}\,.$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} z/(z^2+1)^2 = 0$, dal lemma di Jordan segue anche

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$$

e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\,e^{it}}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{\pi i}{2e}\,.$$

Infine, separando le parti reali ed immaginarie, si ottengono gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\,\cos t}{(t^2+1)^2}\,dt = 0\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\,\sin t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{\pi}{2e}\,,$$

da cui

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{t\,\sin t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{\pi}{4e}$$

(il valore 0 del primo integrale era prevedibile in quanto la funzione integranda è dispari).

Esempio 2.13.8 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+1}\, dx \ .$$

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x) := \log x/(x^2+1)$ è integrabile in $[0,+\infty[$ in quanto nel punto 0 è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine maggiore di $2-\varepsilon$ per ogni $0<\varepsilon<2$ (quindi, ad esempio, maggiore di $3/2$ che è maggiore di 1).

Prima di estendere la funzione u ad una funzione di variabile complessa, conviene tener presente che la funzione logaritmo, che è polidroma, ammette infinite determinazioni per cui si rende necessario considerare quella più opportuna al caso in esame. Infatti si ricorda che, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si può considerare la determinazione $\log_{(\alpha)} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\log_{(\alpha)} z = \log|z| + i\theta$ con $\theta \in [\alpha, \alpha+2\pi[$. Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \bar{r}_\alpha$, mentre nei punti della semiretta r_α, la funzione $\log_{\{}(\alpha)\}$ non è neanche continua (vedasi la Sezione 2.4, p. 21).

Pertanto per applicare correttamente il teorema dei residui è necessario scegliere $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che i supporti delle curve considerate non abbiano punti in comune con $\bar{r}_\alpha$.

Nel caso in esame, prima di fissare la determinazione più opportuna, conviene innanzitutto scegliere il circuito γ al quale applicare il teorema dei residui. Poiché oltre al punto singolare 0 dovuto alla funzione logaritmo vi sono in ogni caso anche i punti singolari $\pm i$, si possono fissare $0<r<1<R$ e considerare γ costituito dai quattro cammini (già considerati nell'esempio precedente) $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R,-r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it} \ , \quad t \in [0,\pi] \ , \qquad \gamma_{2,r,R}(t) := t \ , \quad t \in [-R,-r] \ ,$$

$$\gamma_{3,r}(t) := re^{i(\pi-t)} \ , \quad t \in [0,\pi] \ , \qquad \gamma_{4,r,R}(t) := t \ , \quad t \in [r,R]$$

(si osservi che il cammino $\gamma_{3,r}$ è l'opposto del cammino $\gamma_{0,r}$ in $[0,\pi]$ in modo da rispettare il verso antiorario).

A questo punto, la determinazione della funzione logaritmo può essere scelta con $\alpha = -\pi/2$ in quanto in questo modo non vi è alcun punto di $\overline{r_\alpha}$ sul supporto delle curve considerate. Pertanto, denotata per brevità con log la funzione complessa $\log_{(\alpha)}$, si considera la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus \overline{r_\alpha} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{r_\alpha}$,

$$f(z) := \frac{\log z}{z^2+1} \ .$$

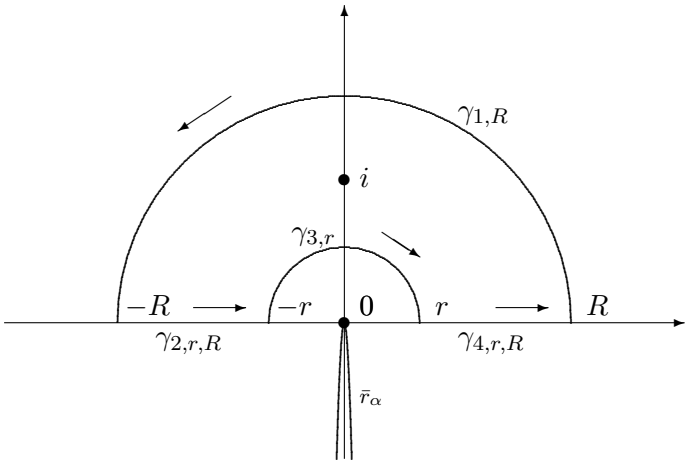


Figura 2.8: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.8*

Si osservi inoltre che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è i, segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f;i)\ ,$$

cioè

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\log|t| + i\pi}{t^2+1}\,dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz + \int_r^R \frac{\log t}{t^2+1}\,dt = 2\pi i\ \mathrm{Res}\,(f;i)\ .$$

(Bisogna tenere presente che nel quarto integrale sull'intervallo $[r,R]$ il numero complesso $z = t + i\cdot 0$ ha modulo t ed argomento 0 per cui il logaritmo, in base alla determinazione scelta, è $\log z = \log t$, mentre nel secondo integrale sull'intervallo $[-R,-r]$ il numero complesso $z = t + i\cdot 0$ ha modulo $|t| = -t$ ed argomento π per cui il logaritmo è $\log z = \log(-t) + i\pi$.)

Il punto i è un polo del primo ordine e pertanto

$$\mathrm{Res}\,(f;i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{\log i}{2i} = \frac{\log 1 + i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4}\ .$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} z\,\log z/(z^2+1) = 0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$; inoltre, poiché $\lim_{z\to 0} z\,f(z) = 0$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha anche $\lim_{r\to 0^+}\int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = 0$.

Infine, si osserva che

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\log|t| + i\pi}{t^2+1}\,dt = \int_r^R \frac{\log t + i\pi}{t^2+1}\,dt\ .$$

Passando al limite per $r \to 0^+$ e per $R \to +\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\,dt + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2}\,i\ ,$$

da cui

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\,dt + \frac{\pi^2}{2}\,i = \frac{\pi^2}{2}\,i\ .$$

Si conclude che l'integrale richiesto è uguale a 0.

Esempio 2.13.9 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1}\,dx\ .$$

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x) := \log x/(x^2-1)$ è integrabile in $[0,+\infty[$ in quanto nel punto 0 è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo, nel punto 1 la funzione tende al limite finito $1/2$ e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine maggiore di $2-\varepsilon$ per ogni $0<\varepsilon<2$. In particolare, il punto 1 è una singolarità eliminabile per u e quindi in tale punto si può intendere che la funzione u sia stata prolungata per continuità. In tal modo, non sarà necessario considerare circuiti il cui supporto non contenga il punto 1.

Tenendo conto dei punti singolari della funzione, si possono ora fissare $0<r<1<R$ e considerare il circuito γ costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R,-r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it}\ , \quad t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ , \qquad \gamma_{2,r,R}(t) := -it\ , \quad t \in [-R,-r]\ ,$$

$$\gamma_{3,r}(t) := re^{i(\pi/2-t)}\ , \quad t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ , \qquad \gamma_{4,r,R}(t) := t\ , \quad t \in [r,R]$$

(si osservi che il cammino $\gamma_{3,r}$ è l'opposto del cammino $\gamma_{0,r}(t) := re^{it}$ in $[0,\pi/2]$ in modo da rispettare il verso antiorario; per lo stesso motivo il cammino $\gamma_{2,r,R}$ è l'opposto del cammino $\gamma_0(t) := it$, $t \in [r,R]$).

A questo punto, la determinazione della funzione logaritmo può essere scelta con $\alpha = -\pi$ (si tratta quindi della funzione logaritmo principale log). Pertanto, si considera la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$f(z) := \frac{\log z}{z^2-1}\ .$$

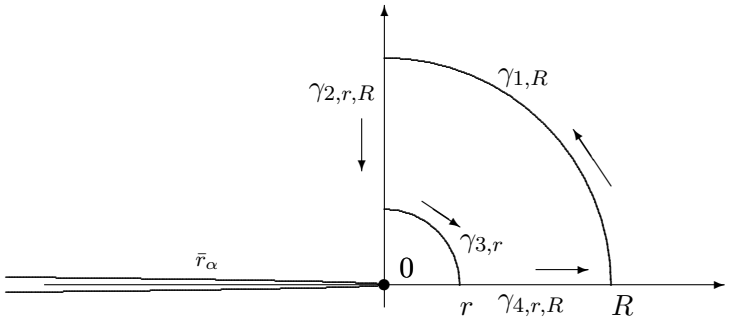


Figura 2.9: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.9*

Si osservi inoltre che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui, poiché non vi sono punti singolari interni al circuito considerato, segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\ ,$$

cioè

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + i\int_{-R}^{-r} \frac{\log(-it)}{t^2+1}\,dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz + \int_r^R \frac{\log t}{t^2-1}\,dt = 0\ .$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} z\,\log z/(z^2-1) = 0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$; inoltre, poiché $\lim_{z\to 0} z\,f(z) = 0$,[11] dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha anche $\lim_{r\to 0^+}\int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = 0$.

Infine, si osserva che

$$\begin{aligned} i\int_{-R}^{-r} \frac{\log(-it)}{t^2+1}\,dt &= -i\int_R^r \frac{\log(it)}{t^2+1}\,dt = i\int_r^R \frac{\log t + i\pi/2}{t^2+1}\,dt \\ &= i\int_r^R \frac{\log t}{t^2+1}\,dt - \frac{\pi}{2}\int_r^R \frac{1}{t^2+1}\,dt\ . \end{aligned}$$

Passando al limite per $r\to 0^+$ e per $R\to+\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$i\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\,dt - \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt = 0\ ,$$

da cui, uguagliando le parti reali ed immaginarie,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2+1}\,dt = 0\ ,$$

[11] Infatti

$$\lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0} z\,\frac{\log|z| + i\arg z}{z^2-1}$$

e $\log|z|$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo $\arg z$ è limitata, mentre $z/(z^2-1)$ è un infinitesimo di ordine 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi^2}{4}\ .$$

Si osservi che è stato ritrovato il risultato dell'Esempio 2.13.8 precedente.

Esempio 2.13.10 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx\ .$$

Nonostante la somiglianza con gli esempi precedenti, in questo caso è richiesto l'utilizzo di un circuito particolare (si può verificare direttamente che i circuiti utilizzati negli esempi precedenti in questo caso non portano alla soluzione dell'integrale richiesto).

Si osserva innanzitutto che la funzione $u(x) := \log x/(x+1)^2$ è integrabile in $[0,+\infty[$ in quanto nel punto 0 è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine maggiore di $2-\varepsilon$ per ogni $0<\varepsilon<2$.

Nel caso in esame, tenendo presente che -1 è un punto singolare, conviene fissare $0<r<1<R$ e considerare γ costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,R}:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R}:[r,R]\to\mathbb{C}$, $\gamma_{3,r}:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R}:[r,R]\to\mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it}\ ,\quad t\in[0,2\pi]\ ,\qquad \gamma_{2,r,R}(t) := r+R-t\ ,\quad t\in[r,R]\ ,$$

$$\gamma_{3,r}(t) := re^{i(2\pi-t)}\ ,\quad t\in[0,2\pi]\ ,\qquad \gamma_{4,r,R}(t) := t\ ,\quad t\in[r,R]\ .$$

Si osservi che il cammino $\gamma_{3,r}$ è l'opposto del cammino $\gamma_{0,r}(t) := re^{it}$ in $[0,\pi]$ in modo da rispettare il verso antiorario.

La determinazione della funzione logaritmo viene scelta con $\alpha=0$. Per essere precisi, per evitare che sul supporto delle curve considerate vi siano i punti singolari dell'intervallo $[r,R]$, bisognerebbe fissare $\varepsilon>0$ e considerare i cammini $\gamma_{1,R}$ e $\gamma_{3,r}$ definiti in $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ e conseguentemente $\gamma_{2,r,R}$ e $\gamma_{4,r,R}$ in modo tale da ottenere un circuito e alla fine bisognerebbe considerare $\varepsilon\to 0^+$; per semplicità di calcoli, si preferisce porre direttamente $\varepsilon=0$.

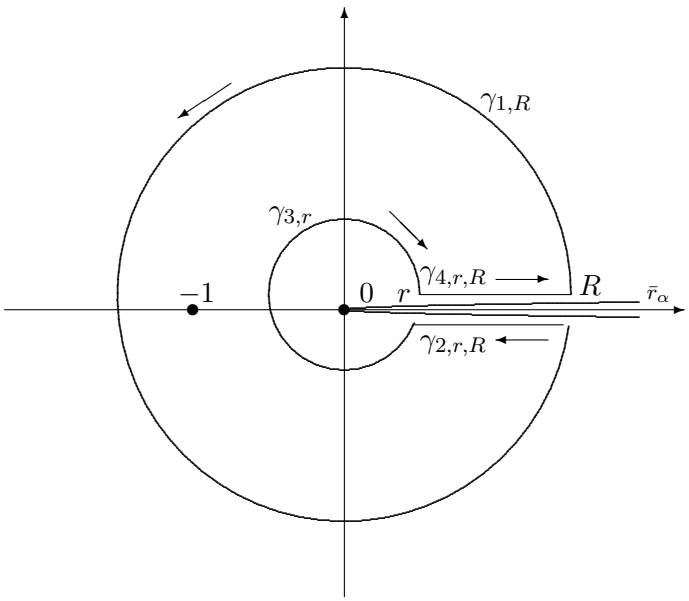


Figura 2.10: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.10*

Si osservi inoltre che il circuito viene percorso in senso antiorario per cui il cammino $\gamma_{2,r,R}$ è l'opposto del cammino $\gamma_{4,r,R}$; tuttavia, per ogni $t \in [r, R]$, la funzione logaritmo sul cammino $\gamma_{2,r,R}$ assume il valore $\log t$ mentre sul cammino $\gamma_{4,r,R}$ assume il valore $\log t + i2\pi$; da ciò è prevedibile che considerando la somma dei due integrali lungo $\gamma_{2,r,R}$ e $\gamma_{4,r,R}$ si annulli il termine con la funzione logaritmo e ciò non consente di calcolare l'integrale richiesto. Per evitare tale inconveniente, si considera il quadrato del logaritmo nella funzione da integrare e, come si vedrà, tale espediente consentirà di ottenere l'integrale richiesto.

Pertanto, denotata per brevità con log la determinazione della funzione logaritmo olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, si considera la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{(z+1)^2} \ .$$

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è -1, segue

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f; -1) \ .$$

Il punto -1 è un polo del secondo ordine per f e quindi

$$\mathrm{Res}\,(f; -1) = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left((z+1)^2 \frac{\log^2 z}{(z+1)^2} \right) = \lim_{z \to -1} \frac{2 \log z}{z} = -2i\pi \ .$$

Quindi

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz - \int_r^R \frac{(\log(r+R-t)+i2\pi)^2}{(r+R-t+1)^2}\,dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz + \int_r^R \frac{\log^2 t}{(t+1)^2}\,dt = 4\pi^2 \ .$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} z\,\log^2 z/(z+1)^2 = 0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$; inoltre, poiché $\lim_{z\to 0} z\,f(z) = 0$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha anche $\lim_{r\to 0^+}\int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = 0$ (il teorema di Jordan sul grande cerchio viene applicato separatamente alle due semicirconferenze $(\gamma_{1,R})_{|[0,\pi]}$ e $(\gamma_{1,R})_{|[\pi,2\pi]}$ e analogamente quello sul piccolo cerchio viene applicato separatamente alle due semicirconferenze $(\gamma_{3,r})_{|[0,\pi]}$ e $(\gamma_{3,r})_{|[\pi,2\pi]}$).

Infine, si osserva che, ponendo $s = r + R - t$ nel secondo integrale,

$$\begin{aligned} -\int_r^R \frac{(\log(r+R-t)+i2\pi)^2}{(r+R-t+1)^2}\,dt &= \int_R^r \frac{(\log s + i2\pi)^2}{(s+1)^2}\,ds \\ &= -\int_r^R \frac{(\log t + i2\pi)^2}{(t+1)^2}\,dt \\ &= -\int_r^R \frac{\log^2 t}{(t+1)^2}\,dt - 4\pi i\int_r^R \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt + 4\pi^2\int_r^R \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \end{aligned}$$

Si osserva che sommando gli integrali lungo le curve $\gamma_{2,r,R}$ e $\gamma_{4,r,R}$, si elidono i termini con $\log^2 t$ e rimane invece il termine con $\log t$ che era quello che interessava; da qui l'opportunità d considerare $\log^2$ anziché log nell'espressione della funzione f.

Passando al limite per $r \to 0^+$ e per $R \to +\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$-4\pi i\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt + 4\pi^2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = 4\pi^2 \ ,$$

e confrontando le parti reali ed immaginarie si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt = 0 \ , \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = 1 \ .$$

Si conclude che l'integrale richiesto è uguale a 0.

