Qualche applicazione del Teorema delle contrazioni

Il ben noto teorema di Banach sulle contrazioni ha svariate applicazioni e qui ne vediamo alcune. Richiamiamo le nozioni di punto fisso e di contrazione (in senso stretto), enunciamo il teorema e ne deduciamo un corollario.

Definizione. *Siano* (X,d) *uno spazio metrico e* $\mathcal{F} : X \to X$. *Un punto* $\bar{x} \in X$ *è detto punto fisso per* $\mathcal{F}$ *quando* $\mathcal{F}(\bar{x}) = \bar{x}$ *e* $\mathcal{F}$ *è detta contrazione quando esiste* $\alpha \in (0,1)$ *tale che*

$$d(\mathcal{F}(x),\mathcal{F}(y)) \le \alpha\, d(x,y) \quad \text{per ogni } x,y \in X\,. \ \blacksquare \tag{1}$$

Nel seguito, se $\mathcal{F}$ è una applicazione di un insieme X in sé, scriveremo semplicemente $\mathcal{F}x$ anziché $\mathcal{F}(x)$ per $x \in X$ e il simbolo $\{\mathcal{F}^n\}$ denoterà la successione delle iterate di $\mathcal{F}$, vale a dire $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}^n \circ \mathcal{F}$ per ogni $n \ge 1$.

Teorema delle contrazioni. *Siano* (X,d) *uno spazio metrico completo e* $\mathcal{F} : X \to X$ *una contrazione. Allora* $\mathcal{F}$ *ha uno e un solo punto fisso* $\bar{x}$ *e, per ogni* $x_0 \in X$, *la successione* $\{\mathcal{F}^n x_0\}$ *converge a* $\bar{x}$. $\blacksquare$

Corollario. *Siano* (X,d) *uno spazio metrico completo e* $\mathcal{F} : X \to X$ *un'applicazione un'iterata della quale sia una contrazione. Allora* $\mathcal{F}$ *ha uno e un solo punto fisso.* $\blacksquare$

Dimostrazione. Sia m tale che $\mathcal{F}^m$ sia una contrazione e procediamo.

L'unicità è immediata. Infatti ogni punto fisso per $\mathcal{F}$ è anche punto fisso per $\mathcal{F}^m$, dunque unico in quanto $\mathcal{F}^m$ è una contrazione.

Vediamo l'esistenza. Per il Teorema delle contrazioni $\mathcal{F}^m$ ha uno e un solo punto fisso $\bar{x} \in X$. Dimostriamo che $\bar{x}$ è fisso anche per $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}^m(\bar{x})) = \bar{x}$ segue subito che

$$\mathcal{F}^m(\mathcal{F}(\bar{x}))) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^m(\bar{x}))) = \mathcal{F}(\bar{x})$$

cioè che anche $\mathcal{F}(\bar{x})$ è un punto fisso per $\mathcal{F}^m$. Siccome il punto fisso per $\mathcal{F}^m$ è unico, deduciamo che $\mathcal{F}(\bar{x}) = \bar{x}$. $\blacksquare$

La prima applicazione riguarda un risultato di esistenza e unicità della soluzione globale del problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria. Scriviamo il problema già nella forma di equazione integrale di Volterra, limitandoci al caso dell'equazione scalare. Il caso di un sistema si tratta però esattamente nello stesso modo, l'unica differenza essendo la diversa interpretazione dei simboli. L'equazione di Volterra è la seguente:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s,u(s))\,ds \quad \text{per ogni } t \ge 0\,. \tag{2}$$

Qui consideriamo il caso in cui

$$f : [0,+\infty) \times \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}$$

è continua e verifica una condizione di Lipschitz globale del tipo

$$|f(t,y) - f(t,z)| \le L|y-z| \quad \text{per ogni } t \ge 0 \text{ e } y,z \in \mathrm{I\!R} \tag{3}$$

con una certa costante L. La teoria generale assicura che, per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$, l'equazione di Volterra ha una e una sola soluzione continua definita in $[0,+\infty)$. Noi ridimostriamo, utilizzando i risultati astratti, il teorema seguente:

Teorema. *Nelle condizioni dette, per ogni* $T \in (0,+\infty)$ *esiste una e una sola funzione* $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ *continua che verifica l'equazione* (2) *in* $[0,T]$. ∎

