Esercizi scelti
di Analisi matematica elementare

Gianni Gilardi

Queste pagina costituiscono il materiale relativo a un corso intensivo di analisi matematica dedicato a quegli studenti del corso di laurea in Matematica che desiderano approfondire la materia del primo anno, materia che, in seguito alla riforma, è stata ridotta sia dal punto di vista quantitativo sia da quello qualitativo.

Di fatto, le lezioni sono svolte dagli studenti stessi, che risolvono in aula gli esercizi assegnati loro la settimana precedente. Durante le lezioni vengono in genere dati approfondimenti ulteriori, suggeriti dagli esercizi proposti.

Siccome vengono presupposti solo gli elementi fondamentali sui limiti, sulle serie e sul calcolo differenziale e integrale per funzioni di una e più variabili, premetto nozioni, notazioni e risultati che possono intervenire negli esercizi o nella loro risoluzione.

Gli esercizi non sono ordinati per argomenti, né per difficoltà. Tuttavia, genericamente, gli esercizi più difficili sono gli ultimi. Le soluzioni di alcuni esercizi sfruttano i risultati di esercizi precedenti. Per gli esercizi più delicati fornisco qualche suggerimento negli ultimi due paragrafi.

1. Preliminari

1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ e $f : A \to \mathbb{R}$. La funzione f è detta hölderiana di esponente (di Hölder) α quando esiste una costante $L \geq 0$ (detta costante di Hölder) tale che valga la disuguaglianza

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in A\,.$$

Se A è aperto, la funzione è detta localmente hölderiana di esponente α quando è hölderiana di esponente α la sua restrizione a ogni sottoinsieme chiuso e limitato incluso in A (la costante di Hölder potendo dipendere dal sottoinsieme). Se $\alpha > 1$ e l'aperto A è anche connesso, ogni funzione localmente hölderiana di esponente α è costante. Per questo motivo si considera solo il caso in cui $\alpha \in (0,1]$. Nel caso estremo $\alpha = 1$ si parla di funzioni lipschitziane, di costanti di Lipschitz e di funzioni localmente lipschitziane.

1.2. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (non vuoto), si definisce la funzione *distanza da* A mediante

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{|x-y| : \ y \in A\}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

La funzione $\operatorname{dist}(\,\cdot\,, A)$ è lipschitziana con costante di Lipschitz 1 e $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ se e solo se x appartiene alla chiusura di A .

1.3. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\operatorname{ipo} f = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} :\ y \le f(x)\} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{epi} f = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} :\ y \ge f(x)\}\,.$$

1.4. Ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ può essere presentato nella forma $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ove ciascuno degli insiemi B_n è una palla aperta di $\mathbb{R}^N$.

Se $N = 1$ si può anche richiedere che gli insiemi B_n siano a due a due disgiunti pur di interpretare il termina "palla" come "intervallo", limitato o meno.

1.5. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty.$$

Allora la formula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

definisce una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e f è continua in ogni punto in cui tutte le f_n sono continue.

1.6. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, k un intero positivo e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ tutte di classe C^k. Supponiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |Df_n(x)| < +\infty$$

per ogni derivazione parziale D di ordine $\le k$. Allora la formula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

definisce una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^k e risulta

$$Df(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Df_n(x)$$

in ogni punto $x \in \Omega$ e per ogni derivazione parziale D di ordine $\le k$.

1.7. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso, limitato e misurabile secondo Peano–Jordan, $u, v : A \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e $\alpha \in (0,1)$. Allora vale la disuguaglianza di Hölder

$$\int_A uv\,dx \le \left(\int_A |u|^{1/\alpha}\,dx\right)^{\alpha} \left(\int_A |v|^{1/(1-\alpha)}\,dx\right)^{1-\alpha}.$$

1.8. Un insieme è al più numerabile se può essere presentato come l'immagine di una successione. Si dimostra che l'unione di una famiglia al più numerabile di insiemi al più numerabili è un insieme al più numerabile.

