§12 Appendice 4: Alcuni controesempi nella teoria delle serie trigonometriche e di Fourier (dalle funzioni continue la cui serie di Fourier diverge in un punto (Fejér, Lebesgue) alle funzioni sommabili la cui serie di Fourier diverge quasi ovunque (Kolmogorov, Hardy) alle funzioni sommabili la cui serie di Fourier diverge ovunque (Kolmogorov) passando per le serie trigonometriche divergenti ovunque pur avendo i coefficienti tendenti a zero (Steinhaus))

In questa appendice verranno dati alcuni risultati molto belli (per lo meno secondo il giudizio di chi scrive) riguardanti la costruzione di controesempi nella teoria delle serie trigonometriche e di Fourier. Tali risultati si collocano tra la fine del 1800 ed il 1930 e portano i nomi dei padri fondatori dell'analisi: Charles Jean Gustave Nicolas de La Vallée–Poussin (1866–1962), Henri Lebesgue (1875–1941), G.H.Hardy (1877–1947), Lipót Fejér (1880–1959), Nikolai Nikolaevich Luzin (1883–1950), Hugo Dyonizy Steinhaus (1887–1972), Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987). Poiché la teoria della integrazione coinvolta nelle varie formule è quella di Lebesgue, è necessario conoscere alquanto bene tale teoria con tutti i teoremi che ne conseguono. Inoltre è necessario avere familiarità con i fondamenti della teoria delle serie di Fourier. Come testo di riferimento si può consultare A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin "Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale" edizioni Mir 1980 pag.247–447 (successivamente indicato con [Kol])[(1.12)]
Il materiale di questo capitolo è tratto da N.K.Bary: *A treatise on trigonometric series,* vol. I–II, Pergamon Press 1964. L'altro testo fondamentale sulle serie trigonometriche è A.Zygmund: *Trigonometric Series,* vol. I–II, Cambridge University Press, 1979

12.0 Notazioni

Se $f\in L_1([0,2\pi])$ possiamo definire le quantità (i coefficienti di Fourier) $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dx f(x)\cos kx\stackrel{\rm def}{=}a_k$ e $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dx f(x)\sin kx\stackrel{\rm def}{=}b_k$ e per ciascun valore intero n, possiamo definire la grandezza $S_n(x;f)\stackrel{\rm def}{=}\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ (le somme parziali di Fourier). Il limite per $n\to+\infty$ si indica con $\sigma(x,f)$. Una serie trigonometrica $\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^\infty a_k\cos kx+b_k\sin kx$ si dice *convergente nel punto* x se esiste $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$; *assolutamente convergente nel punto* x se esiste $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n(|a_k\cos kx|+|b_k\sin kx|)$. Naturalmente dire che le serie convergono in x equivale a dire che che se scriviamo ad esempio $R_n(x,f)\stackrel{\rm def}{=}\sigma(f)-S_n(x,f)$, si ha $R_n(x,f)\to 0$ per $n\to+\infty$ (per la convergenza assoluta si devono prendere i moduli). Dato un insieme $E\subset[0,2\pi]$ si dice che la serie *converge uniformemente in* E se $R_n(x,f)\to 0$ per $n\to+\infty$ uniformemente in E. Scrivendo l'espressione dei coefficienti di Fourier in $\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dt f(t)+\sum_{k=1}^n(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dt f(t)\cos kt\cos kx+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dt f(t)\sin kt\sin kx)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dt f(t)\big\{\frac12+\sum_{k=1}^n\cos k(t-x)\big\}$. Si può verificare (per esempio per induzione) che $\frac12+\sum_{k=1}^n\cos k(t-x)=\frac{\sin(t-x)(n+\frac12)}{2\sin\frac{t-x}{2}}$ ed otteniamo quindi $S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dt f(t)\frac{\sin(t-x)(n+\frac12)}{2\sin\frac{t-x}{2}}$. La quantità $D_n(t-x)\stackrel{\rm def}{=}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(t-x)(n+\frac12)}{2\sin\frac{t-x}{2}}$ è detta *Nucleo di Dirichlet di ordine* n e la somma parziale di Fourier di ordine n, $(S_n(x;f))$ appunto, è il prodotto di convoluzione con il nucleo di Dirichlet di ordine n. Una parte importante di quanto segue (ed in generale delle serie di Fourier) passa attraverso la media aritmetica delle prime $n+1$ somme parziali di Fourier ossia $\sigma_n(x;f)\stackrel{\rm def}{=}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n S_k(x,f)=\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{2\pi}dt f(t)\Big(\frac{\sin(n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\Big)^2$ e $K_n(x)\stackrel{\rm def}{=}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k(x)$, è il *nucleo di Fejér di ordine* n