Dimostrazione. Denotiamo con X l'insieme delle funzioni $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ continue munito della consueta distanza del massimo, vale a dire $d(u,v) = \max_{x\in[0,T]} |u(x)-v(x)|$. Allora (X,d) risulta uno spazio metrico completo e le soluzioni che stiamo considerando dell'equazione (2) sono esattamente i punti fissi dell'applicazione $\mathcal{F}$ definita dalla formula

$$(\mathcal{F}u)(t) = u_0 + \int_0^t f(s,u(s))\,ds, \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Chiaramente la (4) definisca una applicazione di X in sé, per cui si può pensare di usare il Teorema delle contrazioni. Se $u,v \in X$, abbiamo per ogni $t \in [0,T]$

$$|(\mathcal{F}u)(t) - (\mathcal{F}v)(t)| \le \int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|\,ds \le L\int_0^t |u(s)-v(s)|\,ds. \tag{5}$$

Si deduce immediatamente che $d(\mathcal{F}u,\mathcal{F}v) \le LTd(u,v)$, ma la costante LT non è migliorabile, per cui, se volessimo applicare il Teorema delle contrazioni, saremmo costretti a supporre $LT < 1$, cioè $T < 1/L$, e arriveremmo solo a un risultato di carattere locale. Osserviamo incidentalmente che, di fatto, potremmo arrivare comunque all'esistenza della soluzione globale, come mostriamo nell'osservazione successiva.

Per costruire direttamente la soluzione definita in $[0,T]$, consideriamo invece la successione $\{\mathcal{F}^n\}$ delle iterate di $\mathcal{F}$ e dimostriamo che, per ogni $n \ge 1$, vale la disuguaglianza

$$|(\mathcal{F}^n u)(t) - (\mathcal{F}^n v)(t)| \le L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,|u(s)-v(s)|\,ds \tag{6}$$
$$\text{per ogni } t \in [0,T] \text{ e per ogni } u,v \in X.$$

La (6) con $n=1$ coincide con quanto dato dalla (5). Ragionando per induzione, assumiamo la (6) e deduciamo l'analoga con $n+1$ al posto di n. Siano dunque $t \in [0,T]$ e $u,v \in X$. Applicando la (6) alle funzioni $\mathcal{F}u, \mathcal{F}v$, che effettivamente appartengono a X, otteniamo

$$|(\mathcal{F}^{n+1}u)(t) - (\mathcal{F}^{n+1}v)(t)| \le L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,|(\mathcal{F}u)(s) - (\mathcal{F}v)(s)|\,ds.$$

Applicando ora la (5) alle funzioni u,v e al generico istante $s \in [0,t]$, allunghiamo la catena e poi integriamo per parti come segue

$$\begin{aligned}
&|(\mathcal{F}^{n+1}u)(t) - (\mathcal{F}^{n+1}v)(t)| \le L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\left(L\int_0^s |u(r)-v(r)|\,dr\right) ds \\
&= L^{n+1}\left\{\left[\frac{-(t-s)^n}{n!}\int_0^s |u(r)-v(r)|\,dr\right]_{s=0}^{s=t} - \int_0^s \frac{-(t-s)^n}{n!}\,|u(s)-v(s)|\,ds\right\} \\
&= L^{n+1}\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\,|u(s)-v(s)|\,ds.
\end{aligned}$$

Dunque la (6) vale per ogni n. Deduciamo in particolare

$$|(\mathcal{F}^n u)(t) - (\mathcal{F}^n v)(t)| \le L^n d(u,v) \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds = \frac{L^n t^n}{n!}\, d(u,v) \le \frac{L^n T^n}{n!}\, d(u,v)$$

e passando all'estremo superiore concludiamo che

$$d(\mathcal{F}^n u, \mathcal{F}^n v) \le \frac{L^n T^n}{n!}\, d(u,v) \quad \text{per ogni } n \ge 1 \text{ e per ogni } u, v \in X\,.$$

Siccome la successione $\{\alpha^n/n!\}$ è infintesima per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, deduciamo che $\mathcal{F}^n$ è una contrazione se n è abbastanza grande e il corollario del Teorema delle contrazioni assicura che $\mathcal{F}$ ha uno e un solo punto fisso. ∎

