La costante di Eulero-Mascheroni

La ridotta n-esima della serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1}$$

è dell'ordine di grandezza di $\ln n$. Dimostriamo più precisamente che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \qquad \text{per } n \to \infty \tag{2}$$

per un certo numero reale γ, detto *costante di Eulero-Mascheroni*. A tale scopo riscriviamo $\ln n$ nella forma

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\Bigl(1 + \frac{1}{k}\Bigr)$$

per cui siamo indotti a considerare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr) \right). \tag{3}$$

Supponiamo per un momento di avere dimostrato che la (3) converge e denotiamo con γ la sua somma e con γ_n la sua ridotta n-esima. Allora

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \ln\Bigl(1 + \frac{1}{k}\Bigr) = \gamma_n + \ln\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr) = \gamma_n + o(1) = \gamma + o(1) \tag{4}$$

e dunque vale la (2).

Per studiare la serie (3) consideriamo la funzione $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \in (0,1]$, e scriviamone la formula di Taylor del prim'ordine di centro 0 con il resto di Lagrange. Abbiamo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2} \qquad \text{cioè} \qquad x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2(1+\xi)^2}$$

per un opportuno punto $\xi \in (0,x)$. Concludiamo che

$$0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2} \qquad \text{per ogni } x \in (0,1]$$

e deduciamo che

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr) < \frac{1}{2n^2} \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dunque la serie (3) converge per il Criterio del confronto per serie a termini positivi.

Osservazione. La dimostrazione appena fatta fornisce, se raffinata, una conclusione più precisa. Da un lato abbiamo infatti

$$0 < \gamma < \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,. \tag{5}$$

D'altra parte, vale la catena

$$\begin{aligned} 0 \le \gamma - \gamma_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\Bigl(1 + \frac{1}{k}\Bigr) \right) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2k^2} \\ &\le \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{2x^2} = \lim_{m\to\infty} \int_{n}^{m} \frac{dx}{2x^2} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \right) = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

da cui $\gamma_n = \gamma + O(1/n)$. Siccome si ha anche $\ln(1 + (1/n)) = O(1/n)$, vediamo che la (4) in realtà fornisce

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O(1/n) \qquad \text{per } n \to \infty \,.$$

Osservazione. Lo sviluppo decimale di γ è dato da $\gamma = 0.57721\ldots$, ma la stima (5) è a questo proposito troppo grossolana. Infatti è noto (ad esempio grazie alla teoria delle serie di Fourier) che la somma della serie che compare in (5) vale $\pi^2/6$, per cui la (5) stessa fornisce solo $\gamma < \pi^2/12$. Segnaliamo inoltre un fatto decisamente sorprendente: la costante γ può anche essere espressa nella forma integrale

$$\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^{\infty} \ln t \cdot e^{-t} \, dt = -\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ r\to+\infty}} \int_{\varepsilon}^{r} \ln t \cdot e^{-t} \, dt$$

ove $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è la cosiddetta *funzione Gamma di Eulero* data dalla formula

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ r\to+\infty}} \int_{\varepsilon}^{r} t^{x-1} e^{-t} \, dt \qquad \text{per } x > 0 \,.$$

Osservazione. Cogliamo l'occasione per dare qualche informazione su questa importante funzione. Integrando per parti, si vede subito che vale la formula ricorrente

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \qquad \text{per ogni } x > 0 \tag{6}$$

da cui, essendo $0! = 1 = \Gamma(0)$, segue immediatamente che

$$n! = \Gamma(n + 1) \quad \text{per ogni intero } n \ge 0 \,. \tag{7}$$

Notiamo che la (6) può essere usata per estendere la definizione di $\Gamma(x)$ al caso $x < 0$ non intero. Ad esempio, se $x \in (-1, 0)$, si ha $x{+}1 > 0$ per cui ha senso porre $\Gamma(x) = x/\Gamma(x{+}1)$. Il cambiamento di variabile $t = s^2$ nella definizione di $\Gamma(1/2)$ fornisce poi

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} e^{-s^2} \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \, ds \tag{8}$$

e l'ultimo membro è il cosiddetto *integrale di Poisson*, che vale $\sqrt{\pi}$.

La funzione Gamma interviene spesso nell'analisi matematica classica avanzata e qui ci limitiamo a due applicazioni. Vale la formula

$$\operatorname{mis}_n B_r^n = \frac{2}{n} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^n \tag{9}$$

ove B_r^n è la palla di $\mathbb{R}^n$ di raggio r (e di centro 0) e mis_n denota l'ordinaria misura n-dimensionale. La (9) è ovvia per $1 \le n \le 3$ e per controllare la sua validità per ogni n si può dimostrare che, da un lato, vale la formula ricorrente $\operatorname{mis}_{n+2} B_r^{n+2} / \operatorname{mis}_n B_r^n = 2\pi r^2/(n+2)$ (applicando opportunamente il Teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli) e che, dall'altro, la stessa formula ricorrente è soddisfatta dal secondo membro della (9) (tenendo conto delle (6)–(8)). Vale la formula

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{per ogni } \alpha,\beta > 0$$

il primo membro della quale si denota con il simbolo $B(\alpha,\beta)$. Segnaliamo che la funzione $B : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ che in tal modo risulta definita si chiama *funzione Beta di Eulero*. Concludiamo con la cosiddetta *formula di Stirling*

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}\bigl(1 + o(1)\bigr) \quad \text{per } x \to +\infty$$

dalla quale si deduce immediatamente il comportamento asintotico di $n!$.