§14 Appendice 6: Le equazioni algebriche di terzo grado a coefficienti reali (una interessante applicazione dei numeri complessi; la formula di Cardano (Pavia 1501 – Roma 1576))

Sia data la equazione algebrica di terzo grado $x^3+ax^2+bx+c=0$ i cui coefficienti sono reali. La sostituzione $z=x+\frac{a}{3}$ trasforma la equazione in $z^3+pz+q=0$ con $p=b-\frac{1}{3}a^2$, $q=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$. Scriviamo $z=u+v$ ottenendo $(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$. A questo punto studiamo il sistema $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3}\end{cases}$ ossia $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}\end{cases}$ e se poniamo $u^3=\xi$ $v^3=\eta$ il sistema diventa $\begin{cases} \xi+\eta=-q \\ \xi\eta=-\dfrac{p^3}{27}\end{cases}$. I numeri ξ e η sono le soluzioni della equazione di secondo grado $\lambda^2+q\lambda-\frac{p^3}{27}=0$ ossia $\lambda_\pm=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ e se chiamiamo $D\doteq\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ abbiamo $\lambda_\pm=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{D}$. Segue chiaramente che $u=\lambda_+^{1/3}=(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}})^{1/3}$ e $v=\lambda_-^{1/3}=(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}})^{1/3}$ e bisogna tenere in mente che $\lambda_+^{1/3}$ dà luogo a tre risultati così come $\lambda_-^{1/3}$.

Vanno distinti 3 casi: $D>0$, $D<0$, $D=0$. Cominciamo da $D=0$ ossia $\frac{q^2}{4}=-\frac{p^3}{27}$. La estrazione della radice cubica $(-\frac{q}{2})^{1/3}$ genera tre soluzioni (due complesse ed una reale) ossia $u_1=(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $u_2=e^{i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $u_3=e^{-i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$, e la stessa cosa per v ossia $v_1=(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $v_2=e^{i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $v_3=e^{-i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$. Ora bisogna ricordare che $uv=-\frac{p}{3}$ da cui le uniche coppie possibili sono (u_1,v_1) (u_2,v_3) e (u_3,v_2). La soluzione $z=u+v$ è data da $z_1=u_1+v_1=-2(\frac{q}{2})^{1/3}$ nel primo caso. Nel secondo caso si ha $z_2=u_2+v_3=-(\frac{q}{2})^{1/3}(e^{i\frac{2}{3}\pi}+e^{-i\frac{2}{3}\pi})=-(\frac{q}{2})^{1/3}2Re(e^{i\frac{2}{3}\pi})=-(\frac{q}{2})^{1/3}2\cos\frac{2}{3}\pi=2(\frac{q}{2})^{1/3}$. Nel terzo ed ultimo caso si ha $z_3=u_3+v_2=u_2+v_3$ da cui si evince che una delle radici è doppia. In conclusione, se $D=0$ le radici sono tutte e tre reali ed una è doppia. La seconda è uguale all'opposto della prima. In altre parole $D=0$ corrisponde ad un polinomio del tipo $(x-x_o)^2(x+x_o)=0$

Proseguiamo con il caso $D>0$. $u^3=\lambda_+=-\frac{q}{2}+\sqrt{D}$ per cui u può assumere uno dei tre valori $\lambda_+^{1/3}$, $\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ e v uno dei tre $\lambda_-^{1/3}$, $\lambda_-^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $\lambda_-^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ dove $\lambda_-=-\frac{q}{2}-\sqrt{D}$. Dovendo essere $uv=-\frac{p}{3}$ si hanno le tre possibilità $(u,v)=(\lambda_+^{1/3},\lambda_-^{1/3})$, $(u,v)=(e^{i\frac{2}{3}\pi}\lambda_+^{1/3},e^{-i\frac{2}{3}\pi}\lambda_-^{1/3})$, $(u,v)=(e^{-i\frac{2}{3}\pi}\lambda_+^{1/3},e^{i\frac{2}{3}\pi}\lambda_-^{1/3})$. Sommando alla fine si ha $z_1=\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3}$, $z_2=-\frac{1}{2}(\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3})+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_+^{1/3}-\lambda_-^{1/3})$ e $z_3=-\frac{1}{2}(\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3})-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_+^{1/3}-\lambda_-^{1/3})$ che è il complesso coniugato di z_2. Si hanno quindi due radici complesse coniugate ed una radice reale.