Osservazione. Riprendiamo le considerazioni fatte all'inizio della dimostrazione e vediamo come, di fatto, la (5) sia sufficiente per arrivare all'esistenza di una soluzione globale. Infatti, attribuendo a T ancora il suo significato originario, potremmo scegliere $T_1 = \min\{T, 1/(2L)\}$ e avremmo una soluzione definita in $[0, T_1]$. Se poi $T_1 < T$, osservato che il valore di T_1 non dipende dal dato iniziale (né dall'istante iniziale che è 0 solo per comodità di scrittura) ma solo dalla costante di Lipschitz, potremmo definire $T_2 = \min\{T, 2T_1\}$ e ripartire con il problema di Cauchy sull'intervallo $[T_1, T_2]$, ottenendo una soluzione definita in $[0, T_2]$. Iterando, se necessario, il procedimento, arriveremmo a costruire una soluzione definita in $[0, T]$.

Osservazione. Osserviamo un altro fatto. Il punto chiave della teoria del problema di Cauchy consiste nella sua trasformazione nell'equazione di Volterra, della quale si cercano soluzioni solo continue e non di classe C^1, anche se, di fatto, ogni soluzione è di classe C^1.

Se infatti pretendessimo di applicare il Teorema delle contrazioni in ambito C^1, per avere la completezza dello spazio metrico, dovremmo definire la distanza come segue

$$d_1(u,v) = d(u,v) + d(u', v')$$

ove d è la distanza del massimo introdotta nella dimostrazione. Ebbene, non c'è alcuna speranza di ottenere contrazioni. Con la notazione (4) abbiamo infatti

$$(\mathcal{F}u)'(t) - (\mathcal{F}v)'(t) = f(t, u(t)) - f(t, v(t)).$$

Dunque il meglio che possiamo ottenere è

$$d_1(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) \le LT\, d(u,v) + L\, d(u,v) \le L(T+1)\, d_1(u,v)$$

e saremmo fermi, anche per tempi piccoli, proprio a causa del termine aggiuntivo. ∎

L'applicazione successiva riguarda un risultato di esistenza e unicità della soluzione globale direttamente in $[0, +\infty)$, anziché su un arbitrario intervallo limitato. Ci limitiamo a considerare il caso in cui f verifica, oltre alle ipotesi di continuità e di lipschitzianità già imposte, anche la condizione semplificativa di annullamento seguente

$$f(t, 0) = 0 \quad \text{per ogni } t \ge 0\,. \tag{7}$$

Teorema. *Nelle condizioni dette, se $\lambda > L$, allora esiste una e una sola soluzione continua dell'equazione* (2) *verificante la condizione supplementare*

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\lambda t}|u(t)| < +\infty. \blacksquare \tag{8}$$

Dimostrazione. Per $\lambda > 0$ denotiamo con X_λ l'insieme delle funzioni $u : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continue che verificano la (8), osservando che X_λ è uno spazio vettoriale. In particolare, se $u, v \in X_\lambda$, si ha anche $u - v \in X_\lambda$ e ha senso porre

$$d_\lambda(u,v) = \sup_{t\geq 0} e^{-\lambda t}|u(t) - v(t)| \quad \text{per } u, v \in X_\lambda \tag{9}$$

il che rende (X_λ, d_λ) uno spazio metrico. Allora le soluzioni dell'equazione (2) appartenenti a X_λ sono esattamente i punti fissi dell'applicazione $\mathcal{F}_\lambda$ definita dalla formula

$$(\mathcal{F}_\lambda u)(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds \quad \text{per } u \in X_\lambda \text{ e } t \geq 0$$

e, ammesso che tale formula definisca una applicazione di X_λ in sé, si può pensare di usare il Teorema delle contrazioni. Le tappe successive riguardano allora i punti seguenti: lo spazio metrico (X_λ, d_λ) è completo; effettivamente $\mathcal{F}_\lambda$ trasforma X_λ in sé; $\mathcal{F}_\lambda$ è una contrazione se $\lambda > L$.

