§19 Appendice 10: Una rassegna parziale sulle funzioni continue ma non derivabili in nessun punto

1) $f(x)=\sum_{k=0}^\infty b^k\cos(a^k\pi x)$ $0<b<1$, $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ e a intero dispari. Si può trovare in: [H], [T] pag. 351, [GO] pag.46 (1.15), [GO1] pag.50, [G] pag. 46. [H] è la referenza più accurata. L'autore G.H.Hardy (Godfrey Harold, Cranleigh (Inghilterra) 1877 – Cambridge (Inghilterra) 1947) estende la condizione $0<b<1$, $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ e a intero dispari alla condizione $ab\geq 1$ e $0<b<1$ se ci si accontenta di non avere derivata **finita**.

2) $f(x)=\sum_{k=0}^\infty \frac{f(10^kx)}{10^k}$ dove $f(x)=\inf_{k\in\mathbf{Z}}|k-x|=\min\{x-[x],[x]+1-x\}=$ $=\begin{cases} x & 0\leq x\leq 1/2\\ 1-x & 1/2\leq x\leq 1\end{cases}$ ed estesa con periodo 1 a tutta la retta. È la funzione di B.L. Wan der Waerden e si trova in [W], [T] pag.351, [RS] pag. 4, [C] pag.17–18

3) $F(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f(2^kx)}{2^k}$ dove $f(x)$ è la funzione definita prima. È una semplificazione della funzione di Wan der Waerden ed il primo a scriverla o quantomeno a pubblicarla sembra sia stato T.H.Hildebrandt in [Hi]. Altre referenze sono [G], [GO1]. In [S] l'autore considera la funzione $F(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f(4^kx)}{4^k}$

4) $f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f(2^{2^k}x)}{2^k}$ dove $f(x)$ è quella funzione definita e periodica su tutto $\mathbf{R}$ che vale $1+x$ per $-2\leq x\leq 0$, e $1-x$ per $0\leq x\leq 2$. Si veda [Mc]

5) $f(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin n^2\pi x}{n^2}$. La congettura che tale funzione sia non derivabile pare risalga a Riemann che però non è riuscito a dimostrarla ed infatti detta così è falsa. La funzione è derivabile con derivata finita in un sottoinsieme numerabile dei razionali e non derivabile altrove (nel senso che non esiste la derivata bilatera finita). Referenze sono [H], [Ge], [Ge1], [Sm], [HS] p.260, [GO1] pag.51. Stranamente in questi due ultimi casi si afferma che essa non è derivabile in nessun punto contrariamente a quanto se ne sa

Cominciamo a dimostrare che $F(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f(4^kx)}{4^k}$ non è derivabile. Precisamente dimostriamo la

Proposizione 1.15 *La funzione* $F(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f(4^kx)}{4^k}$ *è continua ma non ammette derivata in alcun punto*

Osservazione Con derivata si intende limite finito del rapporto incrementale

Dimostrazione La continuità deriva da $\frac{f(4^kx)}{4^k}\leq 4^{-k}$. I massimi ed i minimi di $f_k(x)$ sono dati dai punti $x_{kp}\doteq\frac{p}{4^k}$ che al variare k e p costituiscono un insieme denso.

Sia dato ora un punto x_o Prendiamo una successione $h_n=4^{-n}$
$\frac{F(x_o\pm h_n)-F(x_o)}{\pm h_n}=\frac{1}{\pm h_n}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{4^k}\Big(f(4^kx_o\pm 4^{k-n})-f(4^kx_o)\Big)=\frac{1}{\pm h_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k}\Big(f(4^kx_o\pm 4^{k-n})-$ $f(4^kx_o)\Big)\frac{1}{\pm h_n}\sum_{k=n}^\infty\frac{1}{4^k}\Big(f(4^kx_o\pm 4^{k-n})-f(4^kx_o)\Big)$. Ora se $k-n\geq 0$ allora $f(4^kx_o\pm 4^{k-n})-$ $f(4^kx_o)=0$ per periodicità e quindi della somma rimane solamente $\frac{1}{\pm h_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k}\Big(f(4^kx_o\pm$ $4^{k-n})-f(4^kx_o)\Big)$. Il punto centrale è ora osservare che il periodo di $f_{n-1}(x)$ è quattro volte

(1.15) La condizione ivi data $0<a<1$ è errata. Certamente gli autori volevano dire $0<b<1$. È il celebre (nonché primo) esempio dato da Karl W.T. Weierstrass (Ostenfelde (Germania) 1815 – Berlino 1897) il periodo di $f_n(x)$ e quindi almeno uno due intervalli $(x_o - 4^{-n}, x_o)$ $(x_o, x_o + 4^{-n})$ appartiene interamente ad uno dei semiperiodi della funzione $f_{n-1}(x)$. Lo stesso intervallo appartiene ad uno dei semiperiodi delle altre funzioni $f_1(x), \dots, f_{n-2}(x)$. Passando da n ad $n+1$ può accadere la medesima cosa oppure che l'intervallo interessato sia l'altro.

