§19 Appendice 10: Una raccolta di funzioni e risultati "interessanti"

In questo capitolo verranno riunite le funzioni che, a giudizio di chi scrive, sono ritenute particolarmente interessanti o istruttive. Nella maggior parte dei casi si tratta di esempi già presenti nei vari capitoli di tale raccolta e quindi verrà dato solamente il rimando. Spero che gli studenti interessati apprezzeranno la bellezza della maggior parte di tali funzioni e saranno stimolati a pensarne di nuove o a formulare esempi diversi da quelli dati ma aventi caratteristiche analoghe. Verranno inoltre riportati risultati anche essi ritenuti particolarmente significativi. Il grado di difficoltà è segnalato dal numero di asterischi presenti nei rimandi. Quegli esercizi che rimandano alle appendici sono da considerarsi molto difficili.

1 .19 Dati due insiemi $A=\overline{A}\subset\mathbf{R}$, $B=\overline{B}\subset\mathbf{R}$ si definisce $A+B=\{z\in\mathbf{R}\colon z=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$. Si trovino due insiemi chiusi A e B tali che $A+B$ con è chiuso. È utile sapere che se A è compatto e B è chiuso, $A+B$ è chiuso. R.: **13.1.5***

2 .19 Una funzione definita in $(-1,1)$ o in un qualsiasi insieme aperto di $\mathbf{R}$ e continua in un sol punto. R.: la f_2 di **5.5**

3 .19 Una funzione definita in $(-1,1)$ o in un qualsiasi insieme aperto di $\mathbf{R}$, invertibile ma non monotona in nessun intervallo. R.: la f_2 di **5.5**

4 .19 Una funzione definita in $(-1,1)$ o in un qualsiasi insieme aperto di $\mathbf{R}$ e continua sugli irrazionali, discontinua sui razionali R.: **6.5****

5 .19 Una funzione definita in $(-1,1)$ o in un qualsiasi insieme aperto di $\mathbf{R}$, continua sugli irrazionali, discontinua sui razionali e monotona non decresecente R.: **63.5*****

6 .19 Costruire una funzione continua $f\colon\mathbf{R}\to[a,b]$ ed un insieme $A\subset\mathbf{R}$ *numerabile* costituito da punti isolati tali che $f(A)$ non è chiuso R.: **2.5** – (vi)**

7 .19 Una funzione definita in $(-1,1)$ o in un qualsiasi insieme aperto di $\mathbf{R}$, derivabile, con derivata nulla in un punto ma quel punto non è né di massimo, né di minimo, né di flesso a tangente orizzontale R.: **17.5**

8 .19 Una funzione definita in $(-1,1)$ o in un qualsiasi insieme aperto di $\mathbf{R}$, continua sui razionali, discontinua sui razionali R.: **33.5*****

9 .19 L'insieme dei funti di discontinuità di una funzione definita su $\mathbf{R}$ può essere sempre scritto come unione numerabile di insiemi chiusi (detto storicamente F_σ) R.: **4.5*****

10 .19 Dato un qualsiasi insieme chiuso $E\subset\mathbf{R}$, si può sempre costruire una funzione di cui E è l'insieme dei punti di discontinuità R.: **4.5*****

11 .19 Dato un qualsiasi insieme $F_\sigma\subset\mathbf{R}$, si può sempre costruire una funzione di cui l'insieme dato è l'insieme dei punti di discontinuità R.: **4.5*****

12 .19 Una funzione definita in $(-1,1)$ o in un qualsiasi insieme aperto di $\mathbf{R}$ e continua in un sol punto. Inoltre nello stesso punto è derivabile infinite volte R.: **68.5***

13 .19 Una funzione "crescente in un punto ma non crescente in nessun intorno del punto stesso". Dare cioè una funzione per cui si verificano le seguenti proprietà : esiste x_o ed un intervallo $(x_o-\delta,x_o+\delta)$ tale che $f(x)\leq f(x_o)$ per $x_o-\delta<x\leq x_o$ e $f(x)\geq f(x_o)$ per $x_o\leq x<x_o+\delta$ ma non esiste alcun punto $x_1\neq x_o$, $x_1\in(x_o-\delta,x_o+\delta)$ per cui $x-\delta<x\leq$

$x_1 \ \Rightarrow\ f(x) < f(x_1)$ e $x_1 \le x < x+\delta \ \Rightarrow\ f(x) > f(x_1)$ R.: **30.5***