Verifichiamo la completezza. Se $v \in X_\lambda$, definiamo $v_\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ mediante la formula $v_\lambda(t) = e^{-\lambda t}v(t)$ e osserviamo che v_λ è continua e limitata. Viceversa, ogni funzione $w : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua e limitata ha la forma $w = v_\lambda$ per una e una sola $v \in X_\lambda$, precisamente per v data dalla formula $v(t) = e^{\lambda t}w(t)$. Inoltre, se $u, v \in X_\lambda$, si ha immediatamente che $d_\lambda(u,v) = \sup_{t\geq 0} |u_\lambda(t) - v_\lambda(t)|$. Deduciamo che l'applicazione $v \mapsto v_\lambda$ è un'isometria dallo spazio metrico (X_λ, d_λ) sullo spazio metrico delle funzioni continue e limitate munito della metrica usuale. Siccome quest'ultimo è completo, anche l'altro lo è. Si noti che in questo punto non è necessaria alcuna ipotesi su λ.

Supponiamo ora $u \in X_\lambda$ e verifichiamo che anche $\mathcal{F}_\lambda u$ appartiene a X_λ. Chiaramente $\mathcal{F}_\lambda u$ è continua. Inoltre, per $t \geq 0$, grazie all'ipotesi (7), abbiamo

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{F}_\lambda u)(t)| &\leq |u_0| + L\int_0^t |u(s)|\, ds = |u_0| + L\int_0^t e^{\lambda s} \cdot e^{-\lambda s}|u(s)|\, ds \\
&\leq |u_0| + L\, d_\lambda(u,0)\int_0^t e^{\lambda s}\, ds = |u_0| + d_\lambda(u,0)\,\frac{L}{\lambda}\,(e^{\lambda t} - 1) \leq |u_0| + d_\lambda(u,0)\,\frac{L}{\lambda}\, e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Deduciamo

$$|e^{-\lambda t}(\mathcal{F}_\lambda u)(t)| \leq |u_0|e^{-\lambda t} + d_\lambda(u,0)\,\frac{L}{\lambda}$$

da cui subito $\mathcal{F}_\lambda u \in X_\lambda$. Si noti che questo punto vale nella sola ipotesi $\lambda > 0$.

Verifichiamo infine se $\mathcal{F}_\lambda$ è una contrazione o meno. In questo punto serve l'ipotesi che λ sia abbastanza grande. Se $u, v \in X_\lambda$, un calcolo analogo al precedente porta a

$$|(\mathcal{F}_\lambda u)(t) - (\mathcal{F}_\lambda v)(t)| \leq d_\lambda(u,v)\,\frac{L}{\lambda}\, e^{\lambda t}.$$

Deduciamo

$$|e^{-\lambda t}\big((\mathcal{F}_\lambda u)(t) - (\mathcal{F}_\lambda v)(t)\big)| \le d_\lambda(u,v)\,\frac{L}{\lambda}$$

da cui subito

$$d_\lambda(\mathcal{F}_\lambda u, \mathcal{F}_\lambda v) \le \alpha d_\lambda(u,v) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{L}{\lambda}\,.$$

Dunque $\alpha < 1$ se $\lambda > L$ e in tali condizioni si conclude. ∎

Osservazione. Si può dimostrare direttamente che, nelle ipotesi fatte, ogni soluzione continua dell'equazione di Volterra appartiene a X_L, dunque a X_λ per ogni $\lambda > L$, per cui l'unicità della soluzione trovata con il teorema precedente riguarda, di fatto, l'unicità nell'ambito di tutte le soluzioni.

Osserviamo inoltre che, se u_0 denota anche la corrispondente funzione costante, allora la successione $\{\mathcal{F}_\lambda^n u_0\}$ (che, si noti, non dipende da λ e coincide con quella data dal metodo di Peano-Picard) converge alla soluzione del problema di Cauchy nel senso della distanza d_λ per ogni $\lambda > L$, grazie all'ultima tesi del Teorema delle contrazioni. In particolare essa converge uniformemente in ogni intervallo limitato. Si noti che lo stesso fatto vale se la funzione costante u_0 è sostituita da una qualunque altra funzione $\bar{u}_0 \in X_\lambda$.

Osservazione. L'ipotesi (7) può essere indebolita in modo che la dimostrazione funzioni ancora solo con piccole modifiche. In sostituzione della (7) si può richiedere infatti una condizione del tipo $|f(t,0)| \le Ce^{Mt}$ per ogni $t \ge 0$, con certe costanti C e M. In tale ipotesi, infatti, occorre sì modificare la dimostrazione del fatto che la condizione $u \in X_\lambda$ implica $\mathcal{F}_\lambda u \in X_\lambda$ a causa della presenza di un termine aggiuntivo, ma tutto si sistema supponendo semplicemente anche $\lambda > M$.

