Successioni di funzioni e serie di funzioni e di potenze

Gli esercizi proposti di seguito sono sostanzialmente suddivisi per tipo e le soluzioni di alcuni di essi sono date alla fine. Quelli contrassegnati con un asterisco sono di livello leggermente superiore.

1. Costruire una successione di funzioni reali continue in $\mathbb{R}$ convergente puntualmente alla funzione parte intera.

2*. Costruire una successione di funzioni reali di classe C^1 in $\mathbb{R}$ convergente puntualmente alla funzione parte intera.

3. Costruire una successione di funzioni reali continue in $\mathbb{R}$ convergente puntualmente alla funzione f definita dalle formule $f(x) = 1/x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

4. Per $x \in \mathbb{R}$ e n intero positivo si ponga di volta in volta:

$$f_n(x) = \exp(-nx^2), \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}, \quad f_n(x) = \cos^{2n}(\pi x).$$

Si determini il limite puntuale f della successione $\{f_n\}$ di funzioni in ciascuno dei casi.

5. Per ciascuno dei casi dell'Esercizio 4 determinare tutti gli intervalli chiusi in cui la successione $\{f_n\}$ converge a f uniformemente.

6. Per ciascuno dei casi dell'Esercizio 4 dire se la successione $\{f_n\}$ converge a f uniformemente nell'insieme in cui f è continua.

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che il limite $\lambda = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ esista finito. Dimostrare che la successione $\{f_n\}$ definita dalla formula $f_n(x) = f(x-n)$, $x \in \mathbb{R}$, converge puntualmente. Determinare il limite puntuale e discutere la convergenza uniforme.

8. Per $x \in \mathbb{R}^N$ e n intero positivo si ponga:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x| + \frac{1}{n}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si determini il limite puntuale della successione $\{f_n\}$. Si dimostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, il limite è uniforme nel complementare della palla $B_\varepsilon(0)$, mentre il limite non è uniforme in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

9. Siano $f_n, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tali che la successione $\{f_n\}$ converga a f puntualmente. Si supponga f_n continua in 0 per ogni n e f discontinua in 0. Si dimostri che la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Alla luce di ciò rivedere gli Esercizi 6 e 8.

10. Siano $A \neq \emptyset$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$ tali che la successione $\{f_n\}$ converga uniformemente. Si dimostri che, se $g : A \to \mathbb{R}$ è limitata, allora converge uniformemente anche la successione $\{f_n g\}$. Si mostri con un esempio che la conclusione non vale se si abbandona l'ipotesi di limitatezza su g.

11. Siano $A \neq \emptyset$ e $f_n : A \to \mathbb{R}$ tali che $\sum_{n=1}^\infty \sup_{x\in A} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < +\infty$. Si dimostri che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente.

12*. Siano $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $n > 0$ intero. Per $k = 0, \ldots, n$ si ponga $x_k^n = k/n$. Per $k = 1, \ldots, n$ si denoti con S_k^n il segmento di estremi $(x_{k-1}^n, f(x_{k-1}^n))$ e $(x_k^n, f(x_k^n))$. Sia f_n la funzione il cui grafico è l'unione dei segmenti $S_1^n, \ldots, S_n^n$. Si dimostri che, se f è continua, allora $\{f_n\}$ converge uniformemente a f.

13*. Si caratterizzino le funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verificanti rispettivamente le condizioni seguenti: a) per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di $\mathbb{R}^N$ infinitesima la successione $\{f(x+x_n)\}$ converge puntualmente a $f(x)$; b) per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di $\mathbb{R}^N$ infinitesima la successione $\{f(x+x_n)\}$ converge uniformemente a $f(x)$.

14. Siano $f_n, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tali che la successione $\{f_n\}$ converga a f uniformemente. Dimostrare che, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana, allora $\{g \circ f_n\}$ converge uniformente a $g \circ f$.

15*. In relazione all'Esercizio 14, mostrare con un esempio che l'ipotesi di continuità su g non basta per la convergenza uniforme della successione $\{g \circ f_n\}$. Invece basta l'ipotesi di continuità uniforme.

16. Sia $\{c_n\}$ una successione reale. Si dimostri che, se $k \geq 0$ è intero e se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k c_n$ è assolutamente convergente, allora ciascuna delle due formule

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx$$

definisce una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^k.

17. Sia $\{c_n\}$ una successione reale tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n$ converga assolutamente. Si dimostri che ciascuna delle quattro formule

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \phi(nx)\, \psi(nt)$$

ottenute attribuendo a ϕ e a ψ i significati di sin e cos (quattro combinazioni possibili, appunto) definisce una funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 che risolve l'equazione, detta *equazione delle onde*, $\partial^2 u/\partial t^2 - \partial^2 u/\partial x^2 = 0$ in $\mathbb{R}^2$. Si dimostri poi che, se $k \geq 2$ è un intero e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k c_n$ converge assolutamente, allora u è di classe C^k.