12.1 Un esempio di funzione continua la cui serie di Fourier converge ovunque ma non uniformemente

(1.12) ad ogni modo innumerevoli sono i testi che trattano gli argomenti citati

Sia $Q(x,n)\stackrel{\rm def}{=}\Big[\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{1}\Big]-\Big[\frac{\cos(2n+1)x}{1}+\frac{\cos(2n+2)x}{2}+\ldots+\frac{\cos 3nx}{n}\Big]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(n+k)x}{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2n+k)x}{k}=2\sin(2nx)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$

Sia inoltre $\overline{Q}(x,n)\stackrel{\rm def}{=}\Big[\frac{\sin nx}{n}+\frac{\sin(n+1)x}{n-1}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{1}\Big]-\Big[\frac{\sin(2n+1)x}{1}+\frac{\sin(2n+2)x}{2}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{n}\Big]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(n+k)x}{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2n+k)x}{k}=-2\cos(2nx)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$

I polinomi $Q(x,n)$ e $\overline{Q}(x,n)$ (la cui costruzione è dovuta a Fejér) godono di alcune proprietà che verranno usate ed il cui elenco è il seguente:
i) $|Q(x,n)|\le C$, $|\overline{Q}(x,n)|\le C$, per una opportuna costante C

ii) Se $\varphi(x,Q)$ indica $\sum_{k=0}^{p}\frac{\cos(n+k)x}{n-k}$, $p\le n-1$ oppure $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(n+k)x}{n-k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{\cos(2n+k)x}{k}$, $p\le n$ (la stessa cosa per i seni) si ha $|\varphi(x,Q)|\le 2(1+\ln n)$ e $|\varphi(x,\overline{Q})|\le 2(1+\ln n)$

iii) Se $\delta\le|x|\le\pi$ allora $|\varphi(x,Q)|\le M_\delta$, $|\varphi(x,\overline{Q})|\le M_\delta$ e M_δ dipende solamente da δ

iv) Se $P(x,n)\stackrel{\rm def}{=}\frac{\cos nx}{n}+\frac{\cos(n+1)x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{1}$ e $\overline{P}(x,n)\stackrel{\rm def}{=}\frac{\sin nx}{n}+\frac{\sin(n+1)x}{n-1}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{1}$ si ha $P(0,n)>\ln n$, $\overline{P}(\frac{\pi}{4n},n)>\frac{\ln n}{\sqrt{2}}$