1.9. Se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e non negativa, poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

il limite potendo essere finito o infinito.

2. Esercizi

2.1. Siano A un intervallo e $\alpha > 1$. Dimostrare che ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ hölderiana di esponente α è costante.

2.2. Dimostrare che ogni cubica del tipo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ ha un centro di simmetria.

2.3. Sia P un polinomio a coefficienti reali in una indeterminata i cui zeri complessi siano tutti reali. Dimostrare che della stessa proprietà gode il polinomio derivato P' .

2.4. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \qquad \text{per ogni intero } n \geq 1$$

e dedurre che la serie armonica diverge secondo la definizione di divergenza.

2.5. Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un disco di raggio 2 e p un punto del suo bordo. Sia D' il disco di centro p e raggio 1 . Calcolare l'area di $D \cap D'$.

2.6. Siano $B \subseteq \mathbb{R}^3$ una palla di raggio 2 e p un punto del suo bordo. Sia B' la palla di centro p e raggio 1 . Calcolare il volume di $B \cap B'$.

2.7. Siano C_1 e C_2 due solidi cilindrici infiniti a sezione circolare di raggio 1 i cui assi si intersecano perpendicolarmente. Calcolare il volume di $C_1 \cap C_2$.

2.8. Siano $B \subseteq \mathbb{R}^3$ una palla di raggio $R > 0$ e C un cono circolare (solido illimitato) di semiapertura $\alpha \in (0, \pi/2)$ avente vertice nel centro di B . Calcolare il volume di $B \cap C$.

2.9. Calcolare l'area della parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ costituita dai suoi punti (x, y, z) tali che $z \geq 0$.

2.10. Calcolare l'area della parte del iperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ costituita dai suoi punti (x, y, z) tali che $|z| \leq 1$.

2.11. Siano $r, R > 0$ tali che $r < R$ e siano D un disco di raggio r e a una retta giacente nel piano del disco e distante R dal suo centro. Calcolare il volume del toro solido ottenuto facendo ruotare D intorno ad a .

2.12. Dati $R > 0$ e $\alpha \in (0, \pi/2)$, sia S un settore circolare di ampiezza 2α e raggio R . Si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare S intorno alla retta, complanare con S , che passa per il vertice di S ed è perpendicolare alla sua bisettrice.

2.13. Sia $A = \{(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) : \ 0 < \vartheta \leq 2\pi, \ 0 \leq \rho \leq \vartheta\}$. Calcolare l'area di A e la lunghezza della sua frontiera.

2.14. Sia $\alpha \in (0, 1]$. Dimostrare la disuguaglianza

$$\big||x|^\alpha - |y|^\alpha\big| \leq |x - y|^\alpha \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R} .$$

2.15. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

converge. Detta γ sua la somma, dedurre che per la successione delle ridotte della serie armonica vale lo sviluppo asintotico

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1) \qquad \text{per } n\to\infty\,.$$

Dimostrare che $0<\gamma<1$.

2.16. Siano $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ di classe C^1 e $\alpha\in(0,1)$. Si ponga

$$L=\left(\int_a^b |f'(x)|^{1/(1-\alpha)}\,dx\right)^{1-\alpha}.$$

Dimostrare che f è hölderiana di esponente α e costante L.

2.17. Dimostrare che la funzione $f(x)=x\ln x$, $x\in(0,1)$, è hölderiana di ogni esponente $\alpha\in(0,1)$, ma non lipschitziana. Per ogni $\beta\in(0,1)$ costruire una funzione hölderiana di ogni esponente $\alpha\in(0,\beta)$ ma non di esponente α. Costruire una funzione continua in $[0,1]$ ma non hölderiana di alcun esponente $\alpha\in(0,1]$.

2.18. Sia $A=\mathbb{R}^2\setminus([0,+\infty)\times\{0\})$. Si costruisca una funzione $f:A\to\mathbb{R}$ di classe C^1, con gradiente limitato e non lipschitziana.

