§13 Appendice 5: Una funzione derivabile ma monotona in nes– sun intervallo

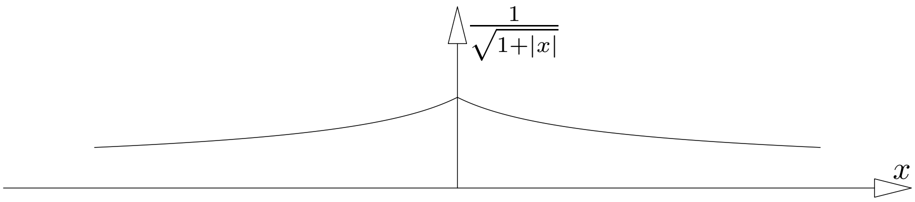
La dimostrazione è ottenuta attraverso alcuni passaggi intermedi costituiti da lemmi e proposizioni.

Lemma 13.1 *Siano r e s due numeri reali. Se $r > s > 0$ allora è vera $\frac{r-s}{r^2-s^2} < \frac{2}{r}$. Se $r > 1$ e $s > 1$ allora $\frac{r+s-2}{r^2+s^2-2} < \frac{2}{s}$*

Dimostrazione Ovvia. ∎

Lemma 13.2 *Sia $\varphi(x) = (1+|x|)^{-1/2}$ per $x \in \mathbf{R}$. Allora $\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx < 4\min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$*

Dimostrazione Supponiamo che sia $a < b$. Se $a \geq 0$ abbiamo
$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{2\sqrt{1+b}-2\sqrt{1+a}}{(1+b)-(1+a)} < \frac{4}{\sqrt{1+b}} = 4\min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$. Il caso $b < a \leq 0$ segue dalla parità della funzione. Sia ora $a < 0 < b$; abbiamo
$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{2(\sqrt{1+b}+\sqrt{1-a}-2)}{(1+b)+(1-a)-2} < \frac{4}{\sqrt{1-a}}$ ma anche
$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{2(\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}-2)}{(1-a)+(1+b)-2} < \frac{4}{\sqrt{1+b}}$ e quindi alla fine si ha
$\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx < 4\min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$. ∎



Lemma 13.3 *Se φ è come nel Lemma 13.2 e ψ è una funzione della forma $\psi(x) = \sum_{j=1}^n c_j\varphi(\lambda_j(x-\alpha_j))$ dove $c_1, \ldots, c_n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono numeri reali positivi e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono numeri reali allora si ha $\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(x)dx < 4\min\{\psi(a), \psi(b)\}$.*

Dimostrazione Abbiamo $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(\lambda(x-\alpha))dx = \frac{1}{\lambda(b-a)-\lambda(a-\alpha)}\int_{\lambda(a-\alpha)}^{\lambda(b-\alpha)} \varphi(t)dt <$
$< 4\min\{\varphi(\lambda(a-\alpha)), \varphi(\lambda(b-\alpha))$ da cui il risultato applicando il **Lemma 13.2**. ∎

Lemma 13.4 *Sia $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di funzioni come nel lemma 13.3.
Sia $\Psi_n(x) \stackrel{\rm def}{=} \int_0^x dt\psi_n(t)$ e supponiamo che $\sum_{n=1}^\infty \psi_n(a) = s < \infty$ per un qualche $a \in \mathbf{R}$. Allora la serie $F(x) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{n=1}^\infty \Psi_n(x)$ converge uniformemente su ogni insieme limitato. La funzione F è differenziabile in a e $F'(a) = s$ e se $\sum_{n=1}^\infty \psi_n(x) \stackrel{\rm def}{=} f(x) < \infty$ per ogni x allora F è derivabile ovunque in $\mathbf{R}$ e $F' = f$*

Dimostrazione $0 \leq F(x) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{n=1}^\infty(\int_0^a + \int_a^x)dt\psi_n(t) \leq \sum_{n=1}^\infty(4|a|\min\{\psi_n(0), \psi_n(a)\} + 4|x-a|\min\{\psi_n(a), \psi_n(x)\} \leq 4s(|a|+|x-a|) \leq 12bs$ e per il criterio di Weierstarass la serie converge uniformemente in ogni insieme limitato. Per la derivabilità in a scriviamo $\displaystyle\frac{F(a+h)-F(a)}{h} - s =$
$$\frac{1}{h}\sum_{n=1}^\infty \int_a^{a+h} dt\psi_n(t) - \sum_{n=1}^\infty \psi_n(a) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^N \int_a^{a+h} dt(\psi_n(t)-\psi_n(a)) + \frac{1}{h}\sum_{n=N+1}^\infty \int_a^{a+h} dt\psi_n(t) -$$

$\sum_{n=N+1}^{\infty}\psi_n(a) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h}dt\sum_{n=1}^{N}(\psi_n(t)-\psi_n(a)) + \frac{1}{h}\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_a^{a+h}dt\psi_n(t) - \sum_{n=N+1}^{\infty}\psi_n(a)$. Ora $|\frac{1}{h}\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_a^{a+h}dt\psi_n(t)| \leq 4\sum_{n=N+1}^{\infty}\min\{\psi_n(a),\psi_n(a+h)\} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\psi_n(a) < \frac{1}{3}\varepsilon$ se $N > N_\varepsilon$. Analogamente si ha $0 < \sum_{n=N+1}^{\infty}\psi_n(a) < \frac{1}{3}\varepsilon$ per $N > N_\varepsilon$. Da ultimo, essendo $\sum_{n=1}^{N}\psi_n(t)$ una funzione continua abbiamo che se $|h| < \delta_\varepsilon$ allora $|\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{N}\int_a^{a+h}dt(\psi_n(t)-\psi_n(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ e quindi la derivabilità . Se $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x) = f(x) < \infty$ la conclusione è ovvia. ∎