Tali proprietà verranno dimostrate dopo.
Sia $n_k=a^{k^2}$, $a>3^{1/5}$, $\overline{Q}_k\stackrel{\rm def}{=}\overline{Q}(x;n_k)$ e $g(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}\overline{Q}_k(x)$. La funzione $g(x)$ è continua essendo $|\overline{Q}_k|\le C$ (usando la i)) e quindi per il criterio di Weierstrass. Per induzione si mostra che $a^{(k+1)^2}>3a^{k^2}$ per $k\ge2$ e con la condizione su a. Questo vuol dire che nella serie che definisce $g(x)$ non vi sono mai due contributi recanti $\sin qx$ con lo stesso q in entrambi i casi. Essendo $g(x)$ continua si può costruire la successione $\{S_n(x,g)\}_{n=1}^{\infty}$ dove $S_n(x,g)=\sum_{j=1}^{n}b_j\sin jx$ e dove i b_j sono i coefficienti di Fourier della funzione g (i coefficienti a_j relativi ai coseni sono nulli in quanto la g contiene solo seni). Naturalmente i valori b_j sono nulli quando $1\le j\le n_2$, $3n_2+1\le j\le n_3-1$ e via dicendo. Sono non nulli quando $n_2\le j\le 3n_2$, $n_3\le j\le 3n_3$ e via dicendo. La sottosuccessione $\{S_{3n_k}(x,g)\}_{k=2}^{\infty}$ coincide con $\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j^2}\overline{Q}_j(x)$ e quindi tale sottosuccessione converge uniformemente alla funzione $g(x)$. Ma allora la serie $\sum_{j=1}^{n}b_j\sin jx$ è la serie di Fourier della funzione $g(x)$ sulla base del **Lemma 12.1.1** e che indichiamo con $\sigma(g)$. Vogliamo dimostrare che converge a $g(x)$ ma non uniformemente in $[0,2\pi]$. Cominciamo dalla convergenza puntuale. Dobbiamo far vedere che $R_n(x,g)\stackrel{\rm def}{=}S_n(x,g)-g(x)$ tende a zero per $n\to+\infty$. Se n è abbastanza grande si ha $S_n(x,g)=\sum_{k=2}^{m_n}\frac{1}{k^2}\overline{Q}_k(x)+\frac{1}{(m_n+1)^2}\varphi(x,\overline{Q}_{m_n+1})$ (il secondo termine può essere nullo). $|\sum_{k=2}^{m_n}\frac{1}{k^2}\overline{Q}_k(x)|\le C\sum_{k=2}^{m_n}\frac{1}{k^2}\le A$ e $|\frac{1}{(m_n+1)^2}\varphi(x,\overline{Q}_{m_n+1})|\le\frac{1}{(m_n+1)^2}2(1+\ln a^{(m_n+1)^2})<2(1+\ln a)$ (si è usata la ii)) per ogni $n\ne0$ e per ogni x. Dalla definizione di $R_n(x,g)$ segue che $R_n(x,g)=\frac{1}{(m_n+1)^2}\varphi(x,\overline{Q}_{m_n+1})-\sum_{k=m_n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\overline{Q}_k(x)$ e sia $0<\delta\le|x|\le\pi$. Dalla iii) abbiamo che $|R_n(x,g)|\le\frac{M_\delta}{(1+m_n)^2}+\sum_{k=m_n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}|\overline{Q}_k(x)|$ e per m_n abbastanza grande si ha $|R_n(x,g)|$ piccolo a piacere per $0<\delta\le|x|\le\pi$. Dunque la successione $\{S_n(x,g)\}$ converge alla funzione $g(x)$ per $0<\delta\le|x|\le\pi$. Da ciò segue la convergenza puntuale per ogni valore $x\ne0$. Per $x=0$ si ha $S_n(0,g)=0$ per ogni n e quindi la serie di Fourier $\sigma(g)$ converge per ogni valore di $x\in[-\pi,\pi]$. Sia ora $\nu_m\stackrel{\rm def}{=}2n_m-1$ e $S_{\nu_m}(x,g)=S_{2n_m-1}(x,g)=S_{n_{m-1}}(x,g)+\sum_{n_m}^{2n_m-1}b_j\sin jx=\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k^2}\overline{Q}_k(x)+\frac{1}{m^2}\overline{P}(x,n_m)$; inoltre $R_{\nu_m}=S_{\nu_m}(x,g)-g(x)=\frac{1}{m^2}\overline{P}(x,n_m)-\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}|\overline{Q}_k(x)|$ e consideriamo $x_m=\frac{\pi}{4n_m}$ Si ha $R_{\nu_m}(\frac{\pi}{4n_m})>\frac{1}{m^2}\overline{P}(\frac{\pi}{4n_m},n_m)-C\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^2}>\frac{1}{m^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(a^{m^2})-\frac{C}{m}>\frac{\ln a}{\sqrt{2}}-C$ e se $\frac{\ln a}{\sqrt{2}}-C>1$ ossia $a>e^{\sqrt{2}(1+C)}$ allora $R_{\nu_m}(\frac{\pi}{4n_m})>1$ ossia la serie non è uniformemente convergente in alcun intorno dell'origine.