Si osserva che allo stesso risultato si poteva pervenire al modo seguente

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt &= \int_0^1 \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt - \int_1^0 \frac{\log 1/s}{(1/s+1)^2}\,\frac{1}{s^2}\,ds \\ &= \int_0^1 \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt + \int_0^1 \frac{-\log s}{(s+1)^2}\,ds \\ &= \int_0^1 \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt - \int_0^1 \frac{\log s}{(s+1)^2}\,ds = 0\ .\end{aligned}$$

Esempio 2.13.11 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/3}}{e^x+1}\,dx\ .$$

Si osserva che la funzione $u(x) := e^{x/3}/(e^x+1)$ è integrabile in quanto è continua in $\mathbb{R}$ e nei punti $\pm\infty$ è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande.

Tenendo presente che $e^z + 1 = 0$ per $z = \pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, si consideri la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{\pi i + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi i + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$f(z) := \frac{e^{z/3}}{e^z+1}\ .$$

Si fissa ora $R > 0$ e si considera il circuito γ costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,R} : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,R} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,R} : [-R, R] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,R} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := t\ ,\ t \in [-R, R]\ , \qquad \gamma_{2,R}(t) := R + it\ ,\ t \in [0, 2\pi]\ ,$$

$$\gamma_{3,R}(t) := -t + 2\pi i\ ,\ t \in [-R, R]\ , \qquad \gamma_{4,R}(t) := -R + i(2\pi - t)\ ,\ t \in [0, 2\pi]\ .$$

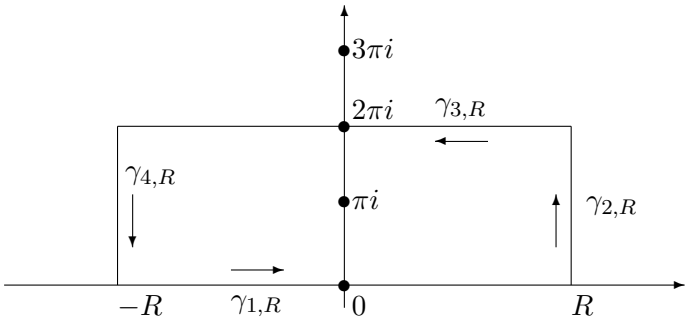


Figura 2.11: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.11*

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è πi, segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f;\pi i)\ .$$

Il punto πi è un polo del primo ordine per f in quanto la derivata $D(e^z+1) = e^z$ non si annulla in πi e pertanto, applicando la regola di l'Hôpital,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f;\pi i) &= \lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)\,f(z) = e^{\pi i/3}\lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{e^z+1}\\ &= e^{\pi i/3}\lim_{z\to\pi i}\frac{1}{e^z} = \frac{e^{\pi i/3}}{-1} = -e^{\pi i/3}\ .\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\frac{e^{t/3}}{e^t+1}\,dt &+ i\int_0^{2\pi}\frac{e^{(R+it)/3}}{e^{R+it}+1}\,dt - \int_{-R}^{R}\frac{e^{(-t+2\pi i)/3}}{e^{-t}+1}\,dt\\ &- i\int_0^{2\pi}\frac{e^{(-R+i(2\pi-t))/3}}{e^{-R-it}+1}\,dt = -2\pi i e^{\pi i/3}\ .\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{(R+it)/3}}{e^{R+it}+1}\right|dt &= \int_0^{2\pi} e^{R/3}\frac{1}{|e^Re^{it}-(-1)|}\,dt\\ &\le \int_0^{2\pi} e^{R/3}\frac{1}{||e^R|-|-1||}\,dt\\ &\le \int_0^{2\pi}\frac{e^{R/3}}{e^R-1}\,dt = 2\pi\frac{e^{R/3}}{e^R-1}\end{aligned}$$

e poiché $\lim_{R\to+\infty} 2\pi e^{R/3}/(e^R-1) = 0$, il secondo integrale tende a 0; analogamente si dimostra che anche il quarto integrale tende a 0 per $R\to+\infty$. Infine, si osserva che

$$-\int_{-R}^{R}\frac{e^{(-t+2\pi i)/3}}{e^{-t}+1}\,dt = \int_R^{-R}\frac{e^{s/3}e^{2\pi i/3}}{e^s+1}\,ds = -e^{2\pi i/3}\int_{-R}^{R}\frac{e^{t/3}}{e^t+1}\,dt\ ,$$

e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$\left(1-e^{2\pi i/3}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{t/3}}{e^t+1}\,dt = -2\pi i e^{\pi i/3}\ ,$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{t/3}}{e^t+1}\,dt = -\frac{2\pi i e^{\pi i/3}}{1-e^{2\pi i/3}} = \frac{2\pi\sin(\pi/3)}{1-\cos(2\pi/3)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{1+1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\pi\ .$$

Esempio 2.13.12 Si vuole calcolare il valore principale del seguente integrale improprio

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx\ .$$

Si osserva che la funzione $u(x) := \sin x/((x^2+4)(x-1))$ è integrabile in un intorno dei punti $\pm\infty$ in quanto è un infinitesimo in $\pm\infty$ di ordine 3; tuttavia, la funzione u non è integrabile in un intorno del punto 1 in quanto in tale punto è un infinito di ordine 1. In questo caso, se il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{1-r} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx + \int_{1+r}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx\right)\ ,$$

esso viene denominato *valore principale* dell'integrale improprio e si pone

$$\begin{aligned}(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx \quad &= \quad \lim_{r\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{1-r} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx\right.\\ &\qquad \left.+\int_{1+r}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx\right)\ .\end{aligned}$$

Si consideri ora la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C}\setminus\{1,\pm 2i\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\{1,\pm 2i\}$,

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}\,e^{iz}\ .$$

Tenendo conto che i punti singolari della funzione sono 1 e $\pm 2i$, si possono ora fissare $0 < r < 1$ ed $R > 2$ e considerare il circuito γ costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, 1-r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [1+r, R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{it}\ , \quad t \in [0,\pi]\ , \qquad \gamma_{2,r,R}(t) := t\ , \quad t \in [-R, 1-r]\ ,$$

$$\gamma_{3,r}(t) := re^{i(\pi-t)}\ , \quad t \in [0,\pi]\ , \qquad \gamma_{4,r,R}(t) := t\ , \quad t \in [1+r, R]$$

(si osservi che il cammino $\gamma_{3,r}$ è l'opposto del cammino $\gamma_{0,r}(t) := re^{it}$ in $[0,\pi]$ in modo da rispettare il verso antiorario.

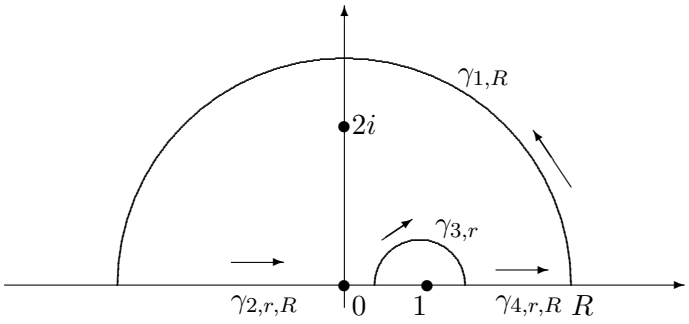


Figura 2.12: *Circuito relativo all'Esempio 2.13.12*

Si osservi inoltre che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è $2i$, segue

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f;2i)\ .$$

Il punto $2i$ è un polo del primo ordine per f e pertanto

$$\mathrm{Res}\,(f;2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\,f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)} = \frac{e^{-2}}{4i(2i-1)}\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{1-r}\frac{e^{it}}{(t^2+4)(t-1)}\,dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz \\ + \int_{1+r}^{R}\frac{e^{it}}{(t^2+4)(t-1)}\,dt \\ = \frac{\pi}{2e^2(2i-1)} = -\frac{\pi(2i+1)}{10e^2}\ .\end{aligned}$$

Poiché $\lim_{|z|\to+\infty} 1/((z^2+4)(z-1)) = 0$, dal lemma di Jordan segue $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$; inoltre, poiché $\lim_{z\to 1}(z-1)\,f(z) = e^i/5$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha $\lim_{r\to 0^+}\int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = -i\pi e^i/5$ (il segno negativo è giustificato dal fatto che il cammino considerato è l'opposto di quello considerato nel teorema di Jordan).

Passando al limite per $R\to+\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{e^{it}}{(t^2+4)(t-1)}\,dt + \int_{1}^{+\infty}\frac{e^{it}}{(t^2+4)(t-1)}\,dt = \frac{i\pi e^i}{5} - \frac{\pi(2i+1)}{10e^2}\ .$$

Poiché

$$\frac{i\pi e^i}{5} - \frac{\pi(2i+1)}{10e^2} = -\pi\frac{2e^2\sin 1 - 1}{10e^2} + i2\pi\frac{e^2\cos 1 - 1}{10e^2}\ ,$$

uguagliando le parti reali ed immaginarie, si ottiene

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{(t^2+4)(t-1)}\,dt = -\pi\frac{2e^2\sin 1 - 1}{10e^2}\ ,$$

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{(t^2+4)(t-1)}\,dt = 2\pi\frac{e^2\cos 1 - 1}{10e^2}\ .$$

Esercizi 2.13.13 Sulla base degli esempi svolti si possono calcolare i seguenti integrali impropri.

1. Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)(x^2+1)}\, dx\ .$$

Suggerimento: Conviene considerare la funzione complessa $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, \pm i\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\}$,

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{(z+1)(z^2+1)}$$

ed il seguente circuito con i punti singolari interni -1 e $\pm i$:

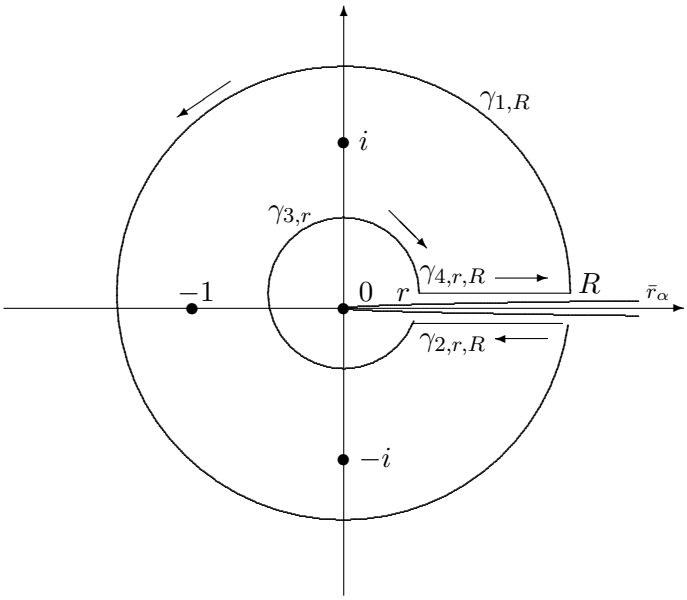


Figura 2.13: *Circuito relativo all'Esercizio 2.13.13, 1*

2. Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\, \log x}{(x^2+1)^2}\, dx\ .$$

Suggerimento: Conviene considerare la funzione complessa $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, \pm i\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\}$,

$$f(z) := \frac{z\, \log^2 z}{(z^2+1)^2}$$

ed il seguente circuito con il punto singolare interno i:

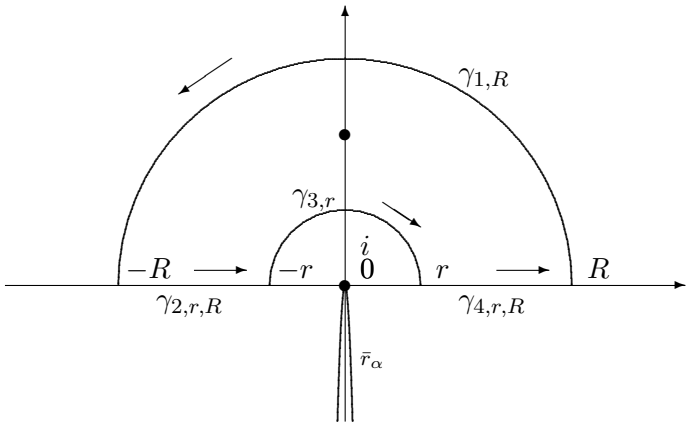


Figura 2.14: *Circuito relativo all'Esercizio 2.13.13, 2*

3. Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \log\left(\frac{1-x}{x}\right)\ \frac{1}{x^2+1}\,dx\ .$$

Suggerimento: Ponendo $s = (1-x)/x$ si ottiene l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log s}{s^2+2s+2}\,ds\ .$$

A questo punto si considera la funzione complessa $f : \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}_+\cup\{-1\pm i\}) \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}_+ \cup \{-1\pm i\})$,

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{z^2+2z+2}$$

ed il seguente circuito con i punti singolari interni $-1 \pm i$:

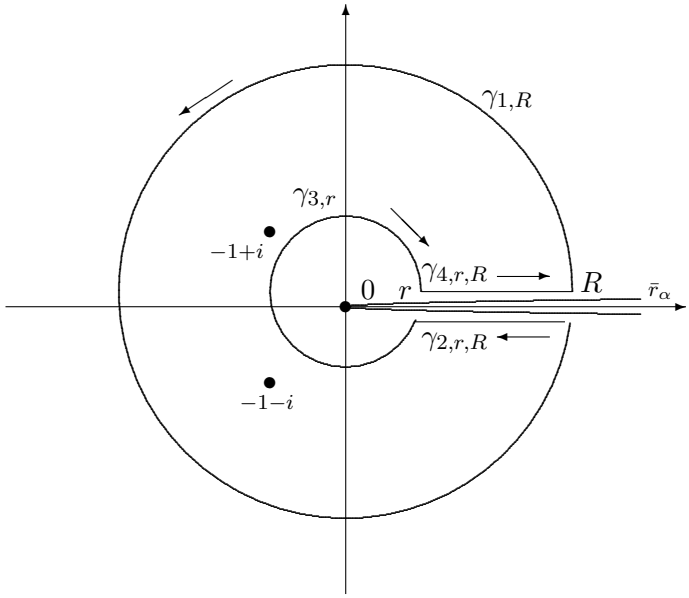


Figura 2.15: *Circuito relativo all'Esercizio 2.13.13, 3*

4. Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2 dx \, .$$

Suggerimento: Conviene considerare la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{1\}) \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{1\})$,

$$f(z) := \left(\frac{\log z}{z-1}\right)^2$$

ed il seguente circuito senza punti singolari interni (il punto 1 può essere considerato sul supporto del circuito in quanto è un punto singolare isolato):

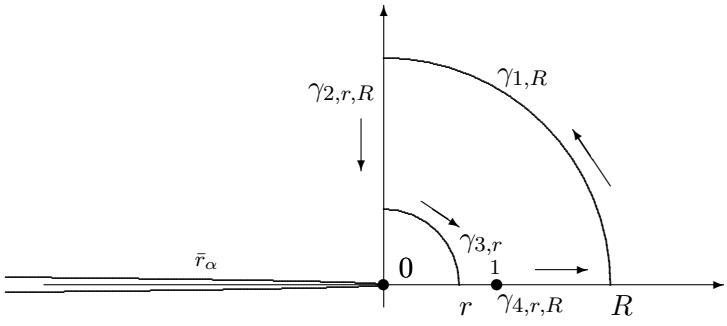


Figura 2.16: *Circuito relativo all'Esercizio 2.13.13, 4*

5. Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh x/2}{\cosh x}\, dx\ .$$

Suggerimento: Conviene considerare la funzione $f(z) := e^{z/2}/\cosh z$ definita in $\mathbb{C} \setminus \{(\pi/2 + k\pi)i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ed il seguente circuito:

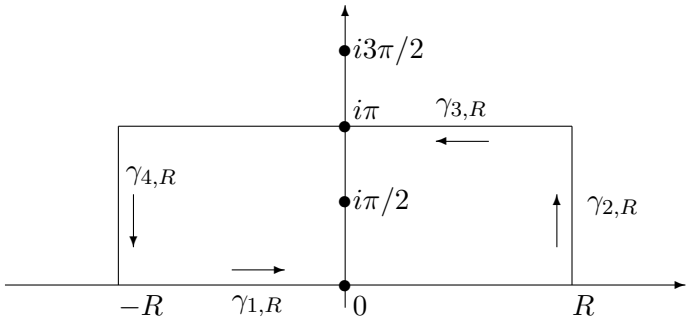


Figura 2.17: *Circuito relativo all'Esercizio 2.13.13, 5*

Come nell'Esempio 2.13.11, si dimostra che gli integrali lungo $\gamma_{2,R}$ e $\gamma_{4,R}$ tendono a 0.

6. Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\cosh^2 x}\, dx\ .$$

Suggerimento: Conviene considerare la funzione $f(z) := z^m/\cosh^2 z$ (con $m \geq 1$) definita in $\mathbb{C} \setminus \{(\pi/2 + k\pi)i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ed il seguente circuito:

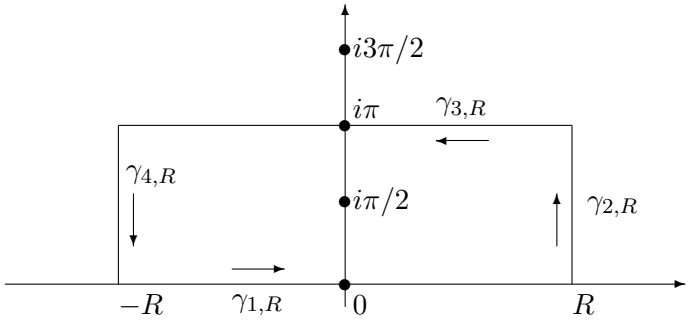


Figura 2.18: *Circuito relativo all'Esercizio 2.13.13, 6*

Come nell'Esempio 2.13.11, si dimostra che gli integrali lungo $\gamma_{2,R}$ e $\gamma_{4,R}$ tendono a 0; inoltre, dai calcoli effettuati, segue che bisogna considerare $m = 3$ per ottenere l'integrale che interessa nella somma degli integrali lungo $\gamma_{1,R}$ e $\gamma_{3,R}$.

7. Si calcoli il valore principale del seguente integrale improprio

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\cos x}{x^2-5x+6}\,dx\ .$$

Suggerimento: Conviene considerare la funzione complessa $f:\mathbb{C}\setminus\{2,3\}\to\mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z\in\mathbb{C}\setminus\{2,3\}$,

$$f(z):=\frac{z}{z^2-5z+6}\,e^{iz}$$

ed il seguente circuito senza punti singolari interni:

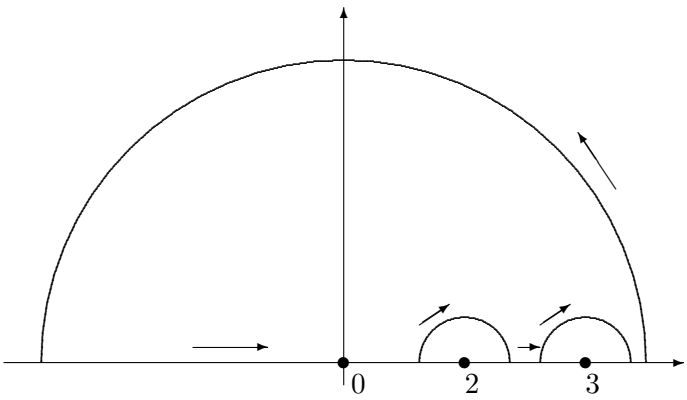


Figura 2.19: *Circuito relativo all'Esercizio 2.13.13, 7*

8. Utilizzando il teorema dei residui, verificare le seguenti uguaglianze

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\ .$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx=\pi\ .$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+\beta^2}\,dx=\frac{\pi}{\beta}\,e^{-\alpha\beta}\ ,\qquad \alpha>0\ ,\ \beta>0\ .$

(d) $\displaystyle(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx=\frac{\pi}{2}\ .$

2.14 Applicazioni al calcolo della somma di una serie

Si consideri una serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ ,\qquad a_n\in\mathbb{C}\ , \tag{2.14.1}$$

e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω e tale che $\mathbb{N} \subset \Omega$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a_n$. Si consideri ora un'ulteriore funzione $\varphi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ avente poli del primo ordine nei numeri naturali e tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Res}(\varphi; n) = 1$. Infine, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si aγ_n un circuito con supporto contenuto in Ω e contenente al proprio interno i punti $\{0, \dots, n\}$. Allora, tenendo presente che f è olomorfa in $\mathbb{N}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\operatorname{Res}(f \cdot \varphi; n) = f(n) \operatorname{Res}(\varphi; n) = a_n$ e conseguentemente

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\varphi(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}(f \cdot \varphi; k) = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Dalla formula precedente, considerando il limite per $n \to +\infty$ si ottiene la somma della serie (2.14.1).

▷ Una funzione φ che verifica le proprietà precedenti è la funzione $\varphi(z) = \pi \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$ che è definita in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e in ogni $n \in \mathbb{Z}$ ha un polo del primo ordine (infatti la derivata non si annulla in n); si verifica direttamente poi che $\operatorname{Res}(\varphi; n) = 1$.

Esempio 2.14.1 Ad esempio, si vuole calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2} \,.$$

Si osserva innanzitutto che la serie è convergente in quanto il termine generale è infinitesimo di ordine 4.

Si considerino la funzione $f(z) := 1/(z^2+1)^2$ definita per $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ e la funzione $\varphi(z) := \pi \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$ e, per ogni $n \geq 2$ si consideri il circuito γ_n costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,n} : [-n - 1/2, n + 1/2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,n} : [-n, n] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,n} : [-n - 1/2, n + 1/2] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,n} : [-n, n] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,n}(t) &:= t - in \,, & t &\in \left[-n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \,, \\
\gamma_{2,n}(t) &:= n + \frac{1}{2} + it \,, & t &\in [-n, n] \,, \\
\gamma_{3,n}(t) &:= -t + in \,, & t &\in \left[-n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right] \,, \\
\gamma_{4,n}(t) &:= -n - \frac{1}{2} - it \,, & t &\in [-n, n] \,.
\end{aligned}$$

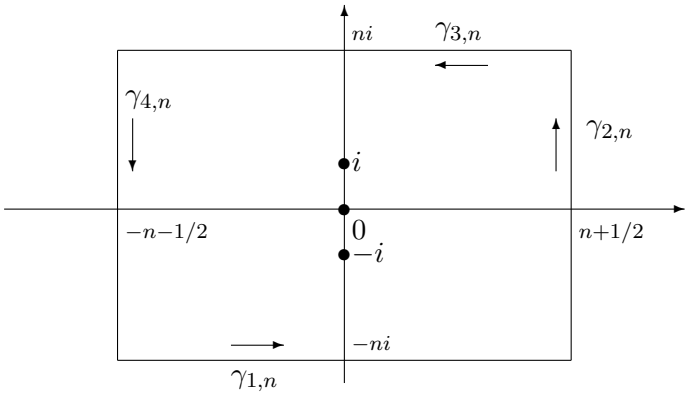


Figura 2.20: *Circuito per il calcolo della somma di una serie*

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario.

Dal teorema dei residui, poiché i punti singolari interni al circuito considerato sono $\pm i$ per la funzione f e $\{-n,\dots,n\}$ per la funzione φ, segue

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n}\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)\,(z^2+1)^2}\,dz &= 2\pi i\Big(\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;k)\\ &\quad +\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;i)+\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;-i)\Big)\\ &= 2\pi i\Big(\sum_{k=-n}^{0}\frac{1}{(k^2+1)^2}\mathrm{Res}\,(\varphi;k)\\ &\quad +\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k^2+1)^2}\mathrm{Res}\,(\varphi;k)-1\\ &\quad +\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;i)+\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;-i)\Big)\\ &= 2\pi i\Big(2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k^2+1)^2}-1\\ &\quad +\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;i)+\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;-i)\Big)\,.\end{aligned}$$

I punti $\pm i$ sono poli del secondo ordine per $f\cdot\varphi$ e pertanto

$$\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)\,(z+i)^2}=-\frac{\pi}{4}\,\frac{e^{4\pi}+4\pi e^{2\pi}-1}{(e^{2\pi}-1)^2}\,,$$

$$\mathrm{Res}\,(f\cdot\varphi;-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)\,(z-i)^2}=-\frac{\pi}{4}\,\frac{e^{4\pi}+4\pi e^{2\pi}-1}{(e^{2\pi}-1)^2}\,.$$

Inoltre, si può dimostrare facilmente che $\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n}f(z)\,\varphi(z)\,dz=0$ e quindi, passando al limite per $n\to+\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(k^2+1)^2}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\,\frac{e^{4\pi}+4\pi e^{2\pi}-1}{(e^{2\pi}-1)^2}\,.$$

▷ Nel caso in cui si debba calcolare la somma di una serie alternante

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \ ,$$

conviene considerare una funzione $\varphi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ con poli del primo ordine nei punti di $\mathbb{N}$ e tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Res}(\varphi, n) = (-1)^n$; un esempio può essere la funzione $\varphi(z) := \pi/\sin(\pi z)$, definita per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Capitolo 3

Cenni di teoria della misura

Nel presente capitolo ci si sofferma solamente sulle definizioni fondamentali della teoria della misura e degli spazi di funzioni integrabili, sia allo scopo di fissare le notazioni utilizzate nel seguito che per rendere autonoma la trattazione dei capitoli successivi.

3.1 La teoria della misura secondo Lebesgue

Il primo passo è la definizione della misura degli n-intervalli di $\mathbb{R}^n$. Siano $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, n$, $a_i \leq b_i$. La misura $m([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n])$ dell'n-intervallo

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ i = 1, \ldots, n :\ a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

è definita ponendo

$$m([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\ .$$

La misura degli altri n-intervalli (aperti o semiaperti) viene definita allo stesso modo.

Un sottoinsieme P di $\mathbb{R}^n$ viene denominato *plurintervallo* (oppure *insieme elementare*) se si può rappresentare almeno in un modo come unione di un numero finito di n-intervalli. Un plurintervallo viene denominato *aperto* (rispettivamente, *chiuso*, *semiaperto a sinistra* oppure *semiaperto a destra*) se si può rappresentare come unione di un numero finito di n-intervalli aperti (rispettivamente, chiusi, semiaperti a sinistra oppure semiaperti a destra).

L'insieme di tutti i plurintervalli di $\mathbb{R}^n$ viene denotato con $P(\mathbb{R}^n)$.

Quindi, se P è un plurintervallo, esistono $J_1, \ldots, J_p$ n-intervalli di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$P = \bigcup_{k=1}^{p} J_k\ ;$$

si può dimostrare che conseguentemente esistono un numero finito di n-intervalli $I_1, \ldots, I_m$ a due a due disgiunti e tali che

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} I_k \ .$$

Si pone allora

$$m(P) := \sum_{k=1}^{m} m(I_k) \ .$$

La definizione precedente non dipende ovviamente dagli intervalli $I_1, \ldots, I_m$ con interni a due a due disgiunti ed aventi P come unione.

Una volta definita la misura dei plurintervalli, si può definire la misura esterna $\mu^*(A)$ di ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in P(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \\ A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k}} \sum_{k\in\mathbb{N}} m(P_k) \ ,$$

con la convenzione $\mu^*(A) = +\infty$ se ognuna delle serie a secondo membro è divergente.

Infine, un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ viene denominato *misurabile* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un plurintervallo $P \in P(R^n)$ tale che $\mu^*(A \triangle P) < \varepsilon$.[1]

Se A è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ si pone

$$m(A) := \mu^*(A) \ .$$

Tra le proprietà notevoli della misura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ si segnalano le seguenti

1. L'insieme vuoto è misurabile e $m(\emptyset) = 0$;

2. Se A e B sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ tali che $A \subset B$, risulta $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$;

3. Se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti di $\mathbb{R}^n$, allora $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ è misurabile e

$$m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(A_k) \ .$$

[1] $A \triangle P$ denota la differenza simmetrica di A e P, cioè $A \triangle P = (A \setminus P) \cup (P \setminus A)$.
Secondo la definizione di misurabilità data da Carathèodory nel 1918, un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ è misurabile se, per ogni ulteriore sottoinsieme B di $\mathbb{R}^n$, risulta $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap (\mathbb{R}^n \setminus A))$. Si riconosce che tale condizione vale se è verificata per ogni B plurintervallo di $\mathbb{R}^n$.

▷ Un concetto importante della teoria della misura considerata riguarda la conseguente definizione di *insieme di misura nulla*, che è da considerarsi un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ avente misura esterna nulla. Poiché ogni sottoinsieme $N \subset \mathbb{R}^n$ avente misura esterna nulla è misurabile,[2] si può dire che un sottoinsieme N di $\mathbb{R}^n$ ha misura nulla se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di plurintervalli tale che

$$N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k \ , \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} m(P_k) < \varepsilon \ .$$

Inoltre, poiché ogni plurintervallo è unione di un numero finito di n-intervalli, la condizione precedente è equivalente a richiedere che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista una successione $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di n-intervalli tale che

$$N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \ , \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) < \varepsilon \ .$$

▷ Ad esempio, si riconosce facilmente che il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

$$D := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ i = 1, \dots, n :\ x_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$$

ha misura nulla. Infatti, D è numerabile e quindi si può scrivere $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{a_k\}$, con $a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n}) \in [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, si consideri l'n-intervallo

$$I_k = [a_{k,1} - \delta_k, a_{k,1} + \delta_k] \times \cdots \times [a_{k,n} - \delta_k, a_{k,n} + \delta_k] \ ,$$

dove $\delta_k := \dfrac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{(k+n+1)/n}}$, la cui misura è ovviamente

$$m(I_k) = (2\delta_k)^n = 2^n \frac{\varepsilon}{2^{k+n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \ .$$

Risulta quindi $D \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ e

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) = \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} = \varepsilon \ ,$$

da cui, tenendo presente l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue $m(D) = 0$.

Si osserva che l'insieme D non è misurabile secondo Peano-Jordan.[3]

▷ La definizione di insieme di misura nulla consente di introdurre le proprietà quasi ovunque verificate. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e se per ogni

[2] Infatti, utilizzando la definizione adottata, basta considerare il plurintervallo $P = \emptyset$ per ottenere $\mu^*(N \triangle P) = 0$, oppure, alternativamente, fissato $\varepsilon > 0$, un plurintervallo P con misura esterna minore di ε per cui $\mu^*(N \triangle P) < \varepsilon$.

[3] Si ricorda che un sottoinsieme A limitato e dotato di punti interni di $\mathbb{R}^n$ si dice misurabile secondo Peano-Jordan se la sua misura interna $m_i(A)$ coincide con la sua

$x \in E$ è assegnata la proprietà $\mathcal{P}(x)$, si dice che $\mathcal{P}$ è *quasi ovunque vera* se esiste un sottoinsieme $N \subset E$ di misura nulla secondo Lebesgue tale che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ sia vera per ogni $x \in E \setminus N$.

Pertanto, ad esempio, se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono funzioni reali, si dice che $f = g$ quasi ovunque (brevemente $f = g$ q.o.) se l'uguaglianza $f(x) = g(x)$ vale per ogni $x \in E \setminus N$, con $N \subset E$ di misura nulla.

3.2 Funzioni misurabili e sommabili

Se A è un arbitrario sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, si denota con $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la *funzione caratteristica* di A definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_A(x) := \begin{cases} 1\,, & x \in A\,; \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A\,. \end{cases}$$

Se I è un n-intervallo di $\mathbb{R}^n$, è naturale porre

$$\int \varphi_I(x)\,dx := m(I)\,.$$

Più in generale, se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è una *funzione a scala*, cioè se esistono un numero finito $I_1, \ldots, I_m$ di n-intervalli e $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ tali che $\varphi = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_{I_k}$, si pone

$$\int \varphi(x)\,dx := \sum_{k=1}^m c_k\, m(I_k) \quad (\in \mathbb{C})$$

(si dimostra che il secondo membro dell'uguaglianza precedente dipende solo da φ e non dalla sua particolare rappresentazione).

▷ Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice *misurabile* se esiste una successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni a scala tali che

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_k = f \qquad \text{q.o.} \tag{3.2.1}$$

---

misura esterna $m_e(A)$, dove

$$m_i(A) := \sup_{\substack{P\in P(\mathbb{R}^n)\\ P\subset A}} m(P)\,, \qquad m_e(A) := \inf_{\substack{P\in P(\mathbb{R}^n)\\ A\subset P}} m(P)\,;$$

il valore comune $m(A) = m_i(A) = m_e(A)$ viene denominato misura dell'insieme A. Un sottoinsieme A limitato ma non dotato di punti interni è misurabile secondo Peano-Jordan se $m_e(A) = 0$ ed in tal caso si pone anche $m(A) = 0$. Infine un sottoinsieme non limitato A è misurabile secondo Peano-Jordan se lo è la sua intersezione con ogni sottoinsieme limitato misurabile di $\mathbb{R}^n$ e se $\sup_{B \text{ misurabile limitato}} m(A \cap B) < +\infty$; in tal caso, tale valore viene assunto come misura di A.