14 .19 Una funzione non necessariamente monotona–non–crescente tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma tale che $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ non esiste R.: **16.5****

15 .19 Una funzione monotona–non–crescente tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma tale che $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ non esiste R.: **16.5****

16 .19 Dimostrare che l'insieme delle ordinate in cui una funzione (continua o non continua) assume massimo oppure minimo locale è numerabile. R.: **22.1.5*****

17 .19 Una funzione in cui l'insieme delle ordinate in cui la funzione ha un flesso a tangente orizzontale è non–numerabile. R.: **40.8*****

18 .19 Una funzione definita su $[-1,-1]$ derivabile che abbia un minimo in $x=0$ e in nessun intorno dell'origine si abbia $xf'(x) > 0$. R.:**52.5****

19 .19 Una funzione definita su $[-1,-1]$ derivabile che abbia un minimo stretto (o forte) in $x=0$ e in nessun intorno dell'origine si abbia $xf'(x) > 0$. R.:**52.5****

20 .19 Una funzione continua $f(x)$ definita in $[-1,+1]$, continua in $x=0$ tale che la derivata $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} dy f(y)$ non è continua in $x=0$ R.:**22.8**

21 .19 Trovare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ converge l'integrale improprio $\int_0^\infty dx x^\alpha |\cos x|^{x^\beta}$ **3.8*****

22 .19 Una funzione continua $f(x)$ definita in $[-1,+1]$, non continua in $x=0$ tale che la derivata $\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} dy f(y)$ in $x=0$ coincide con $f(0)$ R.:**22.8**

23 .19 Si costruisca una funzione continua in ogni punto ma non derivabile in nessun punto. R.: si veda l'**Appendice 7**

24 .19 L'insieme dei funti di discontinuità di una derivata definita su $\mathbf{R}$ può essere sempre scritto come un insieme F_σ e di prima categoria ossia come unione numerabile di insiemi chiusi non densi in alcun punto. R.: si veda l'**Appendice 2**

25 .19 Dato un qualsiasi insieme $F_\sigma \subset \mathbf{R}$ e di prima cagoria si può sempre costruire una funzione derivabile tale che l'insieme dato è l'insieme dei punti di discontinuità della derivata R.: si veda l'**Appendice 2**

26 .19 Si dia un esempio di funzione $f\colon (0,1) \to \mathbf{R}$ tale che $f'(x) = 1$ in un insieme infinito di $(0,1)$ ma $|f|$ è derivabile in nessun punto R.: **69.5*****

27 .19 Costruire una una funzione tale che $f'(x) = 1$ su un sottoinsieme *infinito e denso* di $(0,1)$ e $|f|$ non derivabile in nessun punto R.: **69.5*****

28 .19 È dato un insieme $E \subset [0,1]$ del quale sappiamo solo che ha misura di Lebesgue nulla $(\mu(E) = 0)$. Si può dire che esso è l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione integrabile secondo Riemann? R.: No: deve essere anche un F_σ

29 .19 Identificare un insieme infinito numerabile (denso o meno) $A \subset \mathbf{R}$ e costruire una funzione derivabile tale che $Disc(f') = A$. R.: **Appendice 2**

30 .19 Trovare una successione di funzioni continue $\{f_n\}(x)$ definite su un intervallo (a,b)

(finito o infinito) tale che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \mathcal{X}_{\mathbf{Q}}$ (la funzione caratteristica dell'insieme dei razionali). R.: **Appendice 2**

31 .19 Trovare una successione di funzioni continue $\{f_n\}(x)$ definite su un intervallo (a,b) (finito o infinito) tale che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ dove $f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q, \ (p,q)=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

32 .19 Si costruisca un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che sia di prima categoria ma abbia misura di Lebesgue piena. Inoltre si costruisca un insieme di seconda categoria che abbia misura di Lebesgue nulla. R.: **Appendice 2**

33 .19 Definire un insieme $C \subset I = [0,1]$ ed una funzione $F(x): I \to \mathbf{R}$ tale che $\mu(C) > 0$, $F|_C \equiv 0$, F continua e non derivabile in nessun punto (la misura è quella di Lebesgue). R.: **Appendice 7**

34 .19 Lo stesso esercizio precedente ma la misura è quella di Peano–Jordan R.: **Appendice 7**