Un esempio dovuto a Fejér di una funzione continua la cui serie di Fourier diverge

in un punto

Si ripete pari pari il discorso precedente con la differenza che stavolta si prendono le funzioni $Q(x,n)$ che contengono i coseni. Dalle precendenti stime otteniamo che $|S_n(x,g)| \leq A + 2(1+\ln a)$ per $\delta \leq |x| \leq \pi$ ossia le somme parziali sono limitate nell'insieme interessato. Stavolta però $S_n(0,n)$ non è identicamente nullo e quindi non si può dire che la serie di Fourier $\sigma(g)$ converga in $x=0$. Infatti diverge come tra un attimo sarà chiaro. Sia $\nu_m = 2n_m - 1$ e $\mu_n = 3n_{m-1}$. $S_{\nu_m}(0,g) = \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k^2} Q_k(0) + \frac{1}{m^2} P(0,n_m)$, mentre $S_{\mu_m}(0,g) = \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k^2} Q_k(0)$ per cui $S_{\nu_m}(0,g) - S_{\mu_m}(0,g) = \frac{1}{m^2} P(0,n_m) > \frac{m^2}{m^2} \ln a = \ln a$ e quindi $S_n(0,g)$ non è una successione di Cauchy e non può quindi convergere.

Se ripetessimo lo stesso discorso scegliendo $n_k = a^{k^3}$ allora $\frac{1}{m^2} P(0,n_m) > m \ln a$ e la serie divergerebbe avendo anche somme parziali illimitate.

Chi conosce i fondamenti della teoria degli operatori lineari ed in particolare il Teorema di Banach–Steinhaus, sa che la dimostrazione della esistenza di funzioni continue aventi la serie di Fourier divergente in almeno un punto può ottenersi per via astratta senza ricorrere ad esempi specifici. Si veda a tal proposito pag.405–406 del libro di Kolmogorov–Fomin. Il problema di tali dimostrazioni è che non forniscono esempi concreti. È lo stesso problema della esistenza in astratto delle funzioni continue ma non derivabili che si ottiene attraverso il Teorema di Baire (vedi la **Appendice 2**) senza però dare un esempio concreto.

Dimostriamo ora il **lemma 12.1.1** e le proprietà i)–iv)

Lemma 12.1.1 *Sia data la serie trigonometrica* $\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ *e supponiamo che una sua sottosuccessione di somme parziali converga uniformemente ad una funzione* f. *Allora la serie è la serie di Fourier della funzione* f

Dimostrazione Per ipotesi esiste una sottosuccessione dei numeri naturali $\{n_k\}$ tale che $S_{n_k}(x) \to f(x)$ per $k \to +\infty$ uniformemente in $[0,2\pi]$ e quindi $f(x) = S_{n_k}(x) + o(1)$. Ne segue che $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos ix = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_{n_k}(x)\cos ix + o(1)$. Se $n_k < i$, l'integrale è zero mentre se $n_k \geq i$, vale a_i che è quanto dovevamo dimostrare.$\blacksquare$

Lemma 12.1.2 *Siano* $u_o, u_1, \ldots, u_n$, $v_o, v_1, \ldots, v_n$ $2n$ *numeri reali. Allora* $\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n - u_m V_{m-1}$ *dove* $V_k = \sum_{j=0}^{k} v_j$

Se ne trae il seguente

Corollario 12.1.1 *Se* $u_k \geq 0$, $u_k \searrow 0$ *e* $|V_k| \leq M$ $\forall$ $m \leq k \leq n$ *allora* $|\sum_{k=m}^{n} u_k v_k| \leq 2Mu_m$
Dimostrazione Ovvia.