Tuttavia lo scopo che ci eravamo prefissi non era quello di trovare risultati generali, quanto piuttosto quello di illustrare tecniche di applicazione di risultati astratti, quale è il teorema delle contrazioni.

Notiamo che la stessa tecnica si adatta alla costruzione di una soluzione definita solo in $[0,T]$ con T finito arbitrario senza alcuna ipotesi su $f(t,0)$. In questo caso lo spazio è semplicemente quello delle funzioni continue in $[0,T]$ ma munito della distanza che, come la (9), fa intervenire l'esponenziale, anziché della metrica usuale. ∎

L'ultima applicazione del Teorema delle contrazioni riguarda il problema delle funzioni implicite, problema che è ben risolto dal noto Teorema del Dini. Introduciamo qualche notazione ed enunciamo e dimostriamo tale teorema.

Nello spazio euclideo prodotto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ denotiamo con (x,y) la variabile, naturalmente con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è un aperto e se $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è una funzione dotata di derivate parziali rispetto alle variabili y_i, $i = 1, \ldots, n$, denotiamo con $\partial F/\partial y$ la matrice $n \times n$ avente tali derivate come colonne e con $\nabla_y F_k$ il vettore delle derivate parziali $\partial F_k/\partial y_i$ della componente k-esima di F.

Teorema del Dini. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua con le derivate parziali rispetto alle variabili y_i. Sia poi $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che*

$$f(x_0,y_0) = 0 \quad e \quad \det \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \ne 0. \tag{10}$$

Allora esistono un intorno aperto I di x_0 e un intorno aperto J di y_0, con $I \times J \subseteq \Omega$, tali che, per ogni $x \in I$, esista uno e un solo $y \in J$ tale che $f(x,y) = 0$. ■

Dimostrazione. Ricordiamo che, se $\omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto convesso e se $\phi : \omega \to \mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile con derivate limitate, allora vale la disuguaglianza

$$(11) \qquad |\phi(y') - \phi(y'')| \le |y' - y''| \left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{y \in \omega} |\nabla \phi_k(y)|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{per ogni } y', y'' \in \omega$$

ove ϕ_k è la k-esima componente di ϕ, come si vede facilmente applicando il Teorema del valor medio di Lagrange alle funzioni $t \mapsto \phi_k(y'' + t(y' - y''))$, $t \in [0,1]$.

Ora presentiamo il problema della risolubilità dell'equazione $f(x,y) = 0$ rispetto a y come un problema di punto fisso. Usando la seconda delle (10), vediamo che l'equazione $f(x,y) = 0$ equivale alla seguente

$$y - \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^{-1} f(x,y) = y.$$

Siamo pertanto indotti a considerare la funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definita dalla formula

$$(12) \qquad g(x,y) = y - \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^{-1} f(x,y)$$

e a cercare di applicare, per x fissato vicino a x_0, il Teorema delle contrazioni alla funzione $y \mapsto g(x,y)$, pensata questa definita in un certo intorno di y_0. Precisiamo il tutto. Conviene introdurre le notazioni seguenti: se $r > 0$ poniamo $B'_r = B_r(x_0)$ e $B''_r = B_r(y_0)$ (palle di $\mathbb{R}^m$ e di $\mathbb{R}^n$ rispettivamente). Ora osserviamo che le due funzioni $\partial g / \partial y$ (a valori matrici) e g (a valori vettoriali) sono continue. Inoltre nel punto (x_0, y_0) esse valgono rispettivamente la matrice nulla e y_0. Dunque, per ogni $\eta > 0$, esistono $\delta, \varepsilon > 0$ tali che $B'_\delta \times B''_\varepsilon \subset \Omega$ e verificanti le condizioni seguenti:

$$(13) \quad |\nabla_y g_k(x,y)| \le \eta \quad \text{e} \quad |g(x, y_0) - y_0| \le \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{per ogni } x, y \in B'_\delta \times B''_\varepsilon \text{ e } k = 1, \dots, n.$$