L'ultimo caso è quello in cui $D<0$ per cui $\lambda_+=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-D}\doteq\rho_o e^{i\vartheta_o}$ ($\rho_o=\sqrt{\frac{q^2}{4}-D}$ e $\tan\vartheta_o=\frac{2\sqrt{-D}}{q}$) e $\lambda_-=-\frac{q}{2}-i\sqrt{-D}=\overline{\lambda_+}$. Come prima u può assumere uno dei tre valori $u_1=\lambda_+^{1/3}$, $u_2=\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $u_3=\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ ($\lambda_+^{1/3}=\rho_o^{1/3}e^{i\vartheta_o/3}$) e v uno dei tre $v_1=\lambda_-^{1/3}$, $v_2=\lambda_-^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $v_3=\lambda_-^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$. La conseguenza è che $z_1=u_1+v_1=\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3}=\lambda_+^{1/3}+\overline{\lambda_+^{1/3}}=2Re(\lambda_+^{1/3})\in\mathbf{R}$. La seconda radice è $z_2=u_2+v_2=\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}+\lambda_-^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}=\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overline{\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}}=2Re(\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi})\in\mathbf{R}$. La terza radice è $z_3=u_3+v_3=\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}+\lambda_-^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}=\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}+\overline{\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}}=2Re(\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi})\in\mathbf{R}$ e come si vede tutte e tre le radici sono reali.

Si può notare che se $D\geq 0$, sia λ_+ che λ_- sono reali e quindi le radici (z_1,z_2,z_3) che si ottengono sono facilmente scrivibili come $z_j=a_j+ib_j$ $j=1,2,3$ ($b_j=0$ nel caso di radici reali). Viceversa se $D<0$ sia λ_+ che λ_- sono numeri complessi coniugati con parte immaginaria non nulla e le radici (**reali**) si ottengono attraverso una formula del tipo $a^{1/3}\cos(b+\frac{1}{3}\arctan c)$ che può eventualmente essere pari ad un numero semplice (intero relativo oppure razionale). È per questa ragione che a volte la formula delle equazioni di terzo grado (detta *di Cardano*) non è utile quando le radici sono tutte e tre reali.

Se siamo interessati a trovare radici reali e siamo nel caso $D\geq 0$, si può fare a meno di sapere cosa sono i numeri complessi in quanto essi non sono necessari (esattamente come accade per le equazioni di secondo grado). Se però l'equazione in questione ha *tre* radici reali e quindi $D<0$, allora non si può fare a meno di usare tali numeri. Ciò rappresentò un serio problema per gli algebristi dei secoli $XV^{\underline{0}}$, $XVI^{\underline{0}}$ e $XVII^{\underline{0}}$. Alcuni pensarono che i numeri complessi fossero un fatto accidentale da evitare in qualche modo. Altri, come Eulero, invece li presero sul serio tanto da usarli correntemente con notevole successo [1.14]