18. Sia $\{c_n\}$ una successione reale tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n$ converga assolutamente. Si dimostri che ciascuna delle due formule

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin nx \quad \text{e} \quad u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

definisce una funzione $u : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua con le derivate parziali $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$ e $\partial^2 u/\partial x^2$, che risolve l'equazione, detta *equazione del calore*, $\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

19*. Le ipotesi fatte nell'Esercizio 18 sono sovrabbondanti. Notato infatti che t varia nell'intervallo *aperto* $(0, +\infty)$, si dimostri che è sufficiente supporre $\{c_n\}$ limitata perché ciascuna delle due formule definisca una funzione u addirittura di classe C^∞ verificante l'equazione del calore.

20. Per ciascuna delle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 3^n z^n}{(2n+5)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}(3n+2)!z^n}{n^4+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n^2+1}}{n^2-3}\,\frac{z^n}{2^n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n) z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{-2}}{\sqrt{n+1}} z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 z^n}{(3n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} z^n$$

si determini il raggio di convergenza.

21. Dimostrare che, se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge semplicemente nel punto z_1, allora $|z_1-z_0|$ è il suo raggio di convergenza.

22. Dimostrare che, se nel punto z_1 la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ oscilla e se le sue ridotte sono limitate, allora $|z_1-z_0|$ è il suo raggio di convergenza.

23. Trovare due serie di potenze alle quali si applichi utilmente quanto affermato negli esercizi 21 e 22.

24. Considerata la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, si supponga che il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

esista (nell'intervallo $[0,+\infty]$). Si dimostri che il raggio di convergenza vale $1/L$.

25*. Si considerino le serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$. Si dimostri che, se P è un polinomio e $b_n = a_n P(n)$ per ogni n, allora le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza.

26. Per $|x|<1$ ritrovare il noto sviluppo in serie di $\arctan x$, sviluppando in serie la derivata e integrando termine a termine la serie ottenuta. Costruire in modo analogo lo sviluppo di $\arcsin x$.

27. Per ciascuna delle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n}}{n}$$

determinare il raggio di convergenza r ed esprimere la somma f per mezzo di funzioni elementari nei punti interni all'intervallo di convergenza.

28*. Esprimere la somma di ciascuna delle serie seguenti per mezzo di funzioni elementari o di loro integrali nei punti interni all'intervallo di convergenza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!(n+2)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{(n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n+1)!(2n)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2) x^{2n}}{(2n)!(2n+2)}.$$

Possono essere d'aiuto moltiplicare per potenze di x e derivazione per serie.

29*. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2} \sinh \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ |x|^{-1/2} \sin \sqrt{|x|} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

è di classe C^∞. Conviene cercarne uno sviluppo in serie di potenze di x.

30. Ritrovare i multipli della funzione esponenziale come soluzioni globali dell'equazione differenziale $u'(t) = u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, cercandone soluzioni esprimibili come serie di potenze di t (con raggio di convergenza positivo).

Risposte ad alcuni esercizi

4. $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, $f(0) = 1$; $f(x) = 1$ se $x > 0$, $f(x) = -1$ se $x < 0$, $f(0) = 0$; $f(x) = 1$ se x è intero, $f(x) = 0$ altrimenti.

5. Quelli non contenenti 0 nei primi due casi e quelli non contenenti interi nel terzo.

6. No in ciascuno dei casi.

7. Il limite puntuale è la funzione costante $x \mapsto \lambda$ e il limite è uniforme se e solo se f è costante.

9. Se la convergenza fosse uniforme in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, tenendo conto della convergenza in 0 si dedurrebbe la convergenza uniforme in $\mathbb{R}^N$ e seguirebbe la continuità di f in 0.

13. Le funzioni continue; le funzioni uniformemente continue.

19. Suggerimento: considerare, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $C_\varepsilon = \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$ e dimostrare che alla serie delle derivate di ogni ordine si può applicare il Criterio di Weierstrass in C_ε.

20. ∞, 0, 2; $1/e$, $1/3$, 1; 4, 27, 1.

27. $r = 1$, $f(x) = -(1/x)\ln(1-x)$; $r = 1$, $f(x) = -\ln(1-x^2)$; $r = +\infty$, $f(x) = (e^x - 1)/x$; $r = +\infty$, $f(x) = x \sinh x$; $r = +\infty$, $f(x) = (1/x)\sin x^2$; $r = 1$, $f(x) = \ln(1+x^4)$.