La conseguenza è che per ogni valore intero n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k}(f(4^k x_o + 4^{k-n}) - f(4^k x_o))$ oppure $\displaystyle -\sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k}(f(4^k x_o - 4^{k-n}) - f(4^k x_o))$ è uguale a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\pm 1)$ e quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(\pm 1)$ non converge. Dal precedente ragionamento segue che esiste una successione $\{k_n \doteq (\pm)^{\sigma_n} 4^{-n}\}$ ($\sigma_n \in \{0,1\}$ a seconda del valore di n) tale che non esiste il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_o+k_n)-F(x_o)}{k_n}$. ∎

Non si è in grado di dire se non esiste una sola delle derivate ed infatti è interessante rispondere alle seguenti domande: 1) esiste nel punto x_o la derivata sinistra oppure destra *finite*? 2) sempre nel punto x_o, esiste la derivata destra e sinistra entrambe uguali a $+\infty$ oppure $-\infty$?

La precedente dimostrazione non può essere ripetuta nel caso in cui 2^k sia sostituito a 4^k in quanto non è detto che almeno uno dei due intervalli $(x_o - 2^{-n}, x_o)$ $(x_o, x_o + 2^{-n})$ appartenga interamente ad uno dei semiperiodi della funzione $f_{n-1}(x)$. Bisogna adottare la dimostrazione data in [B] che è simile a quella data da T.H.Hildebrandt. Si fa uso del seguente Lemma e dimostrato nell'esercizio **31.7**, punto 2)

Lemma 1.15 *$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è derivabile in x se e solo se* $\lim_{(\xi,\eta)\to(x,x)}\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x)$, $\xi \le x \le \eta$

Proposizione 2.15 *La funzione* $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(2^k x)}{2^k}$ *non ammette derivata finita in nessun punto*

Dimostrazione Dato quindi il punto x, siano $\frac{i}{2^n}$ e $\frac{i+1}{2^n}$ i due punti più vicini a x con denominatore 2^n tali che $\frac{i}{2^n} \le x \le \frac{i+1}{2^n}$ e costruiamo la funzione $2^n\big(F((i+1)2^{-n}) - F(i2^{-n})\big) = 2^n\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\big(f(2^k x + (i+1)2^{k-n}) - f(2^k x + i2^{k-n})\big)$. $2^n\sum_{k=n}^{\infty}2^{-k}\big(f(2^k x + (i+1)2^{k-n}) - f(2^k x + i2^{k-n})\big) = 0$ per periodicità della funzione f. Rimane $2^n\sum_{k=0}^{n-1}2^{-k}\big(f(2^k x + (i+1)2^{k-n}) - f(2^k x + i2^{k-n})\big) = \sum_{k=0}^{n-1}(\pm 1)$ in quanto il periodo della funzione $f(2^k x)$ è $T_k = 2^{-k}$ e quindi nell'intervallo $[i2^{-n}, (i+1)2^{-n}]$ ciascuna delle funzioni $f(2^k x)$ con $0 \le k \le n-1$ è lineare crescente oppure decrescente. Ne segue che la derivata non esiste nel senso che il limite del rapporto incrementale non può essere un numero finito. ∎

Sulla stessa falsariga dimostrare il seguente

Proposizione 3.15 *La funzione* $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(2^k x)}{2^k}$ *non ammette derivata destra né sinistra finite in nessun punto*