Supponiamo ora che $u_i(x)$ e $v_i(x)$ sono funzioni definite sull'intervallo $[a,b]$. Dal **corollario 12.1.1** si arriva al seguente

Lemma 12.1.3 *Se* $u_k(x) \searrow 0$, $|V_n(x)| \leq M$ *per* $x \in [a,b]$ *allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ *converge uniformemente ed assolutamente in* $[a,b]$ *e per la somma* $S(x)$ *si ha* $|S(x)| \leq Mu_o$
Dimostrazione $\sum_{k=0}^{n} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k(x) - u_{k+1}(x)) V_k(x) + u_n(x) V_n(x)$ $(V_{-1} \equiv 0)$. $|\sum_{k=0}^{n-1} (u_k(x) - u_{k+1}(x)) V_k(x)| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (u_k(x) - u_{k+1}(x))$ per $a \leq x \leq b$. $\sum_{k=j_o}^{\infty} M(u_k - u_{k+1}) = \lim_{N\to+\infty} M(u_{j_o} - u_N) = Mu_{j_o}$ che tende a zero uniformemente in $[a,b]$ essendo la successione u_k decrescente a zero. La convergenza assoluta segue sempre dal fatto che $u_k(x) \searrow 0$. La stima $|S(x)| \leq Mu_o$ a questo punto è ovvia.

Lemma 12.1.4 *Se* $a_k \searrow 0$ *e* $b_k \searrow 0$ *allora la serie* $\frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ *converge per ogni valore di* x *tale che* $0 < |x| < \pi$ *mentre nell'intervallo* $\delta \leq |x| \leq \pi$ *la convergenza è uniforme. La serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx$ *converge in* $[-\pi,\pi]$ *e nell'intervallo* $\delta \leq |x| \leq \pi$ *la convergenza è uniforme.*

Dimostrazione Sia $\delta \leq |x| \leq \pi$ Abbiamo che $D_n(x) \stackrel{\rm def}{=} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ mentre $\overline{D}_n(x) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$. Essendo la funzione $\frac{\sin x}{x}$ decrscente fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ si ha $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ e quindi $2\frac{\sin\frac{x}{2}}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ per $0 < x \leq \pi$ e quindi $|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2x}$ per $0 < x \leq \pi$ mentre $|\overline{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{x}$. Se $\delta \leq |x| \leq \pi$ si ha $|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2\delta}$ e $|\overline{D}_n(x)| \leq \frac{\pi}{\delta}$. Possiamo applicare il risultato del **lemma 12.1.3** ponendo $u_k = a_k$ e b_k rispettivamente e dire che per $\delta \leq |x| \leq \pi$ $|\frac{1}{2}a_o + \sum_{k=0}^\infty a_k \cos kx| \leq \frac{1}{2}|a_o|\frac{\pi}{2\delta}$ mentre $|\sum_{k=1}^\infty a_k \sin kx| \leq \frac{\pi}{\delta}|a_1|$. La serie $\sum_{k=1}^\infty a_k \sin kx$ converge ovviamente anche per $x = 0$ e quindi converge per ogni valore di $|x| \leq \pi$.

Ne segue il seguente
Corollario 12.1.2 *Se $b_k \searrow 0$ condizione necessaria e sufficiente perché $\sum_{k=1}^n b_k \sin kx$ converga uniformemente in $[0, 2\pi]$ è che $kb_k \to 0$*

