Esercizi sugli integrali

Gli esercizi proposti di seguito sono sostanzialmente suddivisi per tipo e le soluzioni di alcuni di essi sono date alla fine. Nel caso di esercizi che possono essere risolti in più di un modo la soluzione, se riportata, fornisce uno dei modi possibili. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono di livello leggermente superiore e possono intendersi riservati ai matematici.

1. Calcolare gli integrali elementari seguenti:

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx, \qquad \int_0^{-1} (2x - e^x)\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{3\,dx}{x^4}\,, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin x\,dx$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}\,, \qquad \int_1^9 \frac{dx}{2x}\,, \qquad \int_8^9 2^x\,dx\,, \qquad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{6\,dx}{1+x^2}$$

$$\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{x}\,, \qquad \int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx, \qquad \int_{-1}^1 |x|^{1/2}\,dx, \qquad \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

2. Calcolare gli integrali (quasi) elementari dati di seguito. Di alcuni di essi si può prevedere il risultato; in tali casi prevedere e poi confermare con il Teorema fondamentale del calcolo.

$$\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx, \qquad \int_0^1 \cos \pi x\,dx, \qquad \int_1^4 x^{-1/2} \exp \sqrt{x}\,dx, \qquad \int_0^{13} (1+2x)^{-2/3}\,dx$$

$$\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}\,, \qquad \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx \qquad \int_0^1 \cosh 2x\,dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx.$$

3. Dire per quali a, b reali non nulli vale la formula $\int_a^b (dx/x^2) = (1/a) - (1/b)$ giustificando la risposta.

4. Disegnare il grafico della funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (senza calcolarla) definita dalla formula

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ove f è specificata di volta in volta nelle righe che seguono. Si intende che il grafico sia qualitativo, ma esso deve essere corretto per quanto riguarda sia l'esatta localizzazione dei punti di massimo e di minimo e degli intervalli di monotonia sia il comportamento di F nei punti angolosi. Disegnare dapprima il grafico della funzione f e da questo dedurre quello di F.

$f(x) = x^2$	se $x < 0$,	$f(x) = 1 - x$	se $0 \le x \le 2$,	$f(x) = 1$	se $x > 2$.
$f(x) = \sin x$	se $x \le 0$,	$f(x) = x$	se $0 < x < 4$,	$f(x) = -1$	se $x \ge 4$.
$f(x) = \ln(1-x)$	se $x < 0$,	$f(x) = x^2$	se $0 \le x \le 1$,	$f(x) = 1$	se $x > 1$.
$f(x) = 1/x$	se $x < -1$,	$f(x) = 0$	se $-1 \le x \le 5$,	$f(x) = \tanh x$	se $x > 5$.

5. Calcolare $F(0)$ in ciascuno dei casi dell'Esercizio 4. Eventualmente aiutarsi con il grafico di f.

6. Calcolare $F(5)$ in ciascuno dei casi dell'Esercizio 4.

7. Calcolare $F(-2)$ nel primo e nell'ultimo dei casi dell'Esercizio 4.

8. Dare l'espressione analitica di F nel primo caso dell'Eserizio 4. Può essere conveniente usare la formula $F(x) = F(y) + \int_y^x f(t)\,dt$ (vera per ogni $x, y \in \mathbb{R}$). Disegnare poi il grafico di F sulla base dell'espressione analitica trovata e confrontarlo con quello disegnato nella risoluzione dell'Esercizio 4.

9. Usando il Teorema di integrazione per parti calcolare gli integrali

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx, \qquad \int_0^1 x\cosh x\,dx, \qquad \int_0^1 x^2\ln(x+1)\,dx$$
$$\int_0^1 \arctan x\,dx, \qquad \int_1^2 \ln^2 x\,dx, \qquad \int_0^1 x^3 e^x\,dx.$$

10. Per n intero non negativo si ponga

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx.$$

Mediante il Teorema di integrazione per parti dimostrare che $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ per ogni n. Usare questa informazione per ricalcolare l'ultimo integrale dell'Esercizio 9.

11. Per $x > 0$ e n intero non negativo si ponga

$$L_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n\,dt.$$

Mediante il Teorema di integrazione per parti dimostrare che $L_{n+1}(x) = x(\ln x)^{n+1} - (n+1)L_n(x)$ per $x > 0$ e per ogni n. Usare questa informazione per ricalcolare il quinto integrale dell'Esercizio 9.

12*. Usando due integrazioni per parti calcolare gli integrali

$$\int_a^b e^x\sin x\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^b e^x\cos x\,dx$$

ove a e b sono numeri reali arbitrari.

13*. Dimostrare che, per ogni n intero positivo, ciascuna delle due funzioni $f(x) = x^n\sin x$ e $g(x) = x^n\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, ha una primitiva della forma $F(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x$ ove P_n e Q_n sono polinomi di grado $\le n$.

14. Ricalcolare i primi sei integrali dell'Esercizio 2 riconducendoli a integrali davvero elementari mediante il Teorema di integrazione per sostituzione.

15. Usare il Teorema di integrazione per sostituzione per ricondurre ciascuno degli integrali scritti di seguito a integrali che si possono facilmente calcolare per parti.

$$\int_0^1 \exp\sqrt{x}\,dx, \quad \int_0^1 \exp(-x^{1/3})\,dx, \quad \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx, \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos(x^2)\,dx.$$

Attenzione ai nuovi estremi di integrazione.

16. Usare il Teorema di integrazione per sostituzione per ricondurre ciascuno degli integrali scritti di seguito a integrali di funzioni razionali o comunque più semplici.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sinh x}, \qquad \int_0^1 \tanh x\,dx, \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$$
$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}, \quad \int_2^{1+\cosh 1} \sqrt{x^2-2x-2}\,dx, \quad \int_0^{\pi/3} \tan^2 x\,dx.$$

Si era notato che l'ultimo era quasi immediato per altra via?

