§10 Appendice 3: Il Teorema delle funzioni implicite per funzioni da $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ (1.10)

Ipotesi Sia data una funzione $\underline{F}(\underline{x},\underline{y})\colon \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tale che: 1)$\underline{F}(\underline{x}_o,\underline{y}_o) = \underline{0}$, 2) $\underline{F}(\underline{x},\underline{y})$ è continua in $(\underline{x}_o,\underline{y}_o)$ ossia $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ (\delta_\varepsilon,\ \rho_\varepsilon)\ :\ |\underline{x}-\underline{x}_o| < \delta_\varepsilon \wedge |\underline{y}-\underline{y}_o| < \rho_\varepsilon \ \Rightarrow\ |\underline{F}(\underline{x},\underline{y}) - \underline{F}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)| < \varepsilon$ 3) $\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{y})$ è continua in $(\underline{x}_o,\underline{y}_o)$ ossia $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ (\delta_\varepsilon,\ \rho_\varepsilon)\ |\ |\underline{x}-\underline{x}_o| < \delta_\varepsilon \wedge |\underline{y}-\underline{y}_o| < \rho_\varepsilon \ \Rightarrow\ |\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{y}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)| < \varepsilon$ 4) l'operatore lineare $\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)$ ha inverso limitato e sia $A = |(\underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o))| \doteq \sup_{|v|\le 1} |(\underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o))\underline{v}|$ (2.10)

Indichiamo $X_\alpha \doteq |\underline{x}-\underline{x}_o| < \alpha$ e $Y_\beta \doteq |\underline{y}-\underline{y}_o| < \beta$

Tesi 1) Esiste un intorno X_α di $\underline{x}_o$ tale che per ogni $\underline{x} \in X_\alpha$ esiste unico $\underline{y} \in \overline{Y}_\beta$ tale che $\underline{F}(\underline{x},\underline{y}) = \underline{0}$.
Risulta definita quindi una funzione $\underline{f}\colon X_\alpha \to \overline{Y}_\beta$ tale $\underline{F}(\underline{x},\underline{f}(\underline{x})) \equiv 0$ in X_α. $\underline{f}$ è continua in $\underline{x}_o$ e inoltre per ogni coppia $(\underline{x},\underline{y}) \in X_\alpha \times \overline{Y}_\beta$ tale che $\underline{F}(\underline{x},\underline{y}) = 0$, risulta $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$.

Dimostrazione Applichiamo il "Teorema delle Contrazioni" (o del Punto Fisso).

Contrazione Per ogni $\underline{x} \in X_{\delta_\varepsilon}$ definiamo la seguente funzione di $\underline{y} \in Y_{\rho_\varepsilon}$, $\underline{M}(\underline{x},\underline{y}) \doteq \underline{y} - \underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\underline{F}(\underline{x},\underline{y})$. Cerchiamo il punto fisso di $\underline{M}(\underline{x},\underline{y})$ ossia quel valore di $\tilde{y}$ per cui $\underline{M}(\underline{x},\tilde{\underline{y}}) = \tilde{\underline{y}}$. Poiché il determinante di $\underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)$ è diverso da zero ne consegue che $\underline{F}(\underline{x},\tilde{\underline{y}}) = \tilde{\underline{y}}$.
Si ha $\underline{M}(\underline{x},\underline{y}) - \underline{M}(\underline{x},\underline{y}') = \underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\Big(\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)(\underline{y}-\underline{y}') + \underline{F}(\underline{x},\underline{y}') - \underline{F}(\underline{x},\underline{y})\Big)$ e quindi, usando il teorema di Lagrange prima (che deriva dalla ipotesi 3) e la continuità poi (sempre dalla ipotesi 3) $|\underline{M}(\underline{x},\underline{y}) - \underline{M}(\underline{x},\underline{y}')| \le A|\underline{y}-\underline{y}'|\cdot|\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x},\tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)| \le A\varepsilon|\underline{y}-\underline{y}'|$ $(\tilde{\underline{y}} \in [\underline{y},\underline{y}'])$ $([\underline{y},\underline{y}'] = \{\underline{u} \in \mathbf{R}^n\ :\ \underline{u} = \lambda\underline{y} + (1-\lambda)\underline{y}',\ 0 < \lambda < 1\})$.
Prendiamo ε tale che $A\varepsilon \le \frac{1}{2}$. In tal modo restano definiti δ_ε e ρ_ε.

Invarianza $\underline{M}(\underline{x},\underline{y}) - \underline{y}_o = \underline{M}(\underline{x},\underline{y}) - \underline{M}(\underline{x},\underline{y}_o) + \underline{M}(\underline{x},\underline{y}_o) - \underline{y}_o = \underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\Big(-\underline{F}(\underline{x},\underline{y}) + \underline{F}(\underline{x},\underline{y}_o) + \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)(\underline{y}-\underline{y}_o)\Big) - (\underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o))\Big(\underline{F}(\underline{x},\underline{y}_o) - \underline{F}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\Big) =$
$= \underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\Big(\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x},\tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\Big)(\underline{y}_o - \underline{y}) - \underline{F}_{\underline{y}}^{(-1)}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\Big(\underline{F}(\underline{x},\underline{y}_o) - \underline{F}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)\Big)$
Ora prendiamo ε' a cui corrisponde $X_{\delta_{\varepsilon'}}$. Per la ipotesi 3) si ha che $\underline{x} \in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'},\delta_\varepsilon\}}\ \wedge\ \underline{y} \in Y_{\rho_\varepsilon} \ \Rightarrow\ |\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x},\tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)| < \varepsilon$ ed inoltre $|\underline{F}(\underline{x},\underline{y}_o) - \underline{F}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)| < \varepsilon'$. Si può quindi maggiorare $|\underline{M}(\underline{x},\underline{y}) - \underline{y}_o| \le A\varepsilon\rho_\varepsilon + A\varepsilon' \le \rho_\varepsilon$ che è vera per $A\varepsilon' \le \frac{1}{2}\rho_\varepsilon$ (3.10)