Per chiarire la questione si può considerare la equazione $x^3-15x-4=0$ che ha $q=-4$, $p=-15$, $D=-121$,[2.14] $\lambda_+=-\frac{q}{2}+\sqrt{-D}=2+i11$. Seguendo la teoria si ottiene immediatamente $z_1=2Re((\sqrt{125}e^{i\arctan\frac{11}{2}})^{1/3})=2\sqrt{5}\cos\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$. A questo punto possono capitare due eventualità . La prima è che $\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$ sia un angolo noto di cui è facile sapere il coseno. In tal caso il calcolo è finito. La seconda è che la precedente eventualità con accada.
Per sapere quanto vale $\cos\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$ conviene ricorrere alla formula $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ valida per ogni x. Grazie ad una ben nota formula trigonometrica abbiamo $\cos 3x=\frac{2}{5\sqrt{5}}$ e quindi dobbiamo risolvere $4\cos^3 x-3\cos x=\frac{2}{5\sqrt{5}}$. Tenendo conto che $x=\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$ e quindi $\cos x=\cos\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}>0$ e del fatto che il polinomio $4z^3-3z$ è negativo per $-1<z<0$ e positivo per $0<z<1$, l'unica soluzione possibile è $\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}$ (soluzione trovata per tentativi)[3.14]. A questo punto una soluzione dell'equazione di partenza è $z_1=2\sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{5}}=4$.
Trovare z_2 e z_3 è ora immediato. Sempre in base alla teoria precedente si ha
$z_2=2Re(\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi})=2\sqrt{5}\cos(\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}+\frac{2}{3}\pi)=2\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}(-\frac{1}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{4}{5}})=\sqrt{3}-2$, $z_3=-\sqrt{3}-2$.

$x^3-7x+6=0$ che ha come radici $1,2,-3$. Abbiamo $\lambda_+=-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}=-3+i\frac{10}{3\sqrt{3}}=\rho_o e^{i\theta_o}$ dove $\rho_o=(\frac{343}{27})^{1/2}$, $\theta_o=-\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}}+\pi$ e quindi alla fine le tre radici sono date da $z_1=2(\frac{343}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3})$, $z_2=2(\frac{343}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}}+\pi)$,
$z_3=2(\frac{343}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3})$. Procedendo come prima, se indichiamo
$x_o=-\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}$ ed usiamo la solita equazione per $\cos 3x$ otteniamo $4(\cos x_o)^3-4\cos x_o=-\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{343}}$. Cerchiamo $\cos x_o=\frac{d}{\sqrt{343}}$ da cui otteniamo $\frac{4d^3}{343}-3d=-9\sqrt{3}$ e scrivendo $d=7\sqrt{3}c$ si ha $12c^3-21c=-9$ ossia $c=1$. A questo punto è immediato avere $\cos x_o=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ e quindi $z_1=2$. z_2 e z_3 seguono immediatamente.

Un altro esempio del genere è dato dalla equazione $x^3-19x+30=0$ che ha come radici $2,3,-5$.

[1.14] La fonte è il bel libro (per la cui lettura è sufficiente il bagaglio matematico della scuola superiore) di William Dunham: *Euler The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions No.22, 1999

[2.14] In casi come questo nei quali è facile trovare per tentativi una soluzione, x=4 nella fattispecie, è superfluo usare la formula generale in quanto attraverso Ruffini si può scomporre il polinomio come prodotto di $(x-4)$ per una polinomio di secondo grado le cui radici sono facilmente ottenibili

[3.14] Si tenga presente che l'equazione $4z^3-3z=\alpha$ ha tre soluzioni reali z_1,z_2,z_3 per $-1\leq\alpha\leq 1$. Ciascuna delle soluzioni verifica la relazione $-1\leq z_i\leq 1$.

Applicando la formula che dà z_1 otteniamo $2Re(\lambda_+)^{1/3}$ dove $\lambda_+ = \rho_o e^{i\vartheta_o} = -15 + \sqrt{225 - \frac{6859}{27}}$ $\rho_o = \sqrt{\frac{5291}{27}}$ e $\tan\vartheta_o = (-\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}})$. Ne consegue che $z_1 = 2(\frac{6859}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}}) + \frac{\pi}{3})$, $z_2 = 2(\frac{6859}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}}) + \pi)$, $z_3 = 2(\frac{6859}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}}) - \frac{\pi}{3})$ sono le radici della equazione. La solita formula dei coseni dà $4y^3 - 3y = -\frac{45}{19}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ dove $y = \cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}}) + \frac{\pi}{3})$ da cui $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ e quindi $z_1 = 2$

Come esercizio ci si può divertire a trovare le radici delle seguenti equazioni
$x^3 - 6x + 9 = 0$, $x^3 + 12x + 63 = 0$, $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$, $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$,
$x^3 - 6x + 4 = 0$, $x^3 + 6x + 2 = 0$, $x^3 + 18x + 15 = 0$, $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$,
$x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$, $x^3 + 9x - 26 = 0$, $x^3 + 24x - 56 = 0$, $x^3 + 45x - 98 = 0$,
$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$, $x^3 - 6x^2 + 57x + 196 = 0$, $x^3 - 4x - 1 = 0$,
$x^3 - 4x + 2 = 0$, $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$, $x^3 - 3abfgx + f^2ga^3 + fg^2b^3 = 0$.