Per quanto riguarda il caso in esame dell'insieme $D = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$, si riconosce facilmente che ogni plurintervallo contenente D contiene anche $[0,1]^n$ e quindi $m_e(D) = 1$; poiché D non è dotato di punti interni, esso non è quindi misurabile secondo Peano-Jordan.

(cioè, esiste un sottoinsieme N di $\mathbb{R}^n$ di misura nulla tale che $\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$).

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è una funzione misurabile, si pone

$$\int f(x)\,dx := \lim_{k\to+\infty} \int \varphi_k(x)\,dx\ .$$

Anche in questo caso si dimostra che il valore dell'integrale nn dipende dalla particolare successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ verificante la (3.2.1)

Infine, una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice *sommabile* se è misurabile e se inoltre la successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni a scala prevista nella (3.2.1) verifica la condizione

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N}\ \forall\ h,k \geq \nu : \int |\varphi_h(x) - \varphi_k(x)|\,dx < \varepsilon\ .$$

Se f è sommabile, risulta $\int f(x)\,dx < +\infty$.

Si osserva che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ risulta misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica φ_E è misurabile;[4] inoltre, E ha misura finita se e solo se φ_E è sommabile.

▷ La teoria dell'integrazione può essere estesa alle funzioni definite in un sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$; basta infatti semplicemente estendere tali funzioni a tutto $\mathbb{R}^n$ considerandole nulle al di fuori di E. Pertanto, una funzione $f : E \to \mathbb{C}$ viene denominata misurabile (rispettivamente, sommabile) se la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x)\ , & x \in E\ , \\ 0\ , & x \in \mathbb{R}^n \setminus E\ , \end{cases}$$

è misurabile (rispettivamente, sommabile). Si pone, in tal caso

$$\int_E f(x)\,dx := \int \tilde{f}(x)\,dx\ .$$

Inoltre, per ogni funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si può definire l'integrale su E ponendo

$$\int_E f(x)\,dx := \int f(x)\,\varphi_E(x)\,dx\ .$$

3.3 Spazi L^p

In tutto il seguito verranno identificate le funzioni che sono quasi ovunque uguali.

[4] Tale condizione può essere assunta come definizione di insieme misurabile.

Siano E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < +\infty$. Lo spazio $L^p(E)$ viene definito come segue

$$\begin{aligned} L^p(E) &:= \{u : E \to \mathbb{C} \mid |u|^p \text{ è sommabile}\} \\ &= \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid u_{|\mathbb{R}^n \setminus E} = 0\,, |u|^p \text{ è sommabile}\}\,. \end{aligned}$$

Lo spazio vettoriale (reale se si considerano solamente funzioni a valori reali, altrimenti complesso) $L^p(E)$ è munito della seguente norma, per ogni $u \in L^p(E)$,[5]

$$\|u\|_p := \left(\int_E |u|^p(x)\,dx\right)^{1/p}\,.$$

▷ Una funzione $u : E \to \mathbb{C}$ si dice *essenzialmente limitata* se esiste un sottoinsieme $N \subset E$ di misura nulla tale che $u_{|E\setminus N}$ è limitata (quindi, u è limitata quasi ovunque).

[5]Si ricorda che se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ si dice *norma* su V se verifica le seguenti proprietà, per ogni $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|u\| \geq 0$;
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
3. $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$;
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

In questo caso la coppia $(V, \|\cdot\|)$ viene denominata *spazio normato* su $\mathbb{K}$. Dalla norma si può sempre dedurre una *distanza*, cioè una funzione $d : V \times V \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti proprietà, per ogni $u, v, z \in V$,

1. $d(u, v) \geq 0$;
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
3. $d(u, v) = d(v, u)$;
4. $d(u, z) \leq d(u, v) + d(v, z)$.

Nel caso degli spazi normati basta infatti porre, per ogni $u, v \in V$,

$$d(u, v) := \|u - v\|\,.$$

Tale distanza viene denominata *distanza dedotta dalla norma* $\|\cdot\|$ e la coppia (V, d) diventa uno *spazio metrico*.

Negli spazi metrici viene definita in modo naturale la convergenza di successioni. Infatti, una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di V è convergente verso $a \in V$ se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geq \nu :\ |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Inoltre, si dice che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la *condizione di Cauchy* se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, n, m \geq \nu :\ |a_n - a_m| < \varepsilon\,.$$

Ovviamente, ogni successione convergente verifica la condizione di Cauchy, mentre il viceversa non vale in generale.

Uno spazio metrico (V, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice *spazio di Banach* se è uno spazio metrico completo munito della distanza dedotta dalla norma.

In definitiva, le funzioni essenzialmente limitate sono quelle che coincidono quasi ovunque con una funzione limitata.

▷ Ad esempio, si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in [0,1]$, $f(x) := \varphi_{]0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)/x$ (dove $\varphi_{]0,1]\cap\mathbb{Q}}$ denota come al solito la funzione caratteristica dell'insieme $]0,1]\cap\mathbb{Q}$ e dove, per convenzione, $f(0) = 0$). Allora f è essenzialmente limitata ma non limitata.

▷ Se $u : E \to \mathbb{C}$ è una funzione essenzialmente limitata, si definisce l'*estremo superiore essenziale* di $|u|$ il numero reale

$$\|u\|_\infty = \sup \operatorname{ess} u := \inf_{N\subset E,\ m(N)=0} \sup_{x\in E\setminus N} |u(x)| \ . \tag{3.3.1}$$

Lo spazio vettoriale di tutte le funzioni essenzialmente limitate su E viene denotato con $L^\infty(E)$; quindi

$$\begin{aligned} L^\infty(E) &:= \{u : E \to \mathbb{R} \mid u \text{ è essenzialmente limitata in } E\} \\ &= \{u : E \to \mathbb{R} \mid u_{|\mathbb{R}^n\setminus E} = 0\ ,\ u \text{ è essenzialmente limitata}\} \ . \end{aligned}$$

Inoltre $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato.

▷ Nel caso in cui $E = \mathbb{R}^n$, si usa la notazione più semplice L^p per denotare lo spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$.

▷ Seguono ora alcune proprietà essenziali degli spazi $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ con $1 \le p \le +\infty$.

Se $1 < p < +\infty$, si definisce *coniugato* di p, il numero reale p' che verifica la condizione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ .$$

Ovviamente $1 < p' < +\infty$ e $p' = p/(p-1)$. Inoltre, anche 1 e $+\infty$ si dicono coniugati.

Si osservi che l'unico numero coniugato con sé stesso è 2.

Teorema 3.3.1 (Diseguaglianza di Hölder) *Siano $1 \le p, p' \le +\infty$ coniugati e $u \in L^p(E)$, $v \in L^{p'}(E)$. Allora $u \cdot v \in L^1(E)$ e inoltre*

$$\|u \cdot v\|_1 \le \|u\|_p \ \|v\|_{p'} \ ,$$

cioè, per $1 < p < +\infty$,

$$\int_E |u(x)\, v(x)|\, dx \le \left(\int_E |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \ \left(\int_E |v(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'}$$

e, per $p = 1$,

$$\int_E |u(x)\, v(x)|\, dx \le \sup \operatorname{ess} v \ \int_E |u(x)|\, dx \ .$$

La proprietà seguente in realtà è stata già utilizzata affermando che $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio normato, in quanto esprime proprio la quarta proprietà della norma.

Teorema 3.3.2 (Diseguaglianza di Minkowski) *Siano* $1 \le p \le +\infty$ *e* $u, v \in L^p(E)$. *Allora* $u + v \in L^p(E)$ *e*

$$\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$$

cioè, per $1 \le p < +\infty$,

$$\left(\int_E |u(x) + v(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \le \left(\int_E |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_E |v(x)|^p \, dx\right)^{1/p} ,$$

e, se $p = +\infty$,

$$\sup \operatorname{ess} (u + v) \le \sup \operatorname{ess} u + \sup \operatorname{ess} v \, .$$

▷ La distanza dedotta dalla norma $\|\cdot\|$ viene denotata con d_p; quindi, per ogni $u, v \in L^p(E)$,

$$d_p(u, v) := \|u - v\|_p \, .$$

Pertanto, se $1 \le p < +\infty$ una successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $L^p(E)$ converge verso $u \in L^p(E)$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, k \ge \nu :\ \int_E |u_k(x) - u(x)|^p \, dx < \varepsilon \, ;$$

se $p = +\infty$, la condizione precedente diventa

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, k \ge \nu :\ \sup \operatorname{ess} (u_k - u) < \varepsilon \, .$$

La stessa successione verifica la condizione di Cauchy se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, h, k \ge \nu :\ \int_E |u_h(x) - u_k(x)|^p \, dx < \varepsilon \, ;$$

per $1 \le p < +\infty$, mentre

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N} :\ \forall\, h, k \ge \nu :\ \sup \operatorname{ess} (u_h - u_k) < \varepsilon$$

se $p = +\infty$.

Una proprietà importante relativa alla convergenza negli spazi $L^p(E)$ è data dal seguente risultato.

Teorema 3.3.3 *Per ogni* $1 \le p \le +\infty$, $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ *è uno spazio di Banach.*

Pertanto, ogni successione di Cauchy in $L^p(E)$ risulta convergente in norma L^p.

Si osserva infine che la convergenza nella norma L^p implica quella quasi ovunque; pertanto

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_p = 0 \implies \lim_{k\to+\infty} u_k(x) = u(x) \text{ q.o. .}$$

Esempio 3.3.4 Sia $\alpha > 0$ e si consideri la funzione $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in]0,1]$,

$$u(x) := \frac{1}{x^\alpha}$$

(si osservi che è sufficiente definire le funzioni in L^p a meno di un insieme di misura nulla, in quanto le funzioni che differiscono in insiemi di misura nulla vengono identificate).

Ovviamente, risulta

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x^\alpha}\right|^p dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha p < 1$ e quindi $u \in L^p([0,1])$ se $\alpha < 1/p$, mentre $u \notin L^p([0,1])$ se $\alpha \geq 1/p$. Se $p = +\infty$, si verifica direttamente che $u \notin L^\infty([0,1])$ in quanto u non è essenzialmente limitata.

Esempio 3.3.5 Sia $\alpha > 0$ e si consideri, per ogni $k \geq 1$, la funzione

$$u_k(x) := k^\alpha \ \varphi_{[0,1/k]}(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

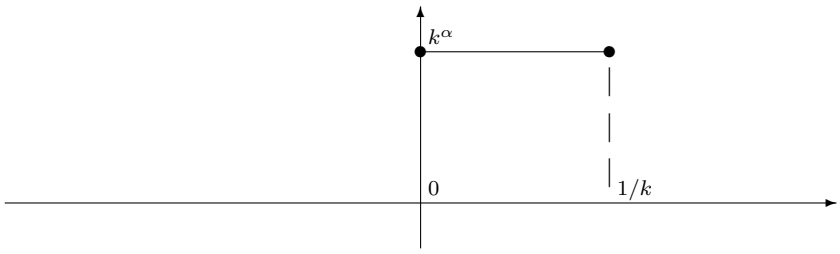


Figura 3.1: *Grafico della funzione* $k^\alpha \ \varphi_{[0,1/k]}$

Allora risulta ovviamente $u_k \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ ed inoltre, se $1 \leq p < +\infty$,

$$\|u_k\|_p^p = \int_0^{1/k} k^{\alpha p} = \frac{k^{\alpha p}}{k} = k^{\alpha p - 1} \ ,$$

mentre

$$\|u_k\|_\infty = k^\alpha \ .$$

Pertanto, la successione $(u_k)_{k\geq 1}$ non è convergente in norma $\|\cdot\|_\infty$ mentre, se $1 \leq p < +\infty$, la successione $(u_k)_{k\geq 1}$ converge alla funzione nulla nella norma $\|\cdot\|_p$ se e solo se $\alpha p - 1 < 1$, cioè se $p < 1/\alpha$.

Oltre alla proprietà di completezza prima considerata, l'integrale di Lebesgue ha il vantaggio di rendere più generali alcune proprietà di passaggio al limite, di seguito considerate.

Teorema 3.3.6 (Teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue) *Siano $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili in $\mathbb{R}^n$ e $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tali che*

1. $\lim_{k\to+\infty} u_k(x) = u(x)$ *q.o.;*
2. *Esiste una funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ sommabile e tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $|u_k| \le g$.*

Allora u è sommabile ed inoltre

$$\lim_{k\to+\infty} \int |u_k(x) - u(x)|\, dx = 0 \qquad (\lim_{k\to+\infty} \int u_k(x)\, dx = \int u(x)\, dx) \ .$$

Teorema 3.3.7 (Dipendenza da parametri) *Siano E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, A un sottoinsieme aperto non vuoto di $\mathbb{R}^k$ ed $f : E\times A \to \mathbb{C}$ una funzione verificante le seguenti condizioni:*

1. *Per ogni $t \in A$, la funzione parziale $f(\cdot, t) : E \to \mathbb{C}$ è misurabile;*[6]
2. *Per ogni $x \in E$, la funzione parziale $f(x, \cdot) : A \to \mathbb{C}$ è continua.*

   Inoltre, si supponga che esista una funzione $g : E \to \mathbb{R}_+$ sommabile e tale che, per ogni $(x, t) \in E \times A$, $|f(x, t)| \le g(x)$.

   Allora, la funzione $F : A \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $t \in A$,

$$F(t) := \int_E f(x, t)\, dx \ ,$$

   è continua.

   In più, se si suppone che, per ogni $x \in E$, $f(x, \cdot) \in C^1(A)$ e inoltre[7]

$$\forall\ i = 1, \dots, k : \ \left|\frac{\partial f}{\partial t_i}(x, t)\right| \le g(x) \ ,$$

   allora si ha anche $F \in C^1(A)$.

[6] Per ogni $x \in E$, $f(\cdot, t)(x) := f(x, t)$ e analogamente, per ogni $t \in A$, $f(x, \cdot)(t) := f(x, t)$.

[7] Si ricorda che se $k = 1$, una funzione $u : A \to \mathbb{C}$ se è derivabile e la sua derivata è continua. Se $k > 1$, si scrive $u \in C^1(A)$ per indicare che u è dotata di tutte le derivate parziali prime in A e che queste sono continue in A (poiché A è aperto, ciò comporta che u è differenziabile in A).

3.4 Spazi di Hilbert e prodotto scalare in $L^2(E)$

Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si dice che una funzione $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ è un *prodotto scalare* su H se verifica le seguenti condizioni:

1. Per ogni $x \in H$: $\langle x, x\rangle \geq 0$ e inoltre
$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0\,;$$
2. Per ogni $x, y \in H$: $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
3. Per ogni $x, y, z \in H$: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
4. Per ogni $x \in H$ e $\lambda \in \mathbb{K}$: $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\, \langle x, y\rangle$.

Assegnato un prodotto scalare, si può definire la funzione $\| \cdot \| : H \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x \in H$,
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$
Si verifica facilmente che $\| \cdot \|$ è una norma su H, denominata *norma dedotta dal prodotto scalare*.

Si dice che $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ è uno *spazio di Hilbert* se lo spazio normato $(H, \|\cdot\|)$ munito della norma dedotta dal prodotto scalare è uno spazio di Banach.

▷ Assegnato uno spazio normato $(V, \| \cdot \|)$, ci si può chiedere se esiste un prodotto scalare su V tale che la norma da esso dedotta coincida con quella originaria di V.

La risposta a tale domanda è affermativa se e solo se la norma di V verifica la seguente *regola del parallelogramma*
$$\forall\ x, y \in V :\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + \|y\|^2\,.$$

▷ Nel caso degli spazi $L^p(E)$, con E sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, si può riconoscere che la regola del parallelogramma è valida se e solo se $p = 2$. Pertanto $L^2(E)$ può essere munito di un prodotto scalare munito del quale risulta uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : L^2 \times L^2(E) \to \mathbb{C}$ è definito ponendo, per ogni $u, v \in L^2(E)$,
$$\langle u, v\rangle := \int_E u(x)\, \overline{v(x)}\, dx\,.$$

▷ Per ogni $1 \leq p < +\infty$, si può considerare lo spazio ℓ^p delle successioni p-sommabili definito come segue
$$\ell^p := \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p < +\infty\}\,;$$

si pone inoltre

$$\ell^\infty := \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < +\infty\} .$$

Si riconosce facilmente che ℓ^p è uno spazio di Banach munito della norma

$$\|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} , \ 1 \le p < +\infty , \quad \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| .$$

Anche in questo caso la norma $\|\cdot\|_p$ deriva da un prodotto scalare solamente nel caso $p = 2$; in ℓ^2, il prodotto scalare è definito nel modo seguente

$$\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, \overline{b_k} ;$$

lo spazio $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ risulta uno spazio di Hilbert.