35 .19 Una funzione continua e derivabile sui reali con derivata limitata ma non integrabile secondo Riemann in nessun intervallo. R.: **Appendice 1**

36 .19 Una funzione $f: [-1,+1] \to \mathbf{R}$ continua e derivabile con derivata non integrabile secondo Lebesgue in [-1,1]. R.: **Appendice 1**

37 .19 Una funzione continua e derivabile sui reali con derivata non integrabile secondo Lebesgue in nessun intervallo. R.: non esiste; usare il Teorema 3.10.1 dell'**Appendice 2**

38 .19 Si dica in quali punti è derivabile la funzione $F(x) = \int_0^x dy f(y)$ dove $f(y) = \begin{cases} 1/q & \text{se } y = p/q, \ (p,q)=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ (funzione di Riemann). R.: **44.8****

39 .19 Dare un esempio di insieme aperto in $\mathbf{R}$ e non misurabile secondo Peano–Jordan R.: **Appendice 8**

40 .19 Dare un esempio di funzione di due variabili $f: [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ tale che: 1) $f(x_o, y)$ è continua come funzione di y su $[0,1]$ per ogni x_o fissato in $[0,1]$, 2) $f(x, y_o)$ è continua come funzione di x su $[0,1]$ per ogni y_o fissato in $[0,1]$, 3) $f(x,y)$ è discontinua come funzione di due variabili in ogni punto di $[0,1]^2$

41 .19 Dimostrare che è continua una funzione convessa di due variabili definita su di un aperto convesso R.: **27.7*****

42 .19 Dimostrare che è differenziabile una funzione di due variabili convessa e derivabile definita su di un aperto convesso. R.: **27.7*****

43 .19 Data una funzione definita su di un aperto convesso in uno spazio di Banach. Dimostrare che è continua se e solo se è localmente Lipschitziana.

44 .19 È data la funzione di una variabile $f(x)$. Dimostrare che l'essere derivabile in x_o è equivalente ad una delle seguenti condizioni: 1) $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_o+h)-f(x-k)}{h+k} = f'(x)$, $h \ge 0$, $k \ge 0$ $h+k > 0$ 2) $\lim_{(\xi,\eta)\to(x,x)} \frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x)$, $\xi \le x \le \eta$ 3) $\lim_{(x,y)\to(x_o,x_o)} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} - \frac{f(y)-f(x_o)}{y-x_o} = 0$ R.: **31.7**

45 .19 Dimostrare oppure trovare un controesempio alla seguente affermazione: $f'(x_o^+)$ esiste se e solo se $\lim_{(\xi,\eta)\to(x_o,x_o)} \frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_o^+)$, $\xi < \eta$ e esiste a positivo tale che $\frac{\eta-x_o}{\xi-x_o} \leq a$, $\frac{\eta-\xi}{\xi-x_o} \leq a$ R.: **31.7**

46 .19 Sia data una funzione di due variabili $f(x,y)$ continua in (x_o,y_o). Dimostrare ovvero trovare un controesempio all'uguaglianza $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = \lim_{x\to x_o} \lim_{y\to y_o} f(x,y)$ R.: **16.7****

47 .19 Dimostrare che se $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ allora la serie $\sum_k a_k \sin kx$ converge per ogni valore di x. Se inoltre $\lim_{k\to+\infty} k a_k = 0$ allora la serie converge uniformemente. R.: **Appendice 4**

48 .19 Dimostrare che la serie $\sum_k \frac{\sin kx}{k \ln k}$ converge uniformemente ma non assolutamente R.: **Appendice 4**

49 .19 Dimostrare che $\sum_k \frac{\sin kx}{\ln k}$ non è una serie di Fourier. R.: **Appendice 4**

50 .19 Dimostrare che $\sum_k \frac{\cos kx}{\ln k}$ è una serie di Fourier.

