§16 Appendice 8: Teoria della misura di Peano–Jordan e di Lebesgue

1.16 Dire se è misurabile secondo Peano–Jordan l'insieme $\cup_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k})$.

2.16 Dare un esempio di insieme aperto in $\mathbf{R}$ e non–misurabile secondo Peano–Jordan

3.16 Dire se è misurabile secondo Peano–Jordan l'insieme di Cantor avente misura di Lebesgue nulla.

4.16 Dimostrare che un insieme avente misura di Peano-Jordan positiva deve contenere al suo interno un intervallo ovvero trovare un controesempio.

5.16 Dimostrare la seguente proposizione oppure trovare un controesempio: *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *un insieme avente misura di Lebesgue nulla può essere ricoperto da un insieme numerabile di intervalli* I_k *tale che* $|I_k| \leq \varepsilon/2^k$ [da *Peter Ungar American Mathematical Monthly* Vol.77, No. 4 (Apr., 1970),411–412]

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.16 È certamente misurabile in quanto la sua frontiera è data dai punti della forma $\{2^{-k}\}$ (che sono punti isolati) e dallo zero che invece è punto di accumulazione dell'insieme. Sia quindi dato un intervallo di larghezza 2ε intorno a zero e sia $k_\varepsilon = [\ln \varepsilon^{-1}] + 1$. Se $k \geq k_\varepsilon$ allora il punto 2^{-k} cade all'interno dell'intervallo. Se invece $k < k_\varepsilon$ allora racchiudiamo il punto con un intervallo di lunghezza $\varepsilon/k_\varepsilon$ in modo tale che l'unione dei punti che "stanno fuori" sia ricopribile con una quantità finita di intervalli la somma delle cui lunghezze è non maggiore di ε. A questo punto la somma delle lunghezze di tutti gli intervalli costruiti è non superiore a 2ε come volevamo dimostrare.

2.16 Si può prendere un insieme aperto la cui frontiera ha misura di Lebesgue non nulla. Un esempio è fornito dal complementare in $[0, 1]$ di un qualsiasi insieme di Cantor *di misura positiva*

5.16 L'affermazione è falsa ed un controesempio è dato dall'insieme di Cantor di misura nulla che chiamiamo F. Bisogna ricordare le caratteristiche principali della "Scala di Cantor" (che chiamiamo $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$): 1) è continua, 2) è monotona non decrescente, 3) f è costante sul complementare di F (detto F^c), 4) f è holderiana con esponente $\alpha \doteq \ln 2/\ln 3$. Ne segue che $\mu(f(F)) = 1$ mentre $\mu(f(F^c)) = 0$.

Supponiamo ora che $F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ e $|I_k| \leq \varepsilon/2^k$. $f(F) \subset f(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_k)$ e quindi $\mu(f(F)) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(f(I_k))$. Essendo holderiana, $|f(I_k)| \leq |I_k|^\alpha$ e quindi $\mu(f(F)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon/2^k)^\alpha$ e si ha una evidente contraddizione non appena si prende ε abbastanza piccolo essendo $\mu(f(F)) = 1$.