▷ Oltre agli esempi di spazi di Hilbert considerati, conviene tenere presente che anche $\mathbb{K}^n$ è uno spazio di Hilbert munito del prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \overline{y_k} ,$$

per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Il prodotto scalare $\langle x, y\rangle$ in $\mathbb{K}^n$ viene spesso brevemente denotato con $x \cdot y$ e la norma da esso dedotta semplicemente con $|\cdot|$.

▷ Si consideri ora un arbitrario spazio di Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Si dice che una successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di H è una *base hilbertiana* di $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se verifica le seguenti proprietà:

1. $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è un *sistema ortonormale* (cioè, per ogni $h, k \in \mathbb{N}$,

$$\langle u_h, u_k \rangle = \delta_{hk} \quad (= \begin{cases} 1 , & h = k ; \\ 0 , & h \neq k ; \end{cases})$$

2. $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è un *sistema di generatori* di H (cioè, per ogni $u \in H$, esiste una successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{K}$ tale che

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, u_k . \tag{3.4.1}$$

▷ Se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una base hilbertiana di $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, per ogni $u \in H$, la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{K}$ verificante la (3.4.1) è unica ed è data da

$$a_k = \langle u, u_k \rangle , \qquad k \in \mathbb{N} .$$

Pertanto

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle u, u_k \rangle \, u_k \ .$$

Valgono inoltre la seguente *uguaglianza di Bessel*

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$$

e l'*uguaglianza di Parseval*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, \overline{b_k} \ , \qquad a_k = \langle u, u_k \rangle \ , \ b_k = \langle v, u_k v \rangle \ .$$

▷ Nello spazio di Hilbert $(L^2([0, 2\pi]), \langle \cdot \, , \cdot \rangle)$, una base hilbertiana è costituita dalla successione $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, dove per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la funzione $u_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

$$u_k(t) := \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \ .$$

3.5 Cenni sugli spazi di Schwartz

Ci si limita ad introdurre alcuni spazi di funzioni con le relative nozioni di convergenza.

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$; assegnata una funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, si denomina *supporto* di φ il seguente insieme

$$\operatorname{Spt} \varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

(quindi il supporto di φ è il più piccolo insieme chiuso al di fuori del quale φ si annulla).

Si dice inoltre che una funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ è a *supporto compatto* se $\operatorname{Spt} \varphi$ è un sottoinsieme compatto (cioè, chiuso e limitato) di $\mathbb{R}^n$.

Si ponga

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \varphi \text{ è a supporto compatto}\}^8$$

Per brevità, si pone inoltre $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Se $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{D}(\Omega)$ e se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si dice che $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge verso φ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se esiste un sottoinsieme compatto $K \subset \Omega$ tale che

[8] Si denota con $C^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni dotate di derivate parziali di ogni ordine in Ω.

1. $\forall\, k \in \mathbb{N}:\ \operatorname{Spt}\varphi_k \subset K$;

2. Per ogni n-pla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ di numeri naturali, la successione $(D^\alpha \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente verso $D^\alpha\varphi$.[9]

Ogni funzionale lineare continuo $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ viene denominato *distribuzione*. Quindi $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ è una distribuzione se verifica le seguenti proprietà

1. Per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ha $T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi)$;

2. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha $T(\lambda\varphi) = \lambda\, T(\varphi)$;

3. Per ogni successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente verso $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, la successione numerica $(T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge verso $T(\varphi)$.

Lo spazio delle distribuzioni viene denotato con $\mathcal{D}'(\Omega)$; si pone inoltre, per brevità, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

▷ Si ponga $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$. Una successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{E}(\Omega)$ converge verso $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ se, per ogni sottoinsieme compatto $K \subset \Omega$ e per ogni multi-indice α, la successione $(D^\alpha\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente verso $D^\alpha\varphi$ in K.

Ogni funzionale lineare continuo $T : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ viene denominato *distribuzione a supporto compatto*.

Lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto viene denotato con $\mathcal{E}'(\Omega)$; si pone inoltre, per brevità, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

▷ Infine, si considera lo *spazio di Schwartz* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ costituito dalle *funzioni a decrescenza rapida*, cioè dalle funzioni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che, considerati due arbitrari multi-indici $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, e definita la funzione $\varphi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) := x^\alpha\, D^\beta\varphi(x)$$

(si ricorda che $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$), si abbia

$$\varphi_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\ .$$

[9] Si ricorda che una n-pla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ di numeri naturali viene denominata *multi-indice* e che la sua *lunghezza* è data da

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\ ;$$

la derivata rispetto ad un multi-indice è definita come segue

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\ .$$

Una successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{S}$ converge verso $\varphi \in \mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ se, considerati due arbitrari multi-indici α e β, la successione $(x^\alpha\, D^\beta \varphi_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente verso $x^\alpha\, D^\beta \varphi(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

Ogni funzionale lineare continuo $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ viene denominato *distribuzione temperata*.

Lo spazio delle distribuzioni temperate viene denotato con $\mathcal{S}'$.

▷ Risulta sempre $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ e conseguentemente $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, si ha inoltre $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ e conseguentemente $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Capitolo 4

La trasformata di Fourier

Nel presente capitolo vengono considerate alcune proprietà elementari della trasformata di Fourier insieme a qualche applicazione.

4.1 Definizioni e prime proprietà

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si definisce *trasformata di Fourier* di u, e si denota con $\mathcal{F}(u)$ (oppure semplicemente con $\hat{u}$), la funzione $\mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx\ . \tag{4.1.1}$$

Si osserva innanzitutto che l'integrale a secondo membro ha senso in quanto $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre, per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $|e^{-ix\cdot\xi}| = 1$.

La trasformata di Fourier è lineare, nel senso che, se $u, v \in L^1(\Omega)$ e se $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha

$$\mathcal{F}(u+v) = \mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v)\ , \qquad \mathcal{F}(\lambda u) = \lambda \mathcal{F}(u)\ ,$$

come segue direttamente dalla linearità dell'integrale in (4.1.1).

Dalla (4.1.1), si ottiene subito, per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \cos(x\cdot\xi)\, dx - i \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \sin(x\cdot\xi)\, dx\ .$$

Pertanto, se u assume valori reali, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(\mathcal{F}(u)(\xi)) &:= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \cos(x\cdot\xi)\, dx\ , \\ \mathrm{Im}\,(\mathcal{F}(u)(\xi)) &:= -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \sin(x\cdot\xi)\, dx\ . \end{aligned}$$

Osservazione 4.1.1 Nel caso $n = 1$, tenendo presente che l'integrale su $\mathbb{R}$ di una funzione dispari è nullo, si ottengono le seguenti proprietà:

1. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è pari, allora $\mathcal{F}(u)$ è pari;

2. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è dispari, allora $\mathcal{F}(u)$ è dispari;

3. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e pari, allora $\mathcal{F}(u)$ è reale e pari;

4. Se $u \in L^1(\mathbb{R})$ è reale e dispari, allora $\mathcal{F}(u)$ è immaginaria e dispari.

Infatti, per quanto riguarda la proprietà 1., è sufficiente osservare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, \cos(-\lambda x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, \cos(\lambda x)\, dx = \mathcal{F}(u)(\lambda)$$

e quindi u è pari (tenendo presente che la funzione coseno è pari, si ha inoltre

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = 2 \int_{0}^{+\infty} u(x)\, \cos(\lambda x)\, dx\ .$$

Analogamente, si dimostra la seconda proprietà e, in tal caso si ha

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = -2i \int_{0}^{+\infty} u(x)\, \sin(\lambda x)\, dx\ .$$

Per quanto riguarda le proprietà 3. e 4., basta tener presente le espressioni già fornite della parte reale e della parte immaginaria di $\mathcal{F}(u)(\lambda)$ ed applicare le proprietà 1. e 2.

Si enunciano ora alcune regole di trasformazione.

1. Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ non singolare. Allora A definisce in modo naturale la trasformazione $x \mapsto A \cdot x$ di $\mathbb{R}^n$ in sé; precisamente, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si pone

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k, \dots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k \right)\ .$$

   Sia ora $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e si definisca la funzione $v(x) := u(A \cdot x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Allora $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(v)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(u)(A^{-T} \cdot \xi)}{|\det A|}\ ,$$

   dove A^{-T} denota l'inversa della trasposta della matrice A.

Infatti, posto $y = A \cdot x$, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u(A\cdot x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(A\cdot x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx \\ &= \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, e^{-i(A^{-1}\cdot y)\cdot\xi}\, dy \\ &= \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, e^{-iy\cdot(A^{-T}\cdot\xi)}\, dy = \frac{\mathcal{F}(u)(A^{-T}\cdot\xi)}{|\det A|}\ .\end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui $n = 1$, la proprietà precedente si può esprimere come segue, per ogni $a \neq 0$,

$$\mathcal{F}(u(ax))(\lambda) = \frac{1}{|a|}\,\mathcal{F}(u)\left(\frac{\lambda}{a}\right)\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

2. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x-a)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x-a))(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(u)(\xi)\ .$$

Infatti, posto $y = x - a$, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u(x-a))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x-a)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, e^{-i(y+a)\cdot\xi}\, dy \\ &= e^{-ia\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, e^{-iy\cdot\xi}\, dy = e^{-ia\cdot\xi}\,\mathcal{F}(u)(\xi)\ .\end{aligned}$$

3. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $e^{ia\cdot x}u(x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(e^{ia\cdot x}u(x))(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi - a)\ .$$

4. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x)\,\cos(a\cdot x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x)\,\cos(a\cdot x))(\xi) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(u)(\xi - a) + \mathcal{F}(u)(\xi + a)\right)\ .$$

5. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x)\,\sin(a\cdot x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x)\,\sin(a\cdot x))(\xi) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{F}(u)(\xi - a) - \mathcal{F}(u)(\xi + a)\right)\ .$$

Le proprietà 3. e 4. precedenti si dimostrano procedendo come nelle proprietà 1. e 2.

▷ Seguono a questo punto alcune proprietà di regolarità della trasformata di Fourier.

1. Per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha $\mathcal{F}(u) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre $\|\mathcal{F}(u)\|_\infty \leq \|u\|_1$.

   Infatti, l'ultima stima segue dal fatto che $|e^{-ix\cdot\xi}| = 1$ e pertanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u)\|_\infty &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx \right| \\ &\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\, |e^{-ix\cdot\xi}|\, dx = \|u\|_1 \,. \end{aligned}$$

2. **(Lemma di Riemann-Lebesgue)** Per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \mathcal{F}(u)(\xi) = 0 \,.$$

Dalle proprietà precedenti segue che $\mathcal{F}(u) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e quindi la trasformata di Fourier è una funzione uniformemente continua.

Le proprietà successive, di frequente utilizzo, vengono enunciate per brevità solamente nel caso $n = 1$.

1. Si supponga che $u \in L^1(\mathbb{R})$ e che la funzione $x \cdot u(x)$ sia anch'essa in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}(u) \in C^1(\mathbb{R})$ ed inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{F}(u))'(\lambda) = -i\, \mathcal{F}(x \cdot u(x))(\lambda) \,.$$

2. Si supponga che $u \in C^1(\mathbb{R})$ e che $u, u' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u')(\lambda) = i\,\lambda\, \mathcal{F}(u)(\lambda) \,.$$

▷ Considerato il prodotto di convoluzione $u * v$ di due funzioni $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$u * v(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy \,,$$

risulta $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre

$$\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u) \cdot \mathcal{F}(v) \,.$$

▷ Si considera ora brevemente il problema dell'inversione della trasformata di Fourier. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$; poiché $\mathcal{F}(u) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, per poter

invertire la trasformata di Fourier bisogna richiedere $u \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oltre naturalmente alla condizione $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Imponendo pertanto le condizioni $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, risulta, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)(\xi)\, e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \ .$$

Se si suppongono solamente le condizioni $u, \mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora la formula precedente vale quasi ovunque.

▷ Nello spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di Fourier può essere definita nel modo seguente.

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, per ogni $a > 0$, si consideri la funzione $u \cdot \varphi_{[-a,a]^n}$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n :\ u \cdot \varphi_{[-a,a]^n}(x) = \begin{cases} u(x)\ , & x \in [-a,a]^n\ , \\ 0\ , & x \in \mathbb{R}^n \setminus [-a,a]^n\ . \end{cases}$$

Allora la trasformata $\mathcal{F}(u)$ è definita ponendo, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \lim_{a\to+\infty} \mathcal{F}(u \cdot \varphi_{[-a,a]^n})(\xi) = \lim_{a\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, \varphi_{[-a,a]^n}(x)\, e^{-ux\cdot\xi}\, dx \ .$$

Il limite precedente va inteso nel senso della convergenza in $L^2(\mathbb{R}^n)$ essendo anche $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

4.2 Esempi ed applicazioni

Esempio 4.2.1 Si consideri la trasformata di Fourier della funzione

$$u(x) := e^{-ax^2}\ , \qquad x \in \mathbb{R}\ ,$$

con $a > 0$ fissato.

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+i\lambda x)}\, dx \ .$$

Poiché

$$ax^2 + i\lambda x = \left(\sqrt{a}\, x + i\, \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4a}\ ,$$

ponendo $t := \sqrt{a}\, x$, si ottiene

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \frac{e^{-\lambda^2/(4a)}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i\lambda/(2\sqrt{a}))^2}\, dt \ .$$

A questo punto si osserva che la funzione $f(z) := e^{-z^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ e quindi, per ogni $R > 0$, il suo integrale è nullo lungo il circuito costituito dai segmenti

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) := t\ , && t \in [-R, R]\ ;\\
&\gamma_2(t) := R + it\ , && t \in \left[0, \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}\right]\ ;\\
&\gamma_3(t) := -t + \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}\ , && t \in [-R, R]\ ;\\
&\gamma_4(t) := -R + i\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{a}} - t\right)\ , && t \in \left[0, \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}\right]\ .
\end{aligned}$$

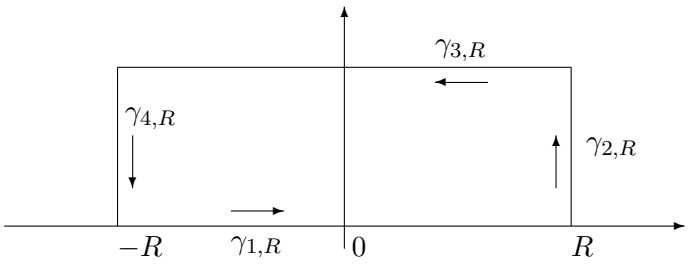


Figura 4.1: *Circuito relativo all'Esempio 4.2.1*

Pertanto, risulta

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} e^{-t^2}\,dt + i\int_0^{\lambda/(2\sqrt{a})} e^{-(R+it)^2}\,dt - \int_{-R}^{R} e^{-(-t+\lambda/(2\sqrt{a}))^2}\,dt \\
-i\int_0^{\lambda/(2\sqrt{a})} e^{-(-R+i(\lambda/(2\sqrt{a})-t))^2}\,dt \;=\; 0\ ;
\end{aligned}$$

tenendo presente che

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\lambda/(2\sqrt{a})} e^{-(R+it)^2}\,dt\right| &\le \frac{\lambda}{2\sqrt{a}} \max_{t\in[0,\lambda/(2\sqrt{a})]} |e^{-(R+it)^2}|\\
&= \frac{\lambda}{2\sqrt{a}} \max_{t\in[0,\lambda/(2\sqrt{a})]} |e^{-(R^2+2iRt-t^2)}|\\
&= \frac{\lambda}{2\sqrt{a}} \max_{t\in[0,\lambda/(2\sqrt{a})]} e^{-R^2+t^2}\\
&= \frac{\lambda}{2\sqrt{a}}\, e^{-R^2+\lambda^2/(4a)}
\end{aligned}$$

per $R \to +\infty$ si ha che l'integrale

$$\int_0^{\lambda/(2\sqrt{a})} e^{-(R+it)^2}\,dt$$

tende a 0; in maniera esattamente analoga si riconosce che anche l'integrale

$$\int_0^{\lambda/(2\sqrt{a})} e^{-(-R+i(\lambda/(2\sqrt{a})-t))^2}\,dt$$

tende a 0 per $R \to +\infty$.[1]

Si conclude quindi che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(-t+\lambda/(2\sqrt{a}))^2}\,dt = 0\ ,$$

da cui, osservato che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(-t+\lambda/(2\sqrt{a}))^2}\,dt = -\int_{\infty}^{-\infty} e^{-(s+\lambda/(2\sqrt{a}))^2}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\lambda/(2\sqrt{a}))^2}\,dt$$

e ricordando che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\ ,$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\lambda/(2\sqrt{a}))^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\ .$$

Quindi

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\lambda^2/(4a)}\ .$$

▷ Con un metodo diverso, si può pervenire all'espressione della trasformata di Fourier di u senza utilizzare il teorema dei residui. Infatti, nel caso in esame, risulta $u \in C^1(\mathbb{R})$ con $u' \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi, dalle proprietà generali delle trasformate di Fourier,

$$\mathcal{F}(u')(\lambda) = i\lambda\,\mathcal{F}(u)(\lambda)\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R}\ ;$$

[1] In realtà, si potrebbe applicare il *teorema di Cauchy-Carnot*: Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa su una semistriscia

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid c_1 \le a\,\mathrm{Re}\,z + b\,\mathrm{Im}\,z \le c_2\ ,\ -b\,\mathrm{Re}\,z + a\,\mathrm{Im}\,z \ge c\}$$

contenuta in Ω e se

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in S}} f(z) = 0\ ,$$

allora anche l'integrale di f lungo il segmento $S \cap \{z \in \mathbb{C} \mid -b\,\mathrm{Re}\,z + a\,\mathrm{Im}\,z = R\}$ tende a 0 per $R \to +\infty$.