17. Trovare le primitive delle funzioni espresse dalle formule scritte di seguito negli intervalli indicati di volta in volta.

$$\cos x \ln \sin x, \quad \pi/4 < x < \pi/2; \qquad \frac{\cos \ln x}{x}, \quad x > 0; \qquad \frac{\cos(2/x)}{x^2}, \quad x > 0.$$

18*. Per x reale e n intero non negativo si ponga

$$E_n(x) = \int_{-x}^{x} y^{2n} \exp(-y^2)\, dy.$$

Dimostrare che per tali x e n vale la formula $E_{n+1}(x) = (n+1/2)E_n(x) - x^{2n+1}\exp(-x^2)$. Osserviamo che nessuna delle funzioni E_n è elementare. Tuttavia è noto che $E_0(x)$ tende a $\sqrt{\pi}$ per $x \to +\infty$ e la formula trovata consente di calcolare il limite di $E_n(x)$ per $x \to +\infty$ per ogni n, se si tiene conto che $t^\alpha \exp(-t)$ è infinitesima per $t \to +\infty$ per ogni α reale.

19. Si indichi invece la strategia per calcolare l'analoga funzione

$$F_n(x) = \int_0^x y^{2n+1} \exp(-y^2)\, dy, \quad x > 0,$$

in termini elementari.

20. Indicare la strategia da seguire per calcolare gli integrali seguenti:

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\, dx, \qquad \int_1^2 \frac{dx}{(x^2+x)^2}, \qquad \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2(x+1)^3}\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}, \qquad \int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}, \qquad \int_4^9 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}+2}.$$

Si determinino i nuovi estremi ogni volta che si applica il Teorema di integrazione per sostituzione.

Risposte ad alcuni esercizi

1. $16/3,\ 2-e^{-1},\ 7/8,\ (\sqrt{2}-1)/2,$
$2/\sqrt{3},\ \ln 3,\ 2^8/\ln 2,\ \pi/2,$
$\ln 2,\ 3/4,\ 4/3,\ \pi/6.$

2. $0,\ 0,\ 2(e^2-e),\ 3,$
$2,\ \sqrt{3}-1/3,\ (1/2)\sinh 2,\ 1-\pi/4.$

3. Se e solo se a e b hanno lo stesso segno. In questo caso, e solo in questo, è applicabile il Teorema fondamentale del calcolo alla funzione $x \mapsto -1/x$ definita in un intervallo che contiene a e b.

5. $-1/2,\ -1/2,\ -1/3,\ 0.$

6. $5/2,\ 13/2,\ 4,\ 0.$

7. $-19/6,\ \ln 2.$

8. $F(x) = x - x^2/2 - 1/2$ se $x \in [0,2]$, $F(x) = -1/2 + x^2/2$ se $x \le 0$, $F(x) = x - 5/2$ se $x > 2$.

9. -2, $\sinh 1 - \cosh 1 - 1$, $-5/12 + \ln 2$,
$\pi/4 - (1/2)\ln 2$, $2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2$, $6 - 2e$.

12. $(1/2)[e^x(\sin x - \cos x)]_a^b$, $(1/2)[e^x(\cos x + \sin x)]_a^b$.

15. $x = y^2$, $y \in [0,1]$; $x = -y^3$, con nuovi estremi 0 e -1 nell'ordine;
$x = y^2$, $y \in [0,\pi]$; $x = \sqrt{y}$, $y \in [0,1]$.

16. $x = \ln y$, $y \in [e, e^2]$; $x = \ln y$, $y \in [1,e]$; $x = 2\arctan y$, $y \in [3^{-1/2}, 1]$;
$x - 1 = \sinh y$, $y \in [\sinh^{-1}(-1), 0]$; $x - 1 = \cosh y$, $y \in [0,1]$; $x = \arctan y$, $y \in [0, 3^{1/2}]$, ma bastava osservare che $\tan^2 x = \tan'(x) - 1$.

17. $(1/2)\ln^2 \sin x + c$, $\sin \ln x + c$, $(-1/2)\sin(2/x) + c$.

19. Con la sostituzione $y = z^{1/2}$, $z \in [0, x^2]$, si ottiene l'integranda $(1/2)z^n \exp(-z)$, per cui il nuovo integrale si calcola procedendo per parti n volte ogni volta che n è davvero assegnato (meglio: si scrive una formula ricorrente).

20. Sia f l'integrando da considerare di volta in volta.
Eseguita dapprima la divisione con resto, si riscrive $f(x) = a + b/(x-2) + c/(x-3)$;
$f(x) = a/x + b/x^2 + c/(x+1) + d/(x+1)^2$;
$f(x) = (ax+b)/(x^2+1) + (cx+d)/(x^2+1)^2 + g/(x+1) + h/(x+1)^2 + k/(x+1)^3$ e, per quanto riguarda il termine moltiplicato dal coefficiente d, lo si presenta come $1/(x^2+1) + x \cdot x/(x^2+1)^2$ e si integra per parti il secondo addendo;
$f(x) = (ax+b)/(x^2+2x+1) + (cx+d)/(x^2+1)$ e nell'integrale del primo addendo si usa la sostituzione $x + 1 = y$, $y \in [1,2]$;
$f(x) = a/(x+1) + b/(x-1) + (cx+d)/(x^2+1)$;
con la sostituzione $x = y^2$, $y \in [2,3]$, si riduce l'integrando a $2y/(y^2+2y+2)$ e poi si usa la sostituzione $y + 1 = z$, $z \in [3,4]$.