Dimostrazione Si fa uso dell'esercizio **31.7** punto 4). Facciamo vedere che esistono due successioni $\xi_n \to 0^+$ e $\eta_n \to 0^+$ tale che $x_o \le \xi_n < \eta_n$, $\frac{\eta_n - x_o}{\xi_n - x_o} \le a$, $\frac{\eta_n - \xi_n}{\xi_n - x_o} \le a$ e non esiste $\lim_{n\to+\infty}\frac{F(\eta_n)-F(\xi_n)}{\eta_n-\xi_n}$. Prendiamo lo sviluppo in base 2 del punto x ossia $x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x_k}{2^k}$ con $x_k = 0, 1$. Sia $x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}$, $\xi_n = x^{(n)} + \frac{1}{2^n} > x$ e $\eta_n = \xi_n + \frac{1}{2^n}$. Risulta $\eta_n - \xi_n = 2^{-n}$, $\frac{\eta_n - x_o}{\xi_n - x_o} \le 2$, $\frac{\eta_n - \xi_n}{\xi_n - x_o} \le 1$ per cui $a = 2$. La funzione $2^n\big(F(\eta_n) - F(\xi_n)\big)$ è pari a $\sum_{k=0}^{n-1}(\pm 1)$ e quindi la derivata non esiste nel senso che il limite del rapporto incrementale non può essere un numero finito. ∎

In merito all'esempio 3) vogliamo dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 4.15 *La funzione* $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f(2^k x)}{2^k}$ *verifica la stima* $|F(x+h) - F(x)| \leq L_\alpha |h|^\alpha$ *per qualsiasi* $0 < \alpha < 1$ (2.15)

Dimostrazione Sia dapprima $|h| < 1$. Esiste un numero intero n tale che $2^{-n-1} \leq |h| \leq 2^{-n}$; $F(x+h) - F(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{-k}(f(2^k x + 2^k h) - f(2^k x)) + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} 2^{-k}(f(2^k x + 2^k h) - f(2^k x))$. Nella prima sommatoria abbiamo $2^k|h| \leq 2^{k-n} \leq \frac{1}{2}$ da cui il fatto che $(f(2^k x + 2^k h) - f(2^k x)) = 2^k h$ e quindi $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{-k}|f(2^k x+2^k h) - f(2^k x)| = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{-k} 2^k |h|$. Se ora dividiamo per $|h|^\alpha$ allora otteniamo $\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{-k}|h|^{-\alpha}|f(2^k x+2^k h) - f(2^k x)| \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{-k}2^k|h|^{1-\alpha} \leq n 2^{-n(1-\alpha)} \leq L_\alpha$. Per quanto riguarda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} 2^{-k}|h|^{-\alpha}|f(2^k x+2^k h) - f(2^k x)| \leq \sum\limits_{k=n}^{+\infty} 2^{-k}\frac{1}{2}|h|^{-\alpha} = 2^{-n}|h|^{-\alpha} \leq 2|h|^{1-\alpha} \leq 2^{1-n(1-\alpha)} \leq L'_\alpha$.
Sommando le due quantità si arriva al risultato.

Se $|h| \geq 1$ abbiamo $|F(x+h) - F(x)| \leq 1$ (fatto questo vero indipendentemente dal valore di h) allora abbiamo $|F(x+h) - F(x)| \leq 1 \leq |h|^\alpha$.■
Si sarà notato che tutto il ragionamento cade se $\alpha = 1$ e ciò non sorprende perché altrimenti la funzione sarebbe lipschitziana e quindi derivabile quasi ovunque (fatto questo che già sappiamo essere falso).

Sempre con la funzione di Wan der Waerden si può ottenere il seguente risultato

Proposizione 5.15 *Definire un insieme* $C \subset I = [0,1]$ *ed una funzione* $F(x)\colon I \to \mathbf{R}$ *tale che* $\mu(C) > 0$, $F|_C \equiv 0$, F *continua e non derivabile in nessun punto*(3.15)