Nel caso in esame, si considerano le semistrisce

$$S_+ := \quad z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,z \ge 0\ ,\ 0 \le \mathrm{Im}\,z \le \frac{\lambda}{2\sqrt{a}} \quad ,$$

$$S_- := \quad z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,z \le 0\ ,\ 0 \le \mathrm{Im}\,z \le \frac{\lambda}{2\sqrt{a}} \quad .$$

inoltre anche la funzione $v(x) := x\,u(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$ e pertanto, sempre dalle proprietà generali delle trasformate di Fourier, si ha $\mathcal{F}(u) \in C^1(\mathbb{R})$ e, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)'(\lambda) = -i\,\mathcal{F}(v)(\lambda)\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Dall'equazione $u'(x) = -2ax\,e^{-ax^2} = -2ax\,u(x)$, considerando la trasformata di Fourier di entrambi i membri, si ottiene

$$i\lambda\,\mathcal{F}(u)(\lambda) = \frac{-2a}{-i}\ \mathcal{F}(u)'(\lambda) = -2ai\ \mathcal{F}(u)'(\lambda)$$

da cui

$$\frac{\mathcal{F}(u)'}{\mathcal{F}(u)}(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a}\ .$$

La soluzione generale di tale equazione differenziale lineare del primo ordine è data da

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = c\,e^{-\lambda^2/(4a)}\ , \qquad c \in \mathbb{R}\ ,$$

e tenendo presente che deve essere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u)(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{a}\,e^{-(\sqrt{a}x)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\end{aligned}$$

si ricava $c = \sqrt{\pi/a}$, da cui ancora

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\lambda^2/(4a)}\ .$$

▷ Si osserva ancora che si poteva calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := e^{-x^2}$ e tenere presente che, per ogni $a > 0$, la trasformata di Fourier della funzione $v(x) := u(ax)$ è data da

$$\mathcal{F}(v)(\lambda) = \frac{1}{|a|}\,\mathcal{F}(u)\left(\frac{\lambda}{a}\right)\ ;$$

naturalmente, anche in questo modo si perviene allo stesso risultato.

Esempio 4.2.2 Utilizzando le regole di trasformazione e l'Esempio 4.2.1 precedente, si possono calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definite ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v(x) &:= e^{-a(x-b)^2}\ , && a > 0\ ,\ b \in \mathbb{R}\ ; \\ w(x) &:= e^{icx}e^{-a(x-b)^2}\ , && a > 0\ ,\ b, c \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Infatti, considerata la funzione $u(x) := e^{-ax^2}$ dell'Esempio 4.2.1 precedente, si ha, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v)(\lambda) &= \mathcal{F}(u(x-b))(\lambda) = e^{-ib\lambda}\mathcal{F}(u)(\lambda) \\ &= e^{-ib\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\lambda^2/(4a)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\lambda^2/(4a)-ib\lambda} .\end{aligned}$$

Conseguentemente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(w)(\lambda) = \mathcal{F}(e^{icx}v(x))(\lambda) = \mathcal{F}(v)(\lambda - c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-(\lambda-c)^2/(4a)-ib(\lambda-c)} .$$

Esempio 4.2.3 Siano $a_1, a_2 > 0$, $b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$ e si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) := e^{ic_1x}e^{-a_1(x-b_1)^2}\cos(d_1x) + e^{ic_2x}e^{-a_2(x-b_2)^2}\sin(d_2x) .$$

La trasformata di Fourier è lineare e quindi, considerate le funzioni

$$u_1(x) := e^{ic_1x}e^{-a_1(x-b_1)^2}\cos(d_1x) , \quad u_2(x) = e^{ic_2x}e^{-a_2(x-b_2)^2}\sin(d_2x) ,$$

risulta

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_1) + \mathcal{F}(u_2) .$$

Dalle regole di trasformazione e tenendo presente l'Esempio 4.2.2 precedente, si ottiene

$$\mathcal{F}(u_1)(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a_1}}\, e^{-(\lambda-c_1-d_1)^2/(4a_1)-ib_1(\lambda-c_1-d_1)} ,$$

$$\mathcal{F}(u_2)(\lambda) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\pi}{a_2}}\, e^{-(\lambda-c_2-d_2)^2/(4a_2)-ib_2(\lambda-c_2-d_2)} ,$$

da cui si ricava $\mathcal{F}(u)(\lambda)$.

Esempio 4.2.4 Sia $a > 0$ e si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) := \begin{cases} e^{-ax} , & x \geq 0 ; \\ 0 , & x < 0 . \end{cases}$$

Allora $u \in L^1(\mathbb{R})$ e, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\lambda)x}\, dx = \lim_{r\to+\infty}\left[\frac{e^{-(a+i\lambda)x}}{-(a+i\lambda)}\right]_0^r = \frac{1}{a+i\lambda} .$$

Se si considera la funzione

$$v(x) := \begin{cases} 0 , & x > 0 ; \\ e^{ax} , & x \leq 0 , \end{cases}$$

si ha $v \in L^1(\mathbb{R})$ e analogamente, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathcal{F}(v)(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\lambda)x}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{e^{(a-i\lambda)x}}{(a-i\lambda)}\right]_{-r}^{0} = \frac{1}{a-i\lambda}\ .$$

Dalle due trasformate precedenti e dalla linearità della trasformata di Fourier, si ottiene anche, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\lambda) = \mathcal{F}(u)(\lambda) + \mathcal{F}(v)(\lambda) = \frac{1}{a+i\lambda} + \frac{1}{a-i\lambda} = \frac{2a}{a^2+\lambda^2}\ .$$

Esempio 4.2.5 Sia $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) := \frac{1}{a^2+x^2}\ .$$

Si osserva innanzitutto che $u \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi si può considerare la trasformata di Fourier di u.

Si ha, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\, e^{-i\lambda x}\, dx\ .$$

Si supponga in una prima fase $\lambda \geq 0$ e si considerino $R > |a|$, la funzione $u(z) := e^{-i\lambda z}/(a^2+z^2)$ ed il circuito costituito dai cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := Re^{-it}\ , \quad t \in [0,\pi]\ , \qquad\qquad \gamma_{2,R}(t) := t\ , \quad t \in [-R,R]\ .$$

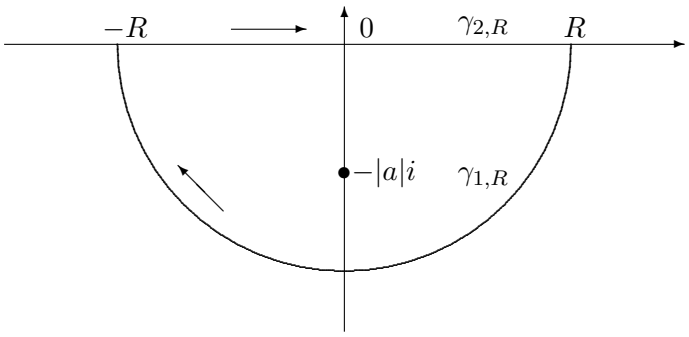


Figura 4.2: *Circuito relativo all'Esempio 4.2.5*

Poiché u ha un polo del primo ordine in $-|a|i$, dal teorema dei residui segue

$$\int_{\gamma_{1,R}} u(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,R}} u(z)\, dz = -2\pi i\ \mathrm{Res}\,(u; -|a|i)$$

(il segno negativo è dovuto al fatto che il circuito è orientato in senso orario) ed inoltre

$$\mathrm{Res}\,(u;-|a|i) = \lim_{z\to -|a|i} \frac{e^{-i\lambda z}}{z-|a|i} = -\frac{e^{-|a|\lambda}}{2|a|i}$$

da cui

$$\int_{\gamma_{1,R}} u(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} u(z)\,dz = \frac{\pi\, e^{-|a|\lambda}}{|a|}\ .$$

La funzione $e^{-i\lambda z}$ è limitata sul semipiano $\mathrm{Im}\, z \le 0$ in quanto, se $z = x+iy$ con $y \le 0$, risulta $|e^{-i\lambda z}| = |e^{-i\lambda x}e^{\lambda y}| = |e^{\lambda y}| \le 1$ (si è scelto $\lambda \ge 0$ ed un circuito contenuto nel semipiano delle parti immaginarie negative proprio per far valere la limitatezza di $e^{-i\lambda z}$) e pertanto si ha $\lim_{|z|\to+\infty} u(z) = 0$. Quindi, per il teorema di Jordan sul grande cerchio, l'integrale di u lungo il cammino $\gamma_{1,R}$ tende a 0 per $R \to +\infty$.

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{a^2+t^2}\,dt = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} u(z)\,dz = \frac{\pi\, e^{-|a|\lambda}}{|a|}$$

da cui, per ogni $\lambda \ge 0$,

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \frac{\pi\, e^{-|a|\lambda}}{|a|}\ .$$

La funzione $\mathcal{F}(u)$ deve essere pari e quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(\lambda) = \frac{\pi\, e^{-|a\lambda|}}{|a|}\ .$$

▷ Alternativamente, si poteva anche utilizzare la formula di inversione applicata alla trasformata trovata nell'Esempio 4.2.4 precedente; infatti sia la funzione considerata che la sua trasformata sono in $L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})\cap C_0(\mathbb{R})$. Si supponga, per semplicità, $a > 0$; essendo, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\lambda) = \frac{2a}{a^2+\lambda^2}\ ,$$

si ottiene, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{-a|x|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+\lambda^2}\, e^{ix\lambda}\,d\lambda \\ &= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+\lambda^2}\, e^{ix\lambda}\,d\lambda \\ &= \frac{a}{\pi}\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+\lambda^2}\right)(-x) \end{aligned}$$

e quindi, invertendo i ruoli delle variabili λ ed x, si ha

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(-\lambda) = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|\lambda|} \qquad \left(= \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\lambda)\ \right).$$

4.3 Applicazioni alla risoluzione di problemi differenziali

Il vantaggio di applicare la trasformata di Fourier ad un'equazione differenziale deriva dal fatto che l'operazione di derivazione viene trasformata nel prodotto della funzione per la variabile indipendente.

Si consideri, ad esempio, un'equazione lineare di ordine n a coefficienti costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f(x) \; ;$$

supponendo che u sia di classe $C^n(\mathbb{R})$ e che sia sommabile con tutte le sue derivate fino all'ordine n, si può considerare la trasformata di Fourier di u e delle sue derivate. Applicando ripetutamente la regola di trasformazione della derivata prima, si ha

$$\mathcal{F}(u')(\lambda) = i\lambda\,\mathcal{F}(u)(\lambda) \; , \; \mathcal{F}(u'')(\lambda) = -\lambda^2\,\mathcal{F}(u)(\lambda) \; , \; \ldots ,$$

$$\mathcal{F}(u^{(n)})(\lambda) = (i\lambda)^n\,\mathcal{F}(u)(\lambda) \; ,$$

e quindi, posto $v = \mathcal{F}(u)$ e $g = \mathcal{F}(f)$, si ottiene l'equazione algebrica

$$((i\lambda)^n + a_{n-1}(i\lambda)^{n-1} + \cdots + a_1 i\lambda + a_0)\, v = g(\lambda)$$

che può essere risolta facilmente. A questo punto tuttavia, per determinare la soluzione u bisogna considerare la trasformata inversa di Fourier di v.

Capitolo 5

La trasformata di Laplace

Nel presente capitolo si considera brevemente un ulteriore tipo di trasformata che in diverse applicazioni, come per la risoluzione di equazioni differenziali, presenta dei vantaggi rispetto alla trasformata di Fourier.

Anche per la trasformata di Laplace ci si limita a considerare le proprietà più immediate insieme a qualche esempio ed applicazione.

Nel seguito del capitolo si seguirà la convenzione di denotare con lettere maiuscole le funzioni assegnate e con la corrispondente lettera minuscola la relativa trasformata di Laplace.

5.1 Proprietà generali

Sia $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione arbitraria (F può essere definita anche in un insieme contenente $[0, +\infty[$ purché il suo supporto $\mathrm{Spt}(F)$ sia contenuto in $[0, +\infty[$).

Si dice che F è *$\mathcal{L}$-trasformabile* oppure *trasformabile secondo Laplace* se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $F_\lambda(t) := F(t)\, e^{-\lambda t}$ sia sommabile (cioè, $F_\lambda \in L^1([0, +\infty[)$).

In tal caso, si possono definire l'*insieme di convergenza assoluta*

$$\Omega_F := \{s \in \mathbb{C} \mid F_s \in L^1([0, +\infty[)\}$$

e la funzione $\mathcal{L}(F) : \Omega_F \to \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $s \in \Omega_F$,

$$\mathcal{L}(F)(s) := \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-st}\, dt\ .$$

Tale funzione viene denominata *trasformata di Laplace* di F; talvolta viene denotata semplicemente con il simbolo f.

Si riconosce facilmente che, se $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Omega_F$, allora per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s \geq \lambda$, si ha ancora $F_s \in L^1([0, +\infty[)$ e quindi $s \in \Omega_F$.

Infatti, è sufficiente tener presente che

$$\int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-\lambda t}\, e^{(-\mathrm{Re}\, s+\lambda)t}\, e^{-i(\mathrm{Im}\, s)t}\, dt$$

e che il secondo membro è sommabile in quanto la funzione $F(t)\, e^{-\lambda t}$ è sommabile e la funzione $e^{(-\mathrm{Re}\, s+\lambda)t}$ è limitata (anzi, compresa tra 0 e 1 ed infinitesima per $t \to +\infty$ se $\mathrm{Re}\, s > \lambda$ ed uguale costantemente ad 1 se $\mathrm{Re}\, s = \lambda$); inoltre, per quanto riguarda la funzione $e^{-i(\mathrm{Im}\, s)t}$, si ha ovviamente $|e^{-i(\mathrm{Im}\, s)t}| = 1$ e quindi è anch'essa limitata.

Pertanto, considerata l'*ascissa di convergenza assoluta* di F

$$\lambda_F := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_\lambda \in L^1([0, +\infty[)\} \ ,$$

con la convenzione $\lambda_F := -\infty$ se l'insieme $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid F_\lambda \in L^1([0, +\infty[)\}$ non è limitato inferiormente, valgono le seguenti proprietà

1. Se $\lambda_F = -\infty$, allora $\Omega_F = \mathbb{C}$;

2. Se $\lambda_F \in \mathbb{R}$, allora

   i) Il semipiano $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > \lambda_F\}$ è contenuto in Ω_F (cioè, la trasformata di Laplace è definita per $\mathrm{Re}\, s > \lambda_F$);

   ii) Il semipiano $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s < \lambda_F\}$ ha intersezione vuota con Ω_F (cioè, la trasformata di Laplace non è definita in alcun punto $\mathrm{Re}\, s < \lambda_F$).

Considerato $\lambda \in \Omega_F \cap \mathbb{R}$, la trasformata di Laplace è quindi definita su tutta la retta $\{\lambda + i\mu \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ e risulta, per ogni $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(F)(\lambda + i\mu) = \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-\lambda t}\, e^{-i\mu t}\, dt = \mathcal{F}(F_\lambda)(\mu) \ .$$

La formula precedente esprime un legame tra la trasformata di Laplace e quella di Fourier; in essa, la funzione F viene intesa estesa a tutto $\mathbb{R}$ assumendo il valore 0 in $]-\infty, 0[$, per cui l'integrale su $[0, +\infty[$ coincide con quello su tutta la retta come previsto nella trasformata di Fourier.