2.19. Sia A l'insieme delle funzioni $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$f(0)=f(1)=0 \qquad \text{e} \qquad |f'(x)|\le 1 \quad \text{per ogni } x\in[0,1]$$

e sia $B\subseteq\mathbb{R}$ l'insieme descritto da $\sup|f|$ al variare di f in A. Calcolare $\sup B$ e dimostrare che esso non è un massimo.

2.20. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n}=+\infty$.

2.21. Per ciascuna delle funzioni

$$\ln(1+e^x), \qquad \sqrt{x^2+1}, \qquad \frac{\pi}{2}-\arctan x$$

trovare sviluppi del tipo $f(x)=c\,x^{\alpha}\big(1+o(1)\big)$ per $x\to+\infty$ con $c,\alpha\in\mathbb{R}$.

2.22. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}x^n n^{-\sqrt{n}}$ al variare di $x\in(0,+\infty)$.

2.23. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali positivi tali che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}/a_n}{b_{n+1}/b_n} \quad \text{esista e sia } < 1 .$$

Dimostrare che se la serie $\sum b_n$ converge allora converge anche la serie $\sum a_n$.

2.24. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{n^n}$ al variare di $x \in (0,+\infty)$.

2.25. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^n}{(n!)^2}$ al variare di $x \in (0,+\infty)$.

2.26. Dare uno sviluppo asintotico del tipo

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{c}{n}\bigl(1+o(1)\bigr) \qquad \text{per } n\to\infty .$$

2.27. A ogni funzione $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ limitata si associ la funzione $f^*:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definita dalla formula

$$f^*(x) = \sup\{f(t):\ 0\le t\le x\} .$$

Determinare gli interi $k\ge 0$ tali che valga l'implicazione: se f è di classe C^k allora è di classe C^k anche la corrispondente f^* .

2.28. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ci si pone il problema di dare condizioni su f perché esista una funzione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convessa tale che $g(x)\ge f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Dimostrare che la continuità è sufficiente. Dare una condizione necessaria e sufficiente.

2.29. Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Ci si pone il problema di dare condizioni su f perché esista una funzione $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ non decrescente tale che $g(x)\ge f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Dimostrare che la continuità è sufficiente. Dare una condizione necessaria e sufficiente.

2.30. Considerato l'arco di iperbole equilatera di equazione $x^2-y^2=1$ individuato dalla condizione $x\ge 1$, per ogni $x\ge 1$ si denotino con $\Gamma(x)$ l'insieme dei punti di tale arco la cui ascissa x' verifica $1\le x'\le x$ e con $S(x)$ il "settore" ottenuto prendendo l'unione di tutti i segmenti aventi un estremo nell'origine e l'altro in un punto di $\Gamma(x)$. Calcolare l'area $a(x)$ di $S(x)$ e stabilire il legame fra la funzione $x\mapsto a(x)$ e il coseno iperbolico.

2.31. Dare una formula generale per l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\, dx$, $n\in\mathbb{N}$.

2.32. Per $\lambda>1$ si definisca $f_\lambda:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ mediante

$$f_\lambda(x) = \int_0^\lambda t^x e^t\, dt.$$

Dimostrare che f_λ ha uno e un solo punto di minimo x_λ . Dimostrare che esistono valori di λ tali che $x_\lambda = 1$ e che x_λ diverge a $+\infty$ per $\lambda\to 1^+$.

2.33. Calcolare la misura $n-$ dimensionale del più piccolo convesso di $\mathbb{R}^n$ che contiene l'origine e tutti i versori della base canonica.

2.34. Immaginando di non conoscere le funzioni ln e exp, definire

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad \text{per } x \in (0, +\infty)$$

e dimostrare le proprietà principali del logaritmo.

Dimostrare in particolare che ln è invertibile e che, detta exp la sua inversa, exp è definita in tutto $\mathbb{R}$ e verifica $\exp'(x) = \exp(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2.35. Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 monotona è strettamente monotona se e solo se l'insieme degli zeri di f' (che è chiuso di conseguenza) non ha punti interni.