Dimostrazione Prendiamo un insieme di Cantor a misura positiva $\mu_o > 0$ in I. C_{μ_o} si ottiene da I togliendo una quantità numerabile di intervalli aperti disgiunti ossia $C_{\mu_o} = I \backslash \cup_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n)$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(b_n - a_n) = 1 - \mu_o$; sia a_n che b_n appartengono a C_{μ_o}. È necessario dare qualche dettaglio in più per capire il risultato. Al primo passo, dall'intervallo I, togliamo l'intervallo aperto $I_1 = (\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6})$ ossia togliamo un intervallo centrato in $x = \frac{1}{2}$ e di lunghezza $\frac{\lambda}{3}$. Sia $I \backslash I_1 \stackrel{\rm def}{=} J_1 = (0, \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{6}) \cup (\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{6}, 1)$. Al secondo passo, da J_1 togliamo due intervalli di lunghezza ciascuno $\frac{\lambda}{9}$ e centrati rispettivamente nei punti mediani dei due intervalli che compongono J_1. Chiamiamo I_{11} e I_{12} i nuovi intervalli ottenuti e sia $I^{(2)} = I_{11} \cup I_{12}$; $J_2 = J_1 \backslash I^{(2)}$. In J_2 vi sono quattro intervalli ed in ciascuno di essi si ripete la procedura togliendo intervalli aperti centrati di lunghezza $\frac{\lambda}{27}$ che chiamiamo I_{111}, I_{112}, I_{121}, I_{122}. Sia $I^{(2)} = I_{111} \cup I_{112} \cup I_{121} \cup I_{122}$. e via dicendo. Sia $I^{(\infty)} \stackrel{\rm def}{=} \cup_{k=1}^{\infty} I^{(k)}$. Abbiamo $| \cup_{k=1}^{\infty} I^{(k)}| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |I^{(k)}| = \frac{\lambda}{3} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^k = \lambda$. L'insieme $I \backslash I^{(\infty)}$ ha misura $1 - \lambda$ e prendiamo $\lambda = 1 - \mu_o$ per cui $C_{\mu_o} = I \backslash I^{(\infty)}$. Come ogni insieme di Cantor che si rispetti C_{μ_o} soddisfa le relazioni $C'_{\mu_o} = C_{\mu_o}$, $\overset{\circ}{C}_{\mu_o} = \emptyset$, $\overline{I^{(\infty)}} = [0,1]$. Ciascun intervallo di quelli eliminati viene chiamato $I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, è aperto e $|I_{i_1 i_2 \ldots i_n}| = \frac{1 - \mu_o}{3^n}$.

A partire dalla funzione $F(x)$ data in 3), in ogni intervallo $I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ definiamo $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}\colon I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \to$

(2.15) Proposizione presa da [SS]

(3.15) la misura μ è quella di Lebesgue ed inoltre per derivabilità si intende derivata finita bilatera. L'esercizio è preso da [Sc]

$\mathbf{R}$, $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} f(2^k \frac{x - a_{i_1 i_2 \ldots i_n}}{b_{i_1 i_2 \ldots i_n} - a_{i_1 i_2 \ldots i_n}})$ e $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{n}$. Chiaramente abbiamo $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}(a_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = F_{i_1 i_2 \ldots i_n}(b_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = 0$ e $F_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\frac{1}{2} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \frac{1}{2} b_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$

Definiamo la funzione $W(x)\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, $W(x) = \begin{cases} F_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x) & x \in I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \\ 0 & x \in C_{\mu_o} \end{cases}$

La funzione $W(x)$ così costruita soddisfa le condizioni richieste.

Continuità . Se $x \in I_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \overset{\circ}{I}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ allora $W(x) = F_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x)$ e sappiamo che quest'ultima è continua. Sia $x \in C_{\mu_o}$ e sia $U \ni x$ un intervallo contenente x. In tale intervallo, per costruzione dell'insieme di Cantor, vi sono solamente punti di C_{μ_o} e intervalli aperti appartenenti all'insieme $I \backslash C_{\mu_o}$. Se $y \in C_{\mu_o}$ allora $W(y) = 0$. Inoltre se la lunghezza dell'intervallo U tende a zero, vuol dire che gli intervalli di $I \backslash C_{\mu_o}$ contenuti in esso diventano progressivamente più piccoli e ciò equivale a dire che $n \to +\infty$ dove $I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset U$. Ne segue che se $y \in I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ allora $W(y) \le \frac{1}{n}$ da cui segue la continuità .

Non derivabilità . Nei punti $x \in I \backslash C_{\mu_o}$ la funzione non è derivabile in quanto negli aperti in questione la funzione è quella di Wan Der Waerden. Sia ora $x \in C_{\mu_o}$. Per costruzione vi è una successione, detta S_x, di intervalli aperti $I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ tale che x è punto limite dell'insieme degli estremi di tali intervalli che sono rappresentati con $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ per l'estremo sinistro e $b_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ per l'estremo destro. Sia $m_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{2}(a_{i_1 i_2 \ldots i_n} + b_{i_1 i_2 \ldots i_n})$ il punto medio di tali intervalli contenuti nell'insieme S_x. Si vuole dimostrare che $\frac{W(m_{i_1 i_2 \ldots i_n})}{m_{i_1 i_2 \ldots i_n} - x}$ non è una quantità limitata e quindi non può tendere a zero. In particolare si vuole dimostrare che $|m_{i_1 i_2 \ldots i_n} - x| \le 2^{-n}$ e quindi $|\frac{W(m_{i_1 i_2 \ldots i_n})}{m_{i_1 i_2 \ldots i_n} - x}| \ge \frac{2^{n-1}}{n}$ da cui il risultato.