Si può pertanto affermare che se $\lambda_F \in \Omega_F$, allora ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s = \lambda_F$ è ancora in Ω_F e quindi in questo caso Ω_F coincide con il semipiano chiuso $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s \geq \lambda_F\}$.

Se $\lambda_F \notin \Omega_F$, si può dire solamente che

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > \lambda_F\} \subset \Omega_F \subset \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s \geq \lambda_F\} \ .$$

Seguono ora alcune proprietà elementari della trasformata di Laplace.

1. Se $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile, allora $\mathcal{L}(F)$ è olomorfa nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \lambda_F\}$ e si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \lambda_F$,

$$\mathcal{L}(F)^{(k)}(s) = (-1)^k \, \mathcal{L}(t^k \, F(t))(s) \; .$$

   Inoltre

$$\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} \mathcal{L}(F)(s) = 0 \; .$$

2. Siano $F, G : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili. Allora, per ogni $s \in \Omega_F \cap \Omega_G$,

$$\mathcal{L}(F + G)(s) = \mathcal{L}(F)(s) + \mathcal{L}(G)(s) \; .$$

   Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(\alpha F) = \alpha \, \mathcal{L}(F) \; .$$

   La presente proprietà esprime la linearità della trasformata di Laplace, anche se la trasformata della somma può non essere definita nello stesso insieme di convergenza della trasformata di F o di G.

▷ A questo punto possono essere enunciate alcune regole di trasformazione.

1. Se $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e se $a > 0$, allora la funzione $G(t) := F(at)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > a\lambda_F$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = \frac{1}{a} \, \mathcal{L}(F) \left(\frac{s}{a} \right) \; .$$

   Infatti, effettuando la sostituzione $\tau = at$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} G(t) \, e^{-st} \, dt &= \int_0^{+\infty} F(at) \, e^{-st} \, dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} F(\tau) \, e^{-s\tau/a} \, d\tau = \frac{1}{a} \, \mathcal{L}(F) \left(\frac{s}{a} \right) \; ; \end{aligned}$$

   si osservi che per l'ultima uguaglianza è necessario imporre $\operatorname{Re}(s/a) > \lambda_F$ e quindi, poiché a è reale, $\operatorname{Re} s > a\lambda_F$.

2. Se $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e se $a > 0$, allora la funzione $G(t) := F(t - a)$ (F viene considerata nulla in $[0, a[$) è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > \lambda_F$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = e^{-as} \, \mathcal{L}(F)(s) \; .$$

Infatti, effettuando la sostituzione $\tau = t - a$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} G(t)\, e^{-st}\, dt &= \int_0^{+\infty} F(t-a)\, e^{-st}\, dt \\ &= e^{-as} \int_0^{+\infty} F(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-as}\, \mathcal{L}(F)(s)\ .\end{aligned}$$

3. Se $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e se $\alpha \in \mathbb{C}$, allora la funzione $G(t) := e^{\alpha t} F(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > \lambda_F + \operatorname{Re} \alpha$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = \mathcal{L}(F)(s - \alpha)\ .$$

Infatti

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} G(t)\, e^{-st}\, dt &= \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{\alpha t}\, e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} F(t)\, e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \mathcal{L}(F)(s-\alpha)\ .\end{aligned}$$

▷ Per enunciare le proprietà successive, è necessario ricorrere ad alcune ulteriori proprietà delle funzioni ed all'introduzione di nuovi spazi di funzioni.

Innanzitutto, siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f è *assolutamente continua* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, assegnato un numero finito di intervalli aperti e a due a due disgiunti $I_j =]a_j, b_j[\subset I$, $j = 1, \ldots, m$, se vale la condizione $\sum_{j=1}^m (b_j - a_j) < \delta$, allora deve essere anche $\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$.

Dalla definizione precedente segue subito che una funzione assolutamente continua è anche uniformemente continua (basta considerare nella definizione il caso $m = 1$) e quindi continua.

Una caratterizzazione semplice delle funzioni assolutamente continue si esprime dicendo che f è assolutamente continua se e solo se è derivabile quasi ovunque e $f' \in L^1(I)$ (quindi le funzioni assolutamente coincidono con le primitive delle funzioni in $L^1(I)$).

L'insieme delle funzioni assolutamente continue su I viene denotato con $\mathrm{AC}\,(I)$.

In diverse circostanze, si è interessati a proprietà locali per cui non è importante che la funzione assegnata sia assolutamente continua in tutto il suo insieme di definizione, ma solamente in un intorno di ogni punto prefissato.

Pertanto, si dice che una funzione $f : I \to \mathbb{C}$ è *localmente assolutamente continua* se è assolutamente continua in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I.

L'insieme delle funzioni localmente assolutamente continue su I viene denotato con $\mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(I)$.

Introdotto lo spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ delle funzioni localmente sommabili su I (cioè delle funzioni che sono sommabili in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I), si ha che $f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(I)$ se e solo se f è derivabile quasi ovunque e $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ (quindi le funzioni localmente assolutamente coincidono con le primitive delle funzioni in $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$).

Per quanto riguarda le proprietà delle trasformate di Laplace, si è ovviamente interessati agli spazi $\mathrm{AC}([0,+\infty[)$ e $\mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[)$.

Teorema 5.1.1 *Sia $F : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e si supponga che $F \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[)$ e che F' sia $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \lambda_F$, si ha*

$$\mathcal{L}(F')(s) = s\,\mathcal{L}(F)(s) - F(0)\ .^1$$

Teorema 5.1.2 *Sia $F : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \max\{0, \lambda_F\}$, si ha*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t F(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}(F)(s)\ .$$

Teorema 5.1.3 *Sia $F : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e si supponga che anche la funzione $F(t)/t$ sia $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \max\{0, \lambda_F\}$, si ha*

$$\mathcal{L}\left(\frac{F(t)}{t}\right)(s) = \int_{\mathrm{Re}\, s + i\mathrm{Im}\, s}^{+\infty + i\mathrm{Im}\, s} \mathcal{L}(F)(\sigma)\,d\sigma$$

(quindi l'integrazione va calcolata sulla parte reale di s da $\mathrm{Re}\, s$ a $+\infty$).

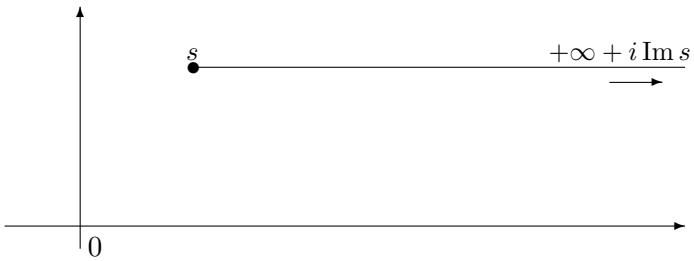


Figura 5.1: *Semiretta di integrazione relativa al Teorema 5.1.3*

Teorema 5.1.4 *Sia $F : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e si supponga che $F \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[)$ e che F' sia $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora*

[1] Se F è definita anche in un intorno sinistro di 0, bisogna considerare $F(0^+) = \lim_{t\to 0^+} F(t)$ anziché $F(0)$.

1. ***(Valore iniziale)*** $\lim_{\mathrm{Re}\, s \to +\infty} s\,\mathcal{L}(F)(s) = F(0) \quad \in \mathbb{C}$;

2. ***(Valore finale)*** *Se si suppone in più* $F \in \mathrm{AC}([0,+\infty[)$*, allora il seguente limite*

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) =: F(+\infty)$$

esiste in $\mathbb{C}$*; inoltre* F *è limitata,* $\lambda_F \leq 0$ *e*

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ \mathrm{Re}\, s > 0}} s\,\mathcal{L}(F)(s) = F(+\infty) \ .$$

▷ Si può riconoscere che se $F, G : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ sono funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili, si può considerare il *prodotto di convoluzione* $F * G : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ definito ponendo, per ogni $t \in [0,+\infty[$,

$$F * G(t) := \int_0^t F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau \ .$$

Allora $F * G$ è anch'esso $\mathcal{L}$-trasformabile con $\lambda_{F*G} = \max\{\lambda_F, \lambda_G\}$ e inoltre, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \lambda_{F*G}$, si ha

$$\mathcal{L}(F * G)(s) = \mathcal{L}(F)(s)\, \mathcal{L}(G)(s) \ .$$

In particolare, si consideri la *funzione di Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) := \begin{cases} 1 \ , & t > 0 \ ; \\ 0 \ , & t \leq 0 \ . \end{cases}$$

Allora, la formula precedente applicata con $G := H$ fornisce

$$\mathcal{L}(F * H)(s) = \frac{\mathcal{L}(F)(s)}{s} \ ,$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \max\{0, \lambda_F\}$. Tenendo presente che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F * H)(s) &= \mathcal{L}\left(\int_0^{+\infty} F(t-\tau)\, d\tau \right)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t F(t-\tau)\, d\tau \right)(s) \\ &= \mathcal{L}\left(-\int_t^0 F(r)\, dr \right)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t F(r)\, dr \right)(s) \end{aligned}$$

(si è tenuto conto del fatto che F si annulla in $]-\infty, 0[$ e si è applicato il cambiamento di variabile $r = t - \tau$), si ritrova il risultato ottenuto nel Teorema 5.1.2.

5.2 Inversione della trasformata di Laplace

Sia $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa assoluta di convergenza λ_F e si supponga che esista un sottoinsieme finito $H \subset [0, +\infty[$ tale che F sia derivabile in $[0, +\infty[\backslash H$ ed inoltre nei punti di H esistano e siano finiti i limiti sinistro e destro di F e le derivate sinistra e destra di F (se F non è continua in t, posto $F(t^+) =: \lim_{\tau \to t^+} F(\tau)$ e analogamente $F(t^-) := \lim_{\tau \to t^-} F(\tau)$, la derivata destra è da intendersi come il seguente limite $F'_+(t) := \lim_{\tau \to t^+} (F(\tau) - F(t^+))/(t - \tau)$ e analogamente la derivata sinistra è data da $F'_-(t) := \lim_{\tau \to t^-} (F(\tau) - F(t^-))/(t - \tau)$).

Allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $a > \lambda_F$ e per ogni $t > 0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \ (v.p.) \int_{a-i\,\infty}^{a+i\,\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, e^{st}\, ds = \frac{F(t^+) + F(t^-)}{2} \ .$$

Quindi, l'integrale è calcolato sulla retta verticale $\operatorname{Re} s = a$.

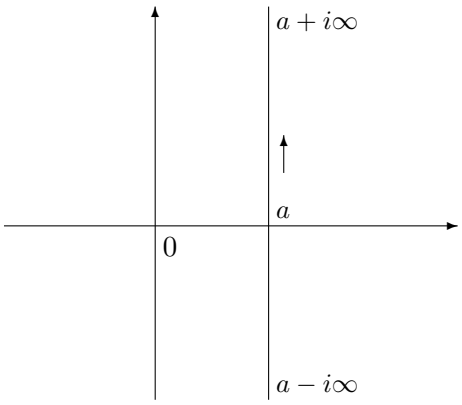


Figura 5.2: *Retta di integrazione per la trasformata inversa di Laplace*

Nel caso in cui F è continua in $t > 0$, la formula precedente diventa

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \ (v.p.) \int_{a-i\,\infty}^{a+i\,\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, e^{st}\, ds \ .$$

Quest'ultima formula fornisce la funzione F in termini della sua trasformata di Laplace. Seguono ora alcune condizioni sufficienti per la sua validità.

Teorema 5.2.1 *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e si supponga che $f : \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \lambda\} \to \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa per cui esistono $M > 0$ ed $\alpha > 1$ tali che*

$$\forall\ s \in \mathbb{C}\ ,\ \operatorname{Re} s > \lambda :\ |f(s)| \leq \frac{M}{1 + |s|^\alpha} \ .$$

Allora esiste una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e continua $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ tale che

1. $\lambda_F \leq \lambda$ *ed inoltre, per ogni* $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$, $f(s) = \mathcal{L}(F)(s)$.

2. *Per ogni* $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > \lambda$ *e per ogni* $t \geq 0$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\ (v.p.) \int_{a-i\,\infty}^{a+i\,\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, e^{st}\, ds\ .$$

Teorema 5.2.2 *Sia* $\lambda \geq 0$ *e si supponga che* $g : \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \lambda\} \to \mathbb{C}$ *sia una funzione olomorfa per cui esistono* $M > 0$ *ed* $\alpha > 1$ *tali che*

$$\forall\ s \in \mathbb{C}\ ,\ \operatorname{Re} s > \lambda :\ |g(s)| \leq \frac{M}{1 + |s|^{\alpha}}\ .$$

Sia inoltre $c \in \mathbb{C}$ *e si consideri la funzione* $f : \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \lambda\} \to \mathbb{C}$ *definita ponendo, per ogni* $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$,

$$f(s) := \frac{c}{s} + g(s)\ .$$

Allora esiste una funzione $\mathcal{L}$*-trasformabile e continua* $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *tale che*

1. $\lambda_F \leq \lambda$ *ed inoltre, per ogni* $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$, $f(s) = \mathcal{L}(F)(s)$.

2. *Per ogni* $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > \lambda$ *e per ogni* $t \geq 0$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\ (v.p.) \int_{a-i\,\infty}^{a+i\,\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, e^{st}\, ds\ .$$

▷ Si osserva che una funzione razionale

$$f(s) := \frac{P(s)}{Q(s)}$$

con P e Q polinomi tali che $\deg P < \deg Q$ verifica le condizioni previste nel teorema precedente e quindi è una trasformata di Laplace, la cui trasformata inversa F può essere determinata decomponendo f in una somma di fratti semplici (cioè, con denominatori di grado 1).

In particolare, se Q ha solamente zeri del primo ordine $z_1, \ldots, z_m$, vale la seguente *formula di Heaviside:*

$$F(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}\, e^{z_k t}\ , \qquad t \geq 0\ .$$

5.3 Applicazioni alla risoluzione di problemi differenziali

Come prima applicazione si consideri un problema di Cauchy relativo ad un'equazione lineare di ordine n a coefficienti costanti

$$\begin{cases} Y^{(n)} + a_{n-1}Y^{(n-1)} + \cdots + a_1 Y' + a_0 Y = F(t) \ ; \\ Y(0) = y_0 \ ; \\ \vdots \\ Y^{n-1}(0) = y_{n-1} \ . \end{cases}$$

Posto $y = \mathcal{L}(Y)$ ed $f = \mathcal{L}(F)$ e supponendo che sia Y che le sue derivate fino all'ordine $n-1$ siano localmente assolutamente continue, si può applicare il Teorema 5.1.1 e si ottiene

$$\mathcal{L}(Y')(s) = s\,\mathcal{L}(Y)(s) - Y(0) = s\,y(s) - y_0 \ ,$$

$$\mathcal{L}(Y'')(s) = s\,\mathcal{L}(Y')(s) - Y'(0) = s^2\,y(s) - s\,y_0 - y_1 \ , \ldots ,$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y^{(n)})(s) &= s\,\mathcal{L}(Y^{(n-1)})(s) - Y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n\,y(s) - s^{n-1}\,y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - s\,y_{n-2} - y_{n-1} \ . \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene un'equazione algebrica del tipo

$$Q(s) + P(s)\,y = f \ ,$$

dove Q è un polinomio di grado $n-1$ che dipende dai coefficienti dell'equazione e dalle condizioni iniziali e $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1\,s + a_0$ è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale.

Si ottiene quindi

$$y(s) = \frac{f(s) - Q(s)}{P(s)}$$

ed applicando la formula di inversione

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(s) - Q(s)}{P(s)}\,e^{st}\,ds \ .$$

5.4 Esempi ed applicazioni

Al fine di considerare funzioni con supporto in $[0, +\infty[$, si ricorda che la *funzione di Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) := \begin{cases} 1 \ , & t > 0 \ ; \\ 0 \ , & t \leq 0 \ . \end{cases}$$

Esempio 5.4.1 La trasformata di Laplace della funzione di Heaviside ha ascissa di convergenza assoluta $\lambda_H = 0$ e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$, risulta

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s} .$$

Infatti, $e^{-\lambda t}$ è sommabile in $[0, +\infty[$ se e solo se $\lambda > 0$; inoltre, se $s \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re} s > 0$, si ha

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_0^{+\infty} H(t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{R \to +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^R = \frac{1}{s} .$$

Esempio 5.4.2 Dall'esempio precedente ed applicando le regole generali di trasformazione, si ricavano facilmente le seguenti trasformate di Laplace.