Dimostrare che, viceversa, dato ad arbitrio un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e privo di punti interni, esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, strettamente monotona e tale che $f'(x) = 0$ se e solo se $x \in C$.

2.36. Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 convessa è strettamente convessa se e solo se l'insieme degli zeri di f'' (che è chiuso di conseguenza) non ha punti interni.

Dimostrare che, viceversa, dato ad arbitrio un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e privo di punti interni, esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2, strettamente convessa e tale che $f''(x) = 0$ se e solo se $x \in C$.

2.37. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e differenziabile tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty. \tag{$*$}$$

Si dimostri che, dato comunque $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y_0 < f(x_0)$, esistono esattamente due rette passanti per p_0 e tangenti al grafico di f. Discutere che avviene quando la condizione $(*)$ viene lasciata cadere.

2.38. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 con derivata localmente hölderiana di esponente $\alpha \in (0, 1]$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dimostrare la formula di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O\left(|x - x_0|^{1+\alpha}\right) \qquad \text{per } x \to x_0 .$$

2.39. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si è interessati a dare condizioni sufficienti perché per ogni punto del grafico di f passino due circonferenze incluse in $\operatorname{epi} f$ e in $\operatorname{ipo} f$ rispettivamente. Mostrare che il fatto è vero se f è di classe C^2.

Mostrare che il fatto è vero, più in generale, nel caso delle funzioni di classe C^1 con derivata prima localmente lipschitziana e che l'ipotesi che la derivata sia localmente hölderiana, anche di ogni esponente $\alpha \in (0, 1)$, non basta.

2.40. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si dimostri che, dato comunque $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y_0 \le f(x_0)$, esiste almento una retta r passante per p_0 e inclusa in $\operatorname{ipo} f$. Quante sono queste rette?

2.41. Sia A come nell'esercizio 2.13 e sia f la funzione caratteristica di A. Dimostrare che tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle. Si può dire che f ha differenziale nullo nell'origine? Costruire un esempio più semplice con la stessa patologia.

2.42. Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni seguenti: tutte le derivate direzionali di f in $(0,0)$ esistono e sono nulle; f non è limitata in alcun intorno dell'origine.

Costruire g nelle stesse condizioni e, in aggiunta, di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$. Costruire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in condizioni analoghe.

2.43. Costruire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, strettamente positiva in $(0,+\infty)$ e nulla altrove.

2.44. Dati comunque $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ costruire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, strettamente positiva in (a,b) e nulla altrove.

2.45. Costruire $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f(x) = 1$ per $x \leq 1$ e $f(x) = 0$ per $x \geq 2$. Dimostrare che per ogni funzione di questo tipo vale la disuguaglianza stretta $\sup |f'| > 1$.

2.46. Costruire $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f(x) > 0$ per $|x| < 1$ e $f(x) = 0$ per $|x| \geq 1$.

2.47. Costruire $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f(x) = 1$ per $|x| \leq 1$ e $f(x) = 0$ per $|x| \geq 2$.

2.48. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ che sia strettamente positiva in Ω e nulla altrove.

2.49. Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile in 0 con $f'(0) > 0$ ma non monotona in alcun intorno di 0.

2.50. Sia B una palla chiusa di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che, fra tutti i solidi regolari (frontiera di classe C^1) inclusi in B, B e solo B massimizza il rapporto fra il volume del solido e l'area della sua frontiera.

2.51. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenziabile e tale che $f'(a) < 0 < f'(b)$. Dimostrare che f' ha almeno uno zero. Dedurre che, se f è una funzione differenziabile in un intervallo, allora l'immagine di f' è pure un intervallo.

Dedurre che la derivata di una funzione differenziabile in un intervallo non può avere salti. Può avere discontinuità eliminabili?