Infatti, fissato $\eta > 0$, determiniamo dapprima δ ed ε in modo da soddisfare la prima condizione; poi rimpiccioliamo δ se necessario per soddisfare anche la seconda. Ora vediamo come conviene scegliere i valori di $\eta, \varepsilon, \delta$. Cerchiamo una condizione di Lipschitz per g rispetto alla seconda variabile, osservando che B''_ε è una aperto convesso. Se $x \in B'_\delta$ e $y', y'' \in B''_\varepsilon$, abbiamo per la (11) e per la prima delle (13)

$$|g(x,y') - g(x,y'')| \le |y' - y''| \left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{y \in B''_\varepsilon} |\nabla_y g_k(x,y)|^2 \right)^{1/2} \le \eta \sqrt{n}\, |y' - y''|.$$

In vista dell'applicabilità del Teorema delle contrazioni, scegliamo allora $\eta = 1/(2\sqrt{n})$ e determiniamo ε e δ di conseguenza, in modo da avere

$$(14) \qquad |g(x,y') - g(x,y'')| \le \frac{1}{2} |y' - y''| \quad \text{per ogni } x \in B'_\delta \text{ e } y', y'' \in B''_\varepsilon.$$

A questo punto possiamo fissare I e J: scegliamo $I = B'_\delta$ e $J = B''_\varepsilon$. Ciò che ancora dobbiamo dimostrare è che, per ogni $x \in I$, esiste uno e un solo $y \in J$ tale che $g(x,y) = y$. Dunque fissiamo $x \in I$.

Tuttavia, siccome J è, come vuole l'enunciato, aperto anziché chiuso, esso male si presta all'applicazione del Teorema delle contrazioni, per cui la conclusione della dimostrazione risulta più complessa. Dimostriamo che, per ogni $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, l'equazione $g(x,y) = y$ ha una e una sola soluzione $y \in B''_\varepsilon$ verificante più precisamente $|y - y_0| \le \sigma$.

Fissiamo dunque anche $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, poniamo $C_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y - y_0| \le \sigma\}$ e cerchiamo di applicare il Teorema delle contrazioni alla funzione $y \mapsto g(x,y)$, $y \in C_\sigma$. Innanzi tutto C_σ è completo rispetto alla metrica euclidea, in quanto è un chiuso di $\mathbb{R}^n$. Ora vediamo che, se $y \in C_\sigma$, allora $g(x,y) \in C_\sigma$. Per la (14) e la seconda delle (13) abbiamo infatti

$$(15) \quad |g(x,y) - y_0| \le |g(x,y) - g(x,y_0)| + |g(x,y_0) - y_0| \le \frac{1}{2}\,|y - y_0| + \frac{\varepsilon}{4} \le \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.$$

Infine la proprietà di contrazione è garantita ancora dalla (14). Dunque concludiamo che, per ogni $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, l'equazione $g(x,y) = y$ ha una e una sola soluzione $y \in C_\sigma$.

Finalmente possiamo concludere dimostrando che esiste uno e un solo $y \in J$ verificante $g(x,y) = y$. Per avere l'esistenza è sufficiente considerare la soluzione $y \in C_{\varepsilon/2} \subset J$ appena costruita. Vediamo infine l'unicità. Se $y', y'' \in J = B''_\varepsilon$ sono due soluzioni, allora, scelto $\sigma = \max\{\varepsilon/2, |y' - y_0|, |y'' - y_0|\}$, abbiamo $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, $y', y'' \in C_\sigma$, $g(x,y') = y'$ e $g(x,y'') = y''$, da cui $y' = y''$.

Osservazione. Notiamo che, con le notazioni della dimostrazione, se $x \in I$, la soluzione $y \in J$ trovata appartiene di fatto a $C_{\varepsilon/2}$.

Osservazione. L'enunciato che abbiamo dato non parla di continuità della funzione implicita, cioè della funzione u che a ogni $x \in I$ associa l'unico $y \in J$ tale che $f(x,y) = 0$. La dimostrazione precedente, infatti, non prende precauzioni in questa direzione. Ma, nelle stesse ipotesi, si può dimostrare che tale funzione u è continua in tutti i punti $x \in I$ tali che $\det(\partial f(x, u(x)) \ne 0$ e che tali punti costituiscono un intorno di x_0. La dimostrazione si può basare proprio sulla considerazione della restrizione di f all'insieme

$$\Omega' = \{(x,y) \in \Omega : \ \det(\partial f(x,y)/\partial y) \ne 0\}$$

il quale è un aperto (dato che la funzione $\det(\partial f/\partial y)$ è continua) contenente (x_0, y_0) e sull'applicazione del teorema precedente a partire da punti del tipo $(x', u(x'))$, ciascuno dei quali verifica le ipotesi.