51 .19 Dimostrare che se la serie trigonometrica $\sum_k a_k \cos kx + b_k \sin kx$ converge su di un insieme di misura di Lebesgue positiva allora $\lim_{k\to+\infty}(|a_k|+|b_k|) = 0$ (Teorema di Cantor–Lebesgue) R.: **Appendice 4**

52 .19 Dimostrare ovvero trovare un controesempio all'affermazione: se la serie trigonometrica $\sum_k a_k \cos kx + b_k \sin kx$ converge su di un insieme infinito di $[0,2\pi]$ allora $\lim_{k\to+\infty}(|a_k|+|b_k|) = 0$ R.: **Appendice 4**

53 .19 Dimostrare che $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\cos k(x-\ln\ln k)}{\ln k}$ non converge per nessun valore di x (Steinhaus, 1929) R.: **Appendice 4**

SEMBRA ESSERE UN PROBLEMA APERTO DIMOSTRARE CHE LA SERIE PRECEDENTE NON È DI FOURIER. TALE AFFERMAZIONE È CONTENUTA NEL LIBRO SULLE SERIE TRIGONOMETRICHE DI A. ZYGMUND (1979, RISTAMPA DELL'EDIZIONE DEL 1968 A PAG. 338 DEL PRIMO VOLUME). PUÒ ESSERE UTILE SAPERE CHE LA STESSA AFFERMAZIONE È PRESENTE NELL'EDIZIONE DEL 1959 MA NON IN QUELLA DEL 1935). NELL'ARTICOLO ORIGINARIO U.STEINHAUS NON DICE NULLA SULLA QUESTIONE NONSTANTE NEL 1922 A.N.KOLMOGOROV AVESSE PUBBLICATO I DUE CELEBERRIMI ESEMPI DI FUNZIONI IN $L_1(0,2\pi)$ LA CUI SERIE DI FOURIER DIVERGE DAPPRIMA QUASI–OVUNQUE E POI OVUNQUE.

54 .19 Un esempio di funzione continua la cui serie di Fourier converge ovunque ma non uniformemente (Fejér) R.: **Appendice 4**

55 .19 Un esempio di una funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto (Fejér) R.: **Appendice 4**

56 .19 Un esempio di funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto (Lebesgue) R.: **Appendice 4**

57 .19 Si costruisca una funzione che dall'intervallo $[0,1]$ vada sul quadrato (funzione suriettiva) $[0,1]\times[0,1]$ *(curva di Peano).* R.: **32.7******

58 .19 Si costruisca un esempio di funzione derivabile ma monotona su nessun intervallo. R.: **Appendice 5**

59 .19 Costruire una funzione di due variabili tale che: 1) su ogni retta passante per l'origine, nell'origine stessa ha un minimo, 2) l'origine non è un punto di minimo. R.: **10.7** (Tale esempio è dovuto a G.Peano in un lavoro del 1884. Gli autori del libro E.Hairer, G.Warner *Analysis by its History* Springer Eds. 1995, a pag. 329 riportano che Peano scrisse quest'esempio per correggere un errore contenuto nel libro di Serret del 1868 *Cours de calcul differentiel et integral.* Dicono anche, riportando opinioni di Peano stesso, che questa come altre correzioni del lavoro dei più grandi matematici francesi, dovuta ad uno "sconosciuto italiano di 25 anni", non fu felicemente accolta)

60 .19 Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ integrabile secondo Riemann. Dimostrare che l'insieme dei punti di continuità è ovunque denso R.: **41.8**** (Dal libro G.Pòlya–G.Szegö *Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.77 n.**108**)

61 .19 Dimostrare che $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convessa è illimitata.

62 .19 Una funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ non limitata tale che $\int_0^{+\infty} dx f(x)$ esiste R.: **2.8****

63 .19 Si dia un esempio di funzione di due variabili $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenziabile, che abbia un solo punto critico, un massimo non assoluto (in una dimensione questo è impossibile). R.: **34.7*****

64 .19 Si dia un esempio di funzione di due variabili $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenziabile, che abbia due soli punti critici, entrambi massimi (in una dimensione questo è impossibile).

65 .19 Si dia un esempio di funzione due volte derivabile in ($\underline{x} = \underline{0}$) (nel senso che esistono le due derivate prime e le derivate seconde calcolate nell'origine) $f(x,y)$ tale che: $\underline{\partial} f(\underline{0}) = \underline{0}$, la matrice hessiana è positiva ma l'origine non è un punto di minimo. R.: **35.7****

66 .19 Si dimostri che la funzione $f(x) = \begin{cases} \cos x^{-1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è una derivata. R.: **75.5***** e **22.8**

67 .19 Si dia un esempio di funzioni derivabili $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f'g'$ non è una derivata. R.: **48.8*****