2.52. Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa. Per $x > 0$ sia $T(x)$ il triangolo di vertici $(x, f(x))$, $(x,0)$ e $(0,0)$. Si dia una formula per il calcolo dell'area di $T(x) \cap \operatorname{epi} f$.

2.53. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non decrescente. Si dimostri che l'insieme delle discontinuità di f è al più numerabile.

2.54. Assegnato ad arbitrio un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ al più numerabile, costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non decrescente che sia discontinua in ogni punto di S e continua in ogni punto del complementare.

2.55. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Per $\lambda \geq 0$ si ponga

$$A(\lambda) = \{(x,y) \in \operatorname{ipo} f : \ 0 \leq y \leq \lambda\}.$$

Si dimostri che $A(\lambda)$ è misurabile secondo Peano–Jordan e si denoti con $g(\lambda)$ la sua misura $(n+1)-$dimensionale. Si dimostri che la funzione $\lambda \mapsto g(\lambda)$ è lipschitziana dando anche una stima della costante di Lipschitz. Che si può dire in situazioni più generali di funzioni f discontinue?

2.56. Per n intero positivo sia x_n l'unico numero reale verificante

$$\sin x_n = \frac{1}{x_n} \qquad \text{e} \qquad 2n\pi < x_n < 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrare che vale lo sviluppo asintotico

$$x_n = 2n\pi + \frac{1}{2n\pi} + o(1/n) \qquad \text{per } n \to \infty.$$

2.57. Costruire una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ con grafico denso in $[0,1]^2$.

2.58. Si introduca la successione $\{u_n\}$ di funzioni di $[0,1]$ in sé ponendo $u_0(x) = x$ e definendo ricorsivamente u_{n+1} a partire da u_n mediante le condizioni seguenti:

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{2} u_n(3x) \qquad \text{se } 0 \leq x \leq 1/3$$

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{se } 1/3 \leq x \leq 1/2$$

il grafico di u_{n+1} è simmetrico rispetto al punto $(1/2, 1/2)$.

Si definisca, accettando il fatto che il limite esiste, $u : [0,1] \to [0,1]$ mediante

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \qquad \text{per ogni } x \in [0,1].$$

Si dimostri che u è hölderiana. Si determini il più grande esponente di Hölder α di u. Per tale α si determini la più piccola costante di Hölder L.

2.59. Per $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, denotiamo per comodità con $I(x,r)$ l'intervallo aperto di centro x e di ampiezza r, cioè di estremi $x \pm r/2$.

Sia $\sigma \in (0,1]$ e si introduca la successione $\{A_n\}$ di sottoinsiemi di $[0,1]$ ponendo $A_0 = \emptyset$ e definendo ricorsivamente A_{n+1} a partire da A_n come segue. Rappresentato $[0,1] \setminus A_n$ come unione di 2^n intervalli chiusi a due a due disgiunti e detti $x_1, \ldots, x_{2^n}$ i punti medi di tali intervalli, l'insieme A_{n+1} è dato dalla formula

$$A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^n} I\big(x_k, \sigma/3^{n+1}\big).$$

Si introducano infine l'insieme A e la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{e} \qquad f(x) = 1 \quad \text{se } x \in A\,, \quad f(x) = 0 \quad \text{se } x \notin A\,.$$

Si dimostri che f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\sigma = 1$. Si costruisca inoltre una successione $\{f_n\}$ di funzioni a scala tale che

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

dimostrando in tal modo che la somma di una serie di funzioni a scala può rappresentare una funzione non integrabile secondo Riemann.

2.60. Definiamo $f : (0,1) \to (0,1)$ come segue. Se $x \in (0,1)$, rappresentiamo x nella forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, 2^{-n},$$

ove la successione $\{c_n\}$ prende solo i valori 0 e 1 ed è tale che per ogni m esista $n > m$ tale che $c_n = 0$, e poniamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}\, 2^{-2n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}\, 2^{-2n+1}.$$

Discutere la continuità di f.