Tuttavia preferiamo omettere i dettagli e presentare un'altra applicazione del Teorema delle contrazioni. Dimostriamo direttamente l'esistenza di una funzione implicita continua.

Teorema. *Nelle ipotesi e con le notazioni del Teorema del Dini, esistono un intorno aperto I di x_0 e un numero reale $\sigma > 0$ tali che, posto $C_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y - y_0| \le \sigma\}$, risulti $I \times C_\sigma \subset \Omega$ e fra le funzioni $u : I \to C_\sigma$ continue ve ne sia una e una sola che verifica $f(x, u(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.* ∎

Dimostrazione. Riprendiamo la dimostrazione precedente, di cui conserviamo le notazioni, e scegliamo $\sigma = \varepsilon/2$. Introduciamo poi lo spazio metrico (X, d) come segue:

$$X = \{u : I \to C_\sigma \text{ continue}\} \quad \text{e} \quad d(u,v) = \sup_{x \in I} |u(x) - v(x)| \quad \text{per } u, v \in X\,.$$

La completezza si verifica facilmente, usando il fatto che C_σ è chiuso. Ora rivediamo l'equazione da risolvere nella forma $g(x, u(x)) = u(x)$ per ogni $x \in I$, forma che, a sua volta, può essere presentata come $\mathcal{G}u = u$ pur di definire coerentemente $\mathcal{G} : X \to X$.

Per $u \in X$ denotiamo con $\mathcal{G}u$ la funzione $x \mapsto g(x, u(x))$, $x \in I$. Abbiamo dunque $(\mathcal{G}u)(x) = g(x, u(x))$ e $\mathcal{G}u$ è effettivamente ben definita e continua non appena $u \in X$. Inoltre, se $u \in X$, la (15) fornisce $|(\mathcal{G}u)(x) - y_0| \le \sigma$ per ogni $x \in I$, cioè $(\mathcal{G}u)(x) \in C_\sigma$ per ogni $x \in I$. Dunque $\mathcal{G}u \in X$.

Verifichiamo infine che $\mathcal{G}$ è una contrazione. Siano infatti $u, v \in X$. Siccome $B'_\delta = I$ e $C_\sigma \subset B''_\varepsilon$, vediamo che la (14), applicata con $y' = u(x)$ e $y'' = v(x)$, fornisce

$$|(\mathcal{G}u)(x) - (\mathcal{G}v)(x)| = |g(x, u(x)) - g(x, v(x))| \le \frac{1}{2}\,|u(x) - g(x)| \quad \text{per ogni } x \in I$$

e passando all'estremo superiore otteniamo $d(\mathcal{G}u, \mathcal{G}v) \le (1/2) d(u,v)$.

Dunque $\mathcal{G}$ è una contrazione in X e di conseguenza ha uno e un solo punto fisso u. Tale u verifica $g(x, u(x)) = u(x)$ per ogni $x \in I$, cioè $f(x, u(x)) = 0$ per ogni $x \in I$, e quindi è la funzione cercata.

Osservazione. Notiamo che l'unicità è ottenuta solo nell'ambito delle funzioni $u \in X$, cioè nell'ambito delle funzioni a valori in C_σ continue, anche se, come sappiamo, si ha unicità nell'ambito di tutte le funzioni, continue o meno, a valori in B''_ε.

Notiamo inoltre che, per l'ultima tesi del Teorema delle contrazioni, fissato comunque $u_0 \in X$, la successione $\{\mathcal{G}^k u_0\}$ converge uniformemente in I alla funzione implicita u costruita. Posto per comodità $u_k = \mathcal{G}^k u_0$, semplicemente esplicitando la definizione di $\mathcal{G}^k$ a partire da quella di $\mathcal{G}$, si vede che, per ogni $x \in I$, il valore $u_{k+1}(x)$ è l'unica soluzione $y \in \mathbb{R}^n$ del sistema lineare regolare

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot (u_k(x) - y) = f(x, u_k(x))$$

ove, per maggior chiarezza, abbiamo indicato con il punto il prodotto matrice-vettore.