Dimostrazione Necessità : Sappiamo che la serie converge uniformemente in $[0, 2\pi]$ e quindi $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon :\ k \geq n_\varepsilon,\ q \geq n_\varepsilon\ q > k \Rightarrow\ |\sum_{j=k}^q b_j \sin jx| < \varepsilon$. Prendiamo $q = 2k - 1$ e $x = \frac{\pi}{4k}$; abbiamo $\sin jx = \sin\frac{j\pi}{4k}$ e $\frac{\pi}{4} \leq \frac{j\pi}{4k} \leq \frac{\pi}{2}$ da cui $\sin\frac{j\pi}{4k} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ne segue che $\frac{\sqrt{2}}{2}kb_{2k} \leq |\sum_{j=k}^{2k-1} b_j \sin jx| < \varepsilon$ e quindi $(2k)b_{2k} \to 0$ per $k \to +\infty$. Ripetendo lo stesso ragionamento si può dire che $(2k+1)b_{2k+1} \to 0$ e quindi $kb_k \to 0$.
Sufficienza. Sappiamo che $kb_k \to 0$ e da questo vogliamo inferire l'uniforme convergenza.
Dal **lemma 12.1.4** segue che ci basta dimostrare l'uniforme convergenza in un intervallo $(-a, a)$ con $a > 0$ qualsiasi. Sia $\xi_n \stackrel{\rm def}{=} \sup_{k\geq n} kb_k$ (nel senso che ad ogni valore di n corrisponde un valore di ξ_n) e sia N tale che $\frac{1}{N-1} \leq |x| \leq \frac{1}{N}$. Dobbiamo far vedere che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon :\ M > n_\varepsilon \Rightarrow |\sum_{j=n_\varepsilon}^M, b_j \sin jx| < \varepsilon$ per cui applichiamo il **lemma 12.1.2** ed otteniamo $\sum_{k=n_\varepsilon}^{M-1}(b_k - b_{k+1})V_k + b_M V_M - b_{n_\varepsilon}V_{n_\varepsilon - 1}$. Ora supponiamo che $N < n_\varepsilon$; (nel senso che dopo dovremo esaminare il caso in cui $N \geq n_\varepsilon$) $|V_k| \leq \frac{\pi}{|x|} \leq \pi(N-1)$ per ogni k per cui $b_M|V_{M-1}| \leq b_M \pi N \leq \pi b_M M$ essendo la successione $\{b_k\}$ decrescente. $b_{n_\varepsilon}V_{n_\varepsilon-1} \leq b_{n_\varepsilon}N\pi \leq b_{n_\varepsilon}n_\varepsilon\pi$ per le stesse ragioni. $|\sum_{k=n_\varepsilon}^{M-1}(b_k - b_{k+1})V_k| \leq \pi N(b_{n_\varepsilon} - b_M) \leq \pi 2n_\varepsilon b_{n_\varepsilon}$. Riunendo allora si può maggiorare come $4\pi n_\varepsilon b_{n_\varepsilon}$ e dobbiamo trovare n_ε in modo che $4\pi n_\varepsilon b_{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$, Sia ora n tale che $\xi_n \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$ (in tal modo n dipende da ε) e quindi n_ε è quel valore per cui $\xi_n \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$. La successione logica delle varie quantità è la seguente: si fissa dapprima ε e quindi resta fissato il valore ξ_n; ancora non sappiamo chi è n ma si ricava dalla relazione $\xi_n \stackrel{\rm def}{=} \sup_{k\geq n} kb_k$ e quindi si stabilisce se $N < n_\varepsilon$ oppure $N \geq n_\varepsilon$.

Leggermente diverso è il caso in cui $N \geq n_\varepsilon$. In tal caso dobbiamo far vedere che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon :\ M > n_\varepsilon \Rightarrow\ |\sum_{j=n_\varepsilon}^{N-1} b_j \sin jx + \sum_{j=N}^M b_j \sin jx| < \varepsilon$ ed abbiamo due contributi alla somma. Per quanto riguarda il primo possiamo stimare $|\sum_{j=n_\varepsilon}^{N-1} b_j \sin jx| \leq \sum_{j=n_\varepsilon}^{N-1} b_j j|x| \leq \frac{N-n_\varepsilon}{N-1}(n_\varepsilon b_{n_\varepsilon}) \leq 2n_\varepsilon b_{n_\varepsilon}$. Nel secondo contributo riapplichiamo il **lemma 12.1.2** ed otteniamo $|\sum_{k=N}^{M-1}(b_k - b_{k+1})V_k + b_M V_M - b_N V_{N-1}| \leq \pi 2(N-1)(b_N + b_M) \leq 4\pi N b_N \leq \varepsilon$. Di nuovo fissiamo n in modo tale che $\xi_n \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$ e quindi $4\pi N b_N \leq \varepsilon$.∎