Sia I_1 il primo intervallo tolto da I. $\sup\limits_{x \in J_1} \rho(x, I_1) \le \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{3})$

Se $I^{(2)} = I_{11} \cup I_{12}$ si ha $\sup\limits_{x \in J_2} \rho(x, I^{(2)}) \le (\frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{3}) - \frac{\lambda}{9})\frac{1}{2}$

Se $I^{(3)} = I_{111} \cup I_{112} \cup I_{121} \cup I_{122}$ si ha $\sup\limits_{x \in J_3} \rho(x, I^{(3)}) \le (\frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{3}) - \frac{\lambda}{9})\frac{1}{2}$

In generale abbiamo $\sup\limits_{x \in J_n} \rho(x, I^{(n)}) \le \frac{1}{2^n}(1 - \frac{\lambda}{3})$

Ne segue che la distanza di x dai punti medi degli intervalli che via via vengono eliminati è minore o uguale a $\frac{1}{2^n}(1 - \frac{\lambda}{3}) + \frac{\lambda}{2} 3^{-n} \le 2^{-n+1}$ e quindi il risultato. ∎

Esercizio Si avrebbe lo stessa conclusione se invece della misura di Lebesgue si prendesse la misura di Peano–Jordan? (indicata con $m(\cdot)$)

Risposta: No in quanto un insieme A è misurabile secondo Peano–Jordan se e solo se $m(A) = m(\overset{\circ}{A}) = m(\overline{A})$. Quindi si dovrebbe avere $F|_A(x) \equiv 0$ e al contempo $\overset{\circ}{A} \ne \emptyset$; Ne seguirebbe che esiste un intervallo in cui $F(x)$ è costante. Ma allora è derivabile all'interno dell'intervallo con derivata nulla

Referenze

[B] Billingsley P.: *Van Der Waerden's Continuous Nowhere Differentiable Function*, American Mathematical Monthly, Vol. 89, Issue 9 (Nov.,1982), 691

[C] Chierchia L.: *Lezioni di Analisi Matematica*, Aracne Editrice 1996

[G] Giusti E.: *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica*, volume secondo, seconda edizione riveduta e ampliata, Boringhieri 1989, ristampa del 1994

[Ge] Gerver J.: *The Differentiability of the Riemann Function at certain Rational Multiples*, American Journal of Mathematics, Volume 92, Issue 1 (Jan., 1970), pp.33–55,

[Ge1] Gerver J.: *More on the Differentiability of the Riemann Function*, American Journal of Mathematics, Volume 93, Issue 1 (Jan., 1971), pp.33–41,

[GO] Gelbaum B.R., Olmsted J.M.H.: *Controesempi in analisi matematica*, Edizioni Mursia, 1964

[GO1] Gelbaum B.R., Olmsted J.M.H.: *Theorems and Counterexamples in Mathematics*, Springer–Verlag Ed.1990

[H] Hardy G.H.: *Weierstrass's Non–Differentiable Function* , Transactions of the American Mathematical Society, Volume 17, Issue 3 (Jul.,1916), pag.301–325

[Hi] Hildebrandt T.H.: *A Simple Continuous Function with a Finite Derivative at No Point*, American Mathematical Monthly, Volume 40, Issue 9 (Nov.,1933), 547–548

[HS] Hewitt E., Stromberg K.: *Real and Abstract Analysis*, Springer–Verlag Eds., 1965 pp.260

[Mc] McCarthy J.: *An Everywhere Continuous Nowhere Differentiable Function*, American Mathematical Monthly, Volume 60, Issue 10 (Dec.,1953), 709

[S] Šilov G.E.: *Analisi Matematica - Funzioni di una variabile* e *Funzioni di più variabili reali*, Edizioni Mir, pag.240,

[Sc] Schubert S.R.: *On a Function of Van Der Waerden*, American Mathematical Monthly, Volume 70, Issue 4 (Apr.,1963), 402

[RS] Riesz F.:, Sz.–Nagy B.: *Functional Analysis*, Frederick Ungar Publishing Co. (N.Y.)

[Sm] Smith A.: *The Differentiability of the Riemann's Function* , Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 34, Issue 2 (Aug., 1972), pp.463–468.

[SS] Shidfar A., Sabetfakhri K.: *On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Holder Sense*, American Mathematical Monthly, Volume 93, Issue 5 (May,1986), 375–376

[T] Titchmarsh E.C.: *The theory of functions*, Oxford University Press, stampa del 1988: seconda edizione del 1939 corretta nel 1968

[W] Wan der Waerden B.L.: *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Zeitschrift, 32 (1930).