Soluzione delle equazioni di quarto grado di Eulero e di G. Ferrari

Soluzione Eulero

Sia data la equazione $y^4 + a'y^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0$. Attraverso la sostituzione $y = x - \frac{a'}{4}$ essa diventa $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$ con a, b e c opportuni. Cerchiamo soluzioni della forma $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$. Elevando al quadrato si ottiene $x^2 - (p+q+r) = 2(\sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr})$ ed elevando ancora al quadrato si ha $x^4 - 2(p+q+r)x^2 + (p+q+r)^2 = 4(pq+pr+qr) + 8(\sqrt{p^2qr} + \sqrt{pq^2r} + \sqrt{pqr^2}) = 4(pq+pr+qr) + 8\sqrt{pqr}x$. Se indichiamo $f = p+q+r$, $g = pq+pr+qr$, e $h = pqr$, l'ultma equazione può essere riscritta come $x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}x - (4g - f^2) = 0$ che è uguale a $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$ non appena si pone $a = 2f$, $b = 8\sqrt{h}$, $c = 4g - f^2$. Dai coefficienti (a, b, c) si passa ai valori (f, g, h) e viceversa. Il punto chiave è ora riconoscere che l'equazione di terzo grado $(z-p)(z-q)(z-r) = 0$ diventa $z^3 - (p+q+r)z^2 + (pq+pr+qr)z - pqr = 0$ e quindi $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$. Dunque la procedura prevede che dai coefficienti (a, b, c) si ricavino (f, g, h) e da essi si risolva l'equazione $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$. La soluzione è data dalla terna (p, q, r) e da essa si ricavano i valori di x. Ciò implica che bisogna risolvere l'ultima equazione di terzo grado i cui coefficienti si ricavano da a, b, c. Tra l'altro si può notare come per risolvere una equazione di $4^{\underline{0}}$ grado se ne risolve una di terzo grado (fatto non sorprendente se si pensa che per risolvere quelle di terzo grado se ne è risolta una di secondo grado e per risolvere quelle di secondo grado se ne risolve una di primo grado).

Soluzione di G. Ferrari

Partiamo sempre da $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ ed attraverso la sostituzione $y = x - \frac{a}{4}$ ci si riduce a $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Introducendo un parametro ausiliario α la si riscrive come

$$(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha)^2 - [2\alpha x^2 - qx + (\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4})] = 0.$$

Si determina ora α in modo che il polinomio di secondo gradi in parentesi quadre abbia una radice doppia e quindi il suo discriminante deve essere nullo. Si deve avere quindi $q^2 - 8\alpha(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}) = 0$. Quest'ultima è una equazione di terzo grado che sappiamo risolvere e sia α_o una sua soluzione. Per tale valore lo zero doppio è $\frac{q}{4\alpha_o}$ e quindi l'equazione diventa $(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_o)^2 - 2\alpha_o(x - \frac{q}{4\alpha_o})^2 = 0$. Quest'ultima equazione è equivalente al sistema $x^2 - \sqrt{2\alpha_o}x + (\frac{p}{2} + \alpha_o + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_o}}) = 0$, $x^2 + \sqrt{2\alpha_o}x + (\frac{p}{2} + \alpha_o - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_o}}) = 0$, Per le equazioni di quinto grado, intorno al 1824, il matematico norvegese Niels Abel (1802–1829) dimostrò che non è possibile arrivare ad una soluzione in termini di radicali ed operazioni elementari. Lo stesso risultato vale per le equazioni di grado superiore.