Possiamo applicare il Teorema delle Contrazioni e dire che $\forall\ \varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon' \le \frac{1}{2A}\rho_\varepsilon,\ \varepsilon \le \frac{1}{2A}$ $\forall \underline{x} \in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'},\delta_\varepsilon\}}$ la mappa $\underline{M}(\underline{x},\underline{y})$ è una contrazione da $\overline{Y}_{\rho_\varepsilon}$ in se stesso e quindi ammette un unico

---

(1.10) Tale dimostrazione è presa dal libro di A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale* edizioni Mir 1980

(2.10) Essendo lo spazio $\mathbf{R}^n$ ad un numero finito di dimensioni ed essendo gli elementi di $\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x},\underline{y})$ funzioni continue in $(\underline{x}_o,\underline{y}_o)$, la matrice $(\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o))^{-1}$ esiste e definisce un operatore lineare (e limitato data la continutà) se e solo se $\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)$ ha determinante non nullo

(3.10) Non è detto si possa prendere $\varepsilon'=\varepsilon$ in quanto non è detto che $A\varepsilon\rho_\varepsilon + A\varepsilon \le \rho_\varepsilon$. Ciò implica che il Teorema delle funzioni implicite ha carattere *locale* ossia sebbene il dominio della funzione $\underline{F}$, nelle variabili $\underline{x}$ è $B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon)$, il dominio della funzione $\underline{f}(\underline{x})$ sarà in generale più piccolo (vedi $\delta_{\varepsilon'}$ successivamente).

punto fisso $\underline{y}$ essendo $\overline{Y}_{\rho_\varepsilon}$ completo. La coppia $(\underline{x},\underline{y})$ verifica $\underline{M}(\underline{x},\underline{y})=0$ e quindi $\underline{F}(\underline{x},\underline{y})=0$. Per costruzione si è definita una funzione $\underline{f}\colon X_{\min\{\delta_{\varepsilon'},\delta_\varepsilon\}}\to\overline{Y}_{\rho_\varepsilon}$ tale che $\underline{F}(\underline{x},\underline{f}(\underline{x}))\equiv 0$ per $\underline{x}\in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'},\delta_\varepsilon\}}$. Poiché il Teorema delle Contrazioni comporta l'unicità e poiché $\underline{F}(\underline{x}_o,\underline{y}_o)=\underline{0}$, ne segue che $\underline{f}(\underline{x}_o)=\underline{y}_o$.
Poiché nella relazione $|\underline{M}(\underline{x},\underline{y})-\underline{y}_o|\leq A\varepsilon\rho_\varepsilon+A\varepsilon'\leq\rho_\varepsilon$ avremmo potuto sostituire a ρ_ε qualsiasi numero positivo r, prendendo $A\varepsilon<\frac{1}{2}$, $A\varepsilon'<\frac{1}{2}r$, ne segue la continuità della funzione $\underline{f}$ in $\underline{x}_o$. Infatti dobbiamo dimostrare che è possibile soddisfare la definizione $\forall\ r>0\ \exists\ \delta_r>0:\ |\underline{x}-\underline{x}_o|<\delta_r\ \Rightarrow\ |\underline{y}-\underline{y}_o|<r$. Dato r prendiamo ε che soddisfa $A\varepsilon\leq\frac{1}{2}$ e ε' tale che $\varepsilon'\leq\frac{1}{2A}r$. Da essi scaturiscono δ_ε e $\delta_{\varepsilon'}$ da cui $X_{\min\{\delta_{\varepsilon'},\delta_\varepsilon\}}$. Il Teorema delle contrazioni ci dice che non appena $\underline{x}\in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'},\delta_\varepsilon\}}$ si ha $\underline{y}\in Y_r$ e quindi la continuità (è chiaro che $\min\{\delta_{\varepsilon'},\delta_\varepsilon\}$ dipende da r).

Per dimostrare l'ultimo punto del Teorema supponiamo che esista una coppia $(\underline{\overline{x}},\underline{\overline{y}})$ tale che $\underline{F}(\underline{\overline{x}},\underline{\overline{y}})$ ma che $\underline{\overline{y}}\neq\underline{f}(\underline{\overline{x}})$. Chiaramente $\underline{M}(\underline{\overline{x}},\underline{\overline{y}})=\underline{\overline{y}}$ essendo $\underline{F}(\underline{\overline{x}},\underline{\overline{y}})$. Sia $\underline{\tilde{y}}=\underline{f}(\underline{\overline{x}})$. $|\underline{\overline{y}}-\underline{\tilde{y}}|=|\underline{M}(\underline{\overline{x}},\underline{\overline{y}})-\underline{M}(\underline{\overline{x}},\underline{\tilde{y}})|\leq\frac{1}{2}|\underline{\overline{y}}-\underline{\tilde{y}}|$ il che è un assurdo a meno che $|\underline{\overline{y}}-\underline{\tilde{y}}|=0$. $\blacksquare$