3. Qualche aiuto di primo livello

2.15. Usare gli sviluppi di Taylor di $\ln(1+x)$ di vari ordini e centro 0 con i resti di Lagrange. Per la seconda parte confrontare la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2}$ con l'integrale $\int_1^{+\infty} x^{-2}\, dx$.

2.16. Usare la disuguaglianza di Hölder.

2.17. Usare 2.16.

2.20. Impostare la verifica della definizione di successione divergente. Osservare che se $n \geq 2M$ allora...; oppure sfruttare la convergenza in tutto $\mathbb{R}$ della serie esponenziale.

2.24. Nel caso critico $x = e$, detto a_n il termine generale, osservare che $a_{n+1}/a_n \geq 1$ per ogni n.

2.25. Nel caso critico $x = 1/4$, detto a_n il termine generale, dedurre una stima del tipo $a_n \geq cn^{-1/2}$.

2.32. Dimostrare che f_λ è strettamente convessa. Per la seconda parte dimostrare che, per ogni $x > 1$, $f'_\lambda(x)$ diventa negativo se λ è sufficientemente vicino a 1.

2.33. Trovare una formula ricorrente.

2.35. Per la seconda parte usare la distanza da C.

2.39. Osservare che si ottiene un enunciato equivalente sostituendo le circonferenze con archi di parabole e usare lo sviluppo di Taylor. Per la seconda parte usare 2.38.

2.43. Studiare $e^{-1/x}$ per $x \to 0^+$.

2.45. Studiare la funzione integrale della funzione dell'esercizio 2.44.

2.46. Definire $f(x) = g(|x|)$ con $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ opportuna.

2.48. Usare 1.4 e presentare Ω come unione di palle B_n. Usare poi 2.46 e prendere le funzioni f_n relative alle palle B_n. Definire infine $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$, con $\{\varepsilon_n\}$ opportuna successione di numeri reali positivi, e usare 1.6.

2.50. Rappresentare il volume del solido come integrale di superficie osservando che $\operatorname{div} x = 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$.

2.53. Per $n = 1, 2, \ldots$ sia D_n l'insieme dei salti di f di valore $\geq 1/n$ che cadono in $(-n, n)$. Allora l'insieme delle discontinuità di f è dato dall'unione di tutti i D_n.

2.54. Nel caso in cui S è infinito, presentare S come immagine di una successione $\{x_n\}$ iniettiva, scegliere funzioni f_n non decrescenti tali che, per ogni n, f_n sia discontinua in x_n e continua altrove e usare 1.5.

2.56. Usare sviluppi accorciati di Taylor.

2.58. Per la prima tesi trovare, ragionando per induzione, un esponente e una costante di Hölder comuni a tutte le u_n. Per il resto si calcoli u in certi punti.

2.59. Calcolare gli integrali superiore e inferiore.

2.60. La situazione diventa più chiara se si osserva che x viene rappresentato nella forma $x = 0, c_1 c_2 \ldots$ in base 2 e che l'analoga rappresentazione di $f(x)$ si ottiene da quella di x in modo molto semplice.

4. Qualche aiuto di secondo livello

2.25. Usare la formula di Taylor di $\ln(1 + x)$ per dimostrare che vale una stima del tipo $\ln(a_{n+1}/a_n) \geq -1/(2n+2) - c/(n+1)^2$. Utilizzando poi 2.15, dedurre una stima del tipo $\ln a_n \geq c - (1/2) \ln n$.

2.48. Siano $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $g(x) > 0$ per $|x| < 1$ e $g(x) = 0$ altrove e x_n e r_n il centro e il raggio di B_n. Prendere $f_n(x) = g((x - x_n)/r_n)$ e $\varepsilon_n = n^{-2} h(r_n)$, ove h è una funzione positiva tale che $\sup_{t>0} t^{-k} h(t) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

2.53. Il numero degli elementi di D_n è al massimo $(f(n) - f(-n))/n$.