Lemma 13.5 *Siano $I_1,\ldots,I_n$ intervalli disgiunti aperti e sia a_j il punto medio di I_j. Sia $\varepsilon > 0$ e $y_1,\ldots,y_n$ n numeri reali positivi. Allora esiste una funzione ψ come nel Lemma 13.3 tale che per ogni j sono verificate le relazioni 1) $\psi(a_j) > y_j$, 2) $\psi(x) < y_j+\varepsilon$ se $x \in I_j$, 3) $\psi(x) < \varepsilon$ se $x \notin I_1\cup\ldots\cup I_n$.*

Dimostrazione Sia $I_j = [c_j, d_j]$, $a_j = \frac{1}{2}(c_j + d_j)$ e sia $\delta_j = d_j - a_j$. Definiamo la funzione $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n}(y_j+\frac{\varepsilon}{2})\phi(\lambda_j(x-a_j))$ dove $\lambda_j = \frac{2n}{\varepsilon\delta_j}(y_j+\frac{\varepsilon}{2})^2$. La funzione soddisfa tutte le richieste. In particolare per la seconda e terza basta osservare che la funzione $\phi(x)$ è decrescente. ∎

Teorema 13.1 *Siano $\{a_j\}$ e $\{b_j\}$ $j = 1,2,\ldots$ intero due insiemi di numeri disgiunti e densi in* **R**. *Allora esiste una funzione derivabile ovunque che soddisfa $F'(a_j) = 1$, $F'(b_j) < 1$ per ogni j e $0 < F'(x) \leq 1$ per ogni x.*

Corollario 13.1 *Esiste una funzione $H(x)$ derivabile ovunque, non monotona in nessun intervallo e tale che H' è limitata .*

Dimostrazione In base al Lemma precedente possiamo avere due funzioni. La $F(x)$ di prima e la $G(x)$ tale che $G'(a_j) < 1$, $G'(b_j) = 1$ e $0 < G'(x) \leq 1$. La funzione $H(x) = F(x) - G(x)$ verifica le relazioni $H'(a_j) > 0$, $H'(b_j) < 0$. Ne segue che la funzione $H(x)$ non è monotona in nessun intervallo essendo $\{a_j\}$ e $\{\beta_j\}$ densi. ∎

Alcune osservazioni circa la funzione $H(x)$.
1) H ha un massimo ed un minimo locale in ciascun intervallo di **R**. Infatti se $a < b$ scegliamo $a' < b'$ in $[a, b]$ tale che $H'(a') > 0$ e $H'(b') < 0$ e quindi H assume un massimo in $[a', b']$ per un valore $a' < c < b'$ e quindi nell'intervallo $[a, b]$ vi è un massimo locale.

2) Poiché H' è limitata, H è assolutamente continua. Ne segue che H' è integrabile secondo Lebesgue e $H(x) = H(0) + \int_0^x H'(t)dt$ per ogni $x \in$ **R**

3) H' non è integrabile secondo Riemann. Infatti se lo è allora dall'esercizio **34.8***** segue che H' deve essere continua in un insieme avente misura piena (cioè continua tranne un insieme di misura nulla). Ma per come è fatta H', nei punti in cui è continua deve valere zero e quindi $\int_a^b H'(t)dt$ vede l'integrando nullo quasi–ovunque. Ciò implicherebbe che $H(x) = H(0)+\int_0^x H'(t)dt = H(0)$ il che è impossibile.

4) $H'(x)$ è in classe di Baire 1 (vedi l'**Appendice 2**) e quindi è continua in un insieme di seconda categoria di **R** che è chiaramente denso.

5) Sia $H^+ = \{x: H'(x) > 0\}$ e $H^- = \{x: H'(x) < 0\}$. Allora qualunque sia l'intervallo I si ha che $H^+\cap I$ e $H^-\cap I$ hanno misura non nulla. Se infatti H^+ avesse misura nulla allora dalla formula $H(x) = H(a) + \int_a^x H'(t)dt$ dove $I = [a, b]$ verrebbe fuori che $H(x) \leq H(a)$. Ma H è derivabile e quindi ciò significherebbe che $H'(x) \leq 0$ in I ossia una contraddizione. Lo stesso accadrebbe se H^+ avesse misura nulla.

Es: Esiste una funzione f derivabile, tale che f' non è integrabile secondo Riemann in nessun intervallo e ciononostante f è monotona in almeno un intervallo?

Referenze

[H] Hobson E.W.: *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series,* second edition, volume 2, Cambrige University Press, 1921

[KS] Katznelson Y., Stromberg K. *Everywhere Differentiable, Nowhere Monotone, Functions* American Mathematical Monthly, Volume 81, Issue 4 (Apr.,1974), 379–354