Le serie armoniche generalizzate

Studiamo il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda} \tag{1}$$

ove λ è reale positivo. Come prerequisiti utilizziamo soltanto il comportamento delle serie geometriche e il risultato generale seguente: *una serie a termini positivi converge se la successione delle sue ridotte è limitata superiormente, mentre essa diverge altrimenti.*

Denotiamo con $\{s_n\}$ la successione delle ridotte della serie (1) e stimiamo dall'alto e dal basso la ridotta di ordine 2^n, ove n è un intero positivo. Abbiamo in generale

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k^\lambda} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k^\lambda} \,.$$

Osservato che per ogni j risulta $2^{j+1} - 2^j = 2 \cdot 2^j - 2^j = 2^j$ (per cui la somma rispetto a j ha 2^j termini) e che l'ipotesi $\lambda > 0$ implica

$$\frac{1}{(2^{j+1})^\lambda} \le \frac{1}{k^\lambda} \le \frac{1}{(2^j)^\lambda} \qquad \text{per } 2^j < k \le 2^{j+1} \,,$$

posto $x = 2^{1-\lambda}$, otteniamo

$$s_{2^n} \le \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \, \frac{1}{(2^j)^\lambda} = \sum_{j=0}^{n-1} x^j \qquad \text{e} \qquad s_{2^n} \ge \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \, \frac{1}{(2^{j+1})^\lambda} = 2^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} x^j \tag{2}$$

e siamo indotti a vedere il comportamento della serie geometrica

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j \,. \tag{3}$$

Siccome $x = 2^{1-\lambda}$ è positivo, i casi da distinguere sono $x \ge 1$ e $x < 1$, che corrispondono alle disuguaglianze $\lambda \le 1$ e $\lambda > 1$ rispettivamente.

Sia $\lambda \le 1$. Allora $x \ge 1$ e la serie (3) diverge. Dunque la successione delle sue ridotte non è superiormente limitata. Per la seconda delle (2) segue che nemmeno la successione $\{s_{2_n}\}$ è superiormente limitata. La stessa cosa vale allora per la successione $\{s_n\}$, per cui *la serie* (1) *diverge in questo caso.*

Sia ora $\lambda > 1$. Allora $x < 1$ e la serie (3) converge. Dunque la successione delle sue ridotte è superiormente limitata da una certa costante M (ad esempio la somma dell'intera serie geometrica). Per la prima delle (2) segue che anche la successione $\{s_{2_n}\}$ è superiormente limitata dalla stessa costante M e ora controlliamo che questa stessa costante maggiora ogni termine della successione $\{s_n\}$. Per $n \ge 1$ fissato, troviamo m tale che $2^m \ge n$. Allora $s_n \le s_{2^m} \le M$. Dunque abbiamo concluso che la successione $\{s_n\}$ è superiormente limitata, per cui *la serie* (1) *converge in questo caso.*

Esercizio. Procedendo analogamente, dimostrare il seguente criterio di convergenza: *se* $\{a_n\}$ *è una successione nonnegativa e noncrescente, allora le due serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

sono entrambe convergenti oppure entrambe divergenti. Applicare tale criterio alla serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\lambda}}$$

e verificare che essa converge se $\lambda > 1$ e diverge se $\lambda \leq 1$. Dire che avviene per la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\lambda}}\,.$$