Per ogni $a > 0$, la funzione

$$F(t) := H(t-a) = \begin{cases} 1 , & t > a ; \\ 0 , & t \le a , \end{cases}$$

è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha $\lambda_F = 0$ e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{e^{-as}}{s} .$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, la funzione $G(t) := e^{\alpha t} F(t)$ è anch'essa $\mathcal{L}$-trasformabile, $\lambda_G = \operatorname{Re} \alpha$ e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = \mathcal{L}(F)(s-\alpha) = \frac{e^{-a(s-\alpha)}}{s-\alpha} .$$

Le trasformate precedenti possono essere facilmente ricavate direttamente dalla definizione.

Esempio 5.4.3 Sia $\omega > 0$ e si considerino le funzioni $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) := H(t)\, \cos(\omega t) = \begin{cases} \cos(\omega t) , & t > 0 ; \\ 0 , & t \le 0 ; \end{cases}$$

$$G(t) := H(t)\, \sin(\omega t) = \begin{cases} \sin(\omega t) , & t > 0 ; \\ 0 , & t \le 0 . \end{cases}$$

Quindi $F(t) = H(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ e analogamente $G(t) = H(t)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/(2i)$; utilizzando la linearità della trasformazione di Laplace e le regole di trasformazione si ottiene allora che F e G sono $\mathcal{L}$-trasformabili e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$ $(= \operatorname{Re}(i\omega))$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F)(s) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}(H(t)\, e^{i\omega t})(s) + \mathcal{L}(H(t)\, e^{-it})(s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(G)(s) &= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}(H(t)\,e^{i\omega t})(s) - \mathcal{L}(H(t)\,e^{-it})(s)\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Esempio 5.4.4 Sia $k \in \mathbb{N}$ e si consideri la funzione

$$F(t) := t^k\,H(t) = \begin{cases} t^k\,, & t > 0\,;\\ 0\,, & t \le 0\,.\end{cases}$$

Utilizzando il fatto che la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside è olomorfa e, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathcal{L}(H)^{(k)}(s) = (-1)^k\,\mathcal{L}(t^k\,H(t))(s)\,, \qquad \operatorname{Re} s > 0\,,$$

si ottiene direttamente che la funzione F è $\mathcal{L}$-trasformabile ed inoltre, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\mathcal{L}(F)(s) = (-1)^k\,\mathcal{L}(H)^{(k)}(s) = (-1)^k\,D^k\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^k\,(-1)^k\,\frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

(la penultima uguaglianza si riconosce facilmente procedendo per induzione su $k \in \mathbb{N}$).

Esempio 5.4.5 Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'' + Y = t\,,\\ Y(0) = -1\,,\\ Y'(0) = 1\,.\end{cases}$$

Posto $y = \mathcal{L}(Y)$, dalla regola di trasformazione delle derivate e tenendo presenti le condizioni iniziali imposte, risulta

$$Y' = s\,y - Y(0) = s\,y + 1$$

e conseguentemente

$$Y'' = s\,(s\,y+1) - Y'(0) = s^2\,y + s - 1\,.$$

Inoltre, la trasformata di Laplace della funzione $F(t) = t$ è $f(s) = 1/s^2$ (vedasi l'Esempio 5.4.4 precedente) e quindi si ottiene l'equazione $s^2\,y + s - 1 + y = 1/s^2$, da cui

$$y = \frac{1}{s^2(1+s^2)} + \frac{1-s}{1+s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} + \frac{1}{1+s^2} - \frac{s}{1+s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{s}{1+s^2}\,.$$

Dagli esempi precedenti, si ricava che

$$\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t)(s) \ , \qquad \frac{s}{1+s^2} = \mathcal{L}(\cos t)(s) \ ,$$

e quindi si ottiene la soluzione richiesta

$$Y(t) = t - \cos t \ .$$

▷ Si osservi che per determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $Y'' + Y = t$, è sufficiente considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Y'' + Y = t \ , \\ Y(0) = c_1 \ , \\ Y'(0) = c_2 \ , \end{cases}$$

analogo a quello già risolto, ma con condizioni iniziali arbitrarie. Procedendo in maniera analoga si trova infatti $Y' = s\,y - c_1$, $Y'' = s^2\,y - c_1\,s - c_2$, e si ottiene l'equazione $s^2\,y - c_1\,s - c_2 + y = 1/s^2$, da cui

$$y = \frac{1}{s^2(1+s^2)} + \frac{c_1\,s + c_2}{1+s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} + c_1\,\frac{s}{1+s^2} + c_2\,\frac{1}{1+s^2} \ ;$$

pertanto $Y = t + (c_2 - 1)\,\sin t + c_1 \cos t$.

Può essere utile ricorrere alla soluzione generale anche nei casi in cui le condizioni iniziali non vengano imposte nel punto 0 (in questo caso si può trovare la soluzione generale e successivamente determinare la soluzione richiesta imponendo le condizioni iniziali) oppure nei casi in cui le condizioni iniziali non siano quelle del problema di Cauchy (ad esempio, potrebbero essere imposte le condizioni $Y(a) = \alpha$ e $Y(b) = \beta$ con $a \neq b$).

Esempio 5.4.6 Si risolva la seguente equazione differenziale

$$Y^{(3)} - 3Y'' + 2Y' = t^3 e^{-t} \ .$$

Come osservato alla fine dell'Esempio 5.4.5 precedente, conviene considerare il seguente problema di Cauchy con condizioni iniziali arbitrarie nel punto 0:

$$\begin{cases} Y^{(3)} - 3Y'' + 2Y' = t^3 e^{-t} \ , \\ Y(0) = c_1 \ , \\ Y'(0) = c_2 \ , \\ Y''(0) = c_3 \ . \end{cases}$$

Posto $y = \mathcal{L}(Y)$, dalla regola di trasformazione delle derivate e tenendo presenti le condizioni iniziali imposte, risulta

$$Y' = s\,y - Y(0) = s\,y - c_1$$

e conseguentemente

$$Y'' = s\,(s\,y - c_1) - Y'(0) = s^2\,y - c_1\,s - c_2\ ,$$

$$Y^{(3)} = s\,(s^2\,y - c_1\,s - c_2) - Y''(0) = s^3\,y - c_1\,s^2 - c_2\,s - c_3\ .$$

Inoltre, la trasformata di Laplace della funzione $F(t) = t^3$ è $f(s) = 6/s^4$ (vedasi l'Esempio 5.4.4 precedente) e quindi dalle regole di trasformazione, la trasformata di Laplace della funzione $G(t) = t^3\,e^{-t}$ è $g(s) = f(s+1) = 6/(s+1)^4$ (con $\lambda_G = -1$). Si ottiene pertanto l'equazione $s^3\,y - c_1\,s^2 - c_2\,s - c_3 - 3(s^2\,y - c_1\,s - c_2) + 2(s\,y - c_1) = 6/(s+1)^4$, da cui

$$y = \frac{c_1\,s^2 + (c_2 - 3c_1)s + c_3 - 3c_2 + 2c_1}{s(s-1)(s-2)} + \frac{6}{s(s-1)(s-2)(s+1)^4}\ .$$

Infine, decomponendo la funzione a secondo membro con la regola di Hermite

$$\begin{aligned} y \;=\; & \frac{6 + 2c_1 - 3c_2 + c_3}{2s} - \frac{3 - 16c_2 + 8c_3}{8(s-1)} + \frac{2 - 27c_2 + 27c_3}{54(s-2)} \\ & - \frac{1}{(s+1)^4} - \frac{11}{6(s+1)^3} - \frac{85}{36(s+1)^2} - \frac{575}{216(s+1)}\ . \end{aligned}$$

Considerando infine la trasformazione inversa di Laplace si ottiene

$$\begin{aligned} Y(t) \;=\; & \frac{6 + 2c_1 - 3c_2 + c_3}{2} - \frac{3 - 16c_2 + 8c_3}{8}\,e^{t} + \frac{2 - 27c_2 + 27c_3}{54}\,e^{2t} \\ & - \frac{1}{6}\,t^3 e^{-t} - \frac{11}{12}\,t^2 e^{-t} - \frac{85}{36}\,te^{-t} - \frac{575}{216}\,e^{-t}\ . \end{aligned}$$

▷ Il presente esempio rappresenta una linea guida per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti di ordine n; dopo aver considerato le trasformate di Laplace della funzione incognita e del termine noto, si ottiene un'equazione algebrica dalla quale si ricava facilmente la trasformata di Laplace della soluzione; a questo punto conviene usare la formula di decomposizione di Hermite per scrivere tale trasformata come somma di funzioni razionali di ognuna delle quali si possa calcolare direttamente la trasformata inversa di Laplace.

Esempio 5.4.7 Si risolva la seguente equazione differenziale

$$Y^{(3)} + Y'' = 5 + 2\,e^{-t}\ .$$

Si ponga $y = \mathcal{L}(Y)$. La trasformata di Laplace della funzione $5 + 2\,e^{-t}$ è data da $5/s + 2/(s+1)$ e inoltre, imponendo le condizioni iniziali arbitrarie $Y(0) = c_1$, $Y'(0) = c_2$ e $Y''(0) = c_3$, si ottiene

$$Y' = sy - c_1\ , \qquad Y'' = s^2 y - c_1 s - c_2\ , \qquad Y^{(3)} = s^3 y - c_1 s^2 - c_2 s - c_3\ .$$

Pertanto, si ottiene l'equazione algebrica

$$s^3y - c_1s^2 - c_2s - c_3 + s^2y - c_1s - c_2 = \frac{5}{s} + \frac{2}{s+1} ,$$

dalla quale si ricava

$$y = \frac{5}{s^3(s+1)} + \frac{2}{s^2(s+1)^2} + \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_1+c_2}{s(s+1)} + \frac{c_2+c_3}{s^2(s+1)} .$$

Ponendo

$$\frac{5}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1} ,$$

dal principio di uguaglianza di due polinomi si ottengono le equazioni

$$A + D = 0 , \quad A + B = 0 , \quad B + C = 0 , \quad C = 5$$

le cui soluzioni sono $A = C = 5$ e $B = D = -5$ e dalle quali si ottiene

$$\frac{5}{s^3(s+1)} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s^3} - \frac{5}{s+1} .$$

Analogamente, si pone

$$\frac{2}{s^2(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

e dal principio di uguaglianza di due polinomi si ottengono le equazioni

$$A + C = 0 , \quad 2A + B + C + D = 0 , \quad A + 2B = 0 , \quad B = 2 ;$$

che risolte forniscono $A = -4$, $B = 2$, $C = 4$ e $D = 2$, da cui

$$\frac{2}{s^2(s+1)^2} = -\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} .$$

Inoltre, posto ancora

$$\frac{c_1+c_2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} ,$$

si ottiene $A = c_1 + c_2$ e $B = -c_1 - c_2$ da cui

$$\frac{c_1+c_2}{s(s+1)} = \frac{c_1+c_2}{s} - \frac{c_1+c_2}{s+1} .$$

Infine, ponendo

$$\frac{c_2+c_3}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} ,$$

si ottengono le equazioni

$$A + C = 0 , \quad A + B = 0 , \quad B = c_2 + c_3 ;$$

che forniscono $A = -c_2 - c_3$ e $B = C = c_2 + c_3$ da cui

$$\frac{c_2+c_3}{s^2(s+1)} = -\frac{c_2+c_3}{s} + \frac{c_2+c_3}{s^2} + \frac{c_2+c_3}{s+1} \, .$$

Sostituendo tutte le decomposizioni nell'espressione della soluzione y, si ottiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s^3} - \frac{5}{s+1} - \frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{c_1}{s+1} \\ &\quad + \frac{c_1+c_2}{s} - \frac{c_1+c_2}{s+1} - \frac{c_2+c_3}{s} + \frac{c_2+c_3}{s^2} + \frac{c_2+c_3}{s+1} \\ &= \frac{c_1-c_3+1}{s} + \frac{c_2+c_3-3}{s^2} + \frac{5}{s^3} + \frac{2c_1+c_3-1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \, . \end{aligned}$$

Considerando le trasformate inverse di Laplace, si ottiene

$$Y(t) = c_1 - c_3 + 1 + (c_2 + c_3 - 3)\, t + \frac{5}{2}\, t^2 + (2c_1 + c_3 - 1)\, e^{-t} + 2t\, e^{-t} \, .$$

Infine, tenendo presente che le costanti arbitrarie $c_1 - c_3 + 1$, $c_2 + c_3 - 3$ e $2c_1 + c_3 - 1$ sono indipendenti, la soluzione può essere anche scritta nella forma

$$Y(t) = c_1 + c_2\, t + c_3\, e^{-t} + \frac{5}{2}\, t^2 + 2t\, e^{-t} \, ,$$

con c_1, c_2, c_3 costanti arbitrarie (in questo caso non più uguali a $Y(0)$, $Y'(0)$ e $Y''(0)$).

Esempio 5.4.8 Si consideri il seguente problema differenziale (di Stürm-Liouville)

$$\begin{cases} Y'' + 4Y = \cos 3t \, , \\ Y(0) = 1 \, , \\ Y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \, . \end{cases}$$

Si ponga $y = \mathcal{L}(Y)$. La trasformata di Laplace della funzione $\cos 3t$ è data da $s/(s^2+9)$ e inoltre, posto $Y'(0) = C$, risulta

$$Y' = sy - 1 \, , \qquad Y'' = s^2 y - s - C \, .$$

Pertanto, si ottiene l'equazione

$$s^2 y - s - C + 4y = \frac{s}{s^2+9} \, ,$$

dalla quale si ricava

$$\begin{aligned} y &= \frac{s+C}{s^2+4} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} \\ &= \frac{s}{s^2+4} + \frac{C}{s^2+4} - \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+4} \\ &= \frac{6}{5}\,\frac{s}{s^2+4} + \frac{C}{s^2+4} - \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+9} \end{aligned}$$

(per la seconda uguaglianza si è posto

$$\frac{1}{(s^2+9)(s^2+4)} = \frac{A}{s^2+9} + \frac{B}{s^2+4}$$

e si è applicato il principio di uguaglianza di due polinomi).

Considerando le trasformate inverse di Laplace, si ottiene

$$Y(t) = \frac{6}{5}\cos 2t + \frac{C}{2}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 3t \ ;$$

infine, tenendo presente che la condizione $Y(0) = 1$ è stata già imposta, è sufficiente risolvere l'equazione $Y(\pi/4) = 0$, dalla quale si ottiene $C = -\sqrt{2}/5$. La soluzione cercata è quindi

$$Y(t) = \frac{6}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sqrt{2}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 3t \ .$$

Esempio 5.4.9 Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} X' - Y = 1 \ , \\ Y' + Y + X' = 0 \ , \\ X(0) = 2 \ , \ Y(0) = -1 \ . \end{cases}$$

Si ponga $x := \mathcal{L}(X)$ e $y := \mathcal{L}(Y)$. Tenendo presenti le condizioni iniziali, si ha

$$X' = sx - 2 \ , \qquad Y' = sy + 1$$

e pertanto si ottiene il sistema algebrico lineare

$$\begin{cases} sx - 2 - y = \dfrac{1}{s} \ , \\ sy + 1 + y + sx - 2 = 0 \ . \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si trova

$$x = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s}\,y \ , \qquad y = -\frac{s+1}{s(s+2)} \ .$$

Ponendo

$$-\frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} \ ,$$

dal principio di uguaglianza di due polinomi si trova $A = B = -1/2$ e conseguentemente

$$y = -\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)} \ ;$$

considerando le trasformate inverse di Laplace, si ottiene

$$Y(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-2t} \ .$$

Procedendo in maniera analoga, si ha

$$x = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2s(s+2)} = \frac{1}{2s^2} + \frac{7}{4s} + \frac{1}{4(s+2)} \,,$$

da cui

$$X(t) = \frac{1}{2}\, t + \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\, e^{-2t} \,.$$

Bibliografia

[1] G. C. Barozzi, Matematica per l'Ingegneria dell'Innovazione, *Zanichelli.*

[2] M. Codegone, Metodi Matematici per l'Ingegneria, *Zanichelli.*

[3] G. Gilardi, Analisi Tre, *McGraw-Hill.*

[4] F. Tomarelli, Esercizi di Metodi Matematici per l'Ingegneria, *CLUP.*

Michele Campiti
Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi"
Università di Lecce
Via per Arnesano (oppure C.P. 193)
73100 Lecce

E-Mail: michele.campiti@unile.it
Home Page: www.matematica.unile.it/docenti/campiti