PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

1. Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p \leq +\infty$.

(a) Dimostrare che

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y) dy$$

è ben definito per q.o. x e che

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \quad (1)$$

(b) Quando vale l'uguaglianza in (1)?

(c) Dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$ tali che

$$\|f * g\|_p > (1 - \epsilon) \|f\|_1 \|g\|_p.$$

2. Sia $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione non negativa, nulla fuori dalla palla unitaria $B_1(0)$ e tale che $\int \rho dx = 1$. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, si definisca u_h come

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy.$$

(a) Mostrare che $u_h \in C^\infty(\Omega')$, se Ω' è un aperto contenuto in Ω e $0 < h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

(b) Se $u \in L^1(\Omega)$ e Ω è limitato, $u_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $h > 0$.

(c) Per h che tende a zero, le funzioni $y \rightarrow h^{-n} \rho(\frac{x-y}{h})$ tendono a δ_x nel senso delle distribuzioni.

(d) Se $u \in C^0(\Omega)$, allora u_h converge ad u uniformemente in ogni compatto contenuto in Ω .

(e) Se $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, u_h tende a u nel senso di $L^p_{loc}(\Omega)$.

(f) Se $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, u_h tende a u in $L^p(\Omega)$.

3. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $\text{dist}(x, \partial\Omega) > h > 0$. Sia α un multi-indice. Dette u_h le funzioni regolarizzate dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$D^\alpha u_h(x) = (D^\alpha u)_h(x).$$