Grazie al **Lemma 12.1.3** possiamo dimostrare il seguente corollario
Corollario 12.1.3 *Se $b_k \searrow 0$ e $kb_k \leq A$ per ogni k allora si ha $|\sum_{k=1}^n b_k \sin kx| \leq M$ per ogni valore di n.*
Dimostrazione $b_k \searrow 0$ implica che la serie è uniformemente convergente in un intervallo $\delta_o \leq |x| \leq \pi$. La somma della serie è una funzione continua, limitata quindi, con la coseguenza che $|\sum_{k=1}^n b_k \sin kx| \leq M$ per ogni n. Ci basta quindi dimostrare la relazione in un intervallo $[-\delta_o, \delta_o]$. Sia $x \neq 0$ (per $x = 0$ la serie chiaramente converge) $\frac{1}{N} \leq |x| \leq \frac{1}{N-1}$ e scriviamo $\sum_{k=1}^n b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin kx + \sum_{k=N}^n b_k \sin kx$ dove $n \geq N$. Usando il **lemma 12.1.2** abbiamo $|\sum_{k=N}^n b_k \sin kx| \leq |\sum_{k=N}^{n-1}(b_k - b_{k+1})V_k| + b_n|V_n| + b_N|V_{N-1}| \leq \pi N(b_N + b_n) + \pi N(b_n + b_N) \leq 3\pi N b_N \leq 3\pi A$. $|\sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin kx| \leq \sum_{k=1}^N b_k k|x| \leq A(N-1)|x| \leq A$.∎

Il **corollario 12.1.3** dimostra la proprietà i) non appena si definisce $b_k = \frac{1}{k}$. La proprietà ii) è immediata. Ad esempio per $p \leq n-1$ si ha $|\sum_{k=0}^{p} \frac{\cos(n+k)x}{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n-k} \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$. La stima $2(1+\ln n)$ su $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(n+k)x}{n-k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(2n+k)x}{k}$, è immediata. Le stesse stime sono valide se al posto dei coseni si scrivono dei seni. Per la proprietà iii) consideriamo $|\sum_{k=0}^{p} \frac{\cos(n+k)x}{n-k}| \leq \frac{1}{n-p} |\sum_{k=0}^{p} \cos(n+k)x| = |\frac{1}{n-p} \frac{\sin \frac{2p+2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}|$ e quindi $|\frac{1}{n-p} \frac{\sin \frac{2p+2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}| \leq 2(\inf_{x\in[\delta,\pi]} \sin\frac{x}{2})^{-1} \leq 2\frac{\pi}{2\delta}$. La stessa cosa accade per le altre sommatorie di seni e coseni per cui la iii) è provata. La iv) è immediata.

Tra l'altro dal **corollario 12.1.3** segue che esistono serie trigonometriche che convergono uniformemente su $[0, 2\pi]$ ma non convergono assolutamente. Sia data la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \ln k}$; possiamo applicare il **corollario 12.1.3** e quindi dire che la serie converge uniformemente. Del resto $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k\ln k} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k \ln k} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\cos 2kx}{k\ln k}$. La seconda serie converge in $[0,2\pi]$ e se convergesse pure $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k \ln k}$ allora convergerebbe pure $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ il che è falso.

12.2 Un esempio, dovuto a Lebesgue, di funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un punto

Sia $\{n_i\}$ una successione di interi da definirsi, sia $a_o = 1$, $a_k \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{k} n_j$, sia $I_k = (\frac{\pi}{a_k}, \frac{\pi}{a_{k-1}})$, sia $c_k \searrow 0$ una successione di numeri tendente a zero. Definiamo una funzione nel seguente modo $f(x) = c_k \sin a_k x$ per $x \in I_k$, ; $f(0) = 0$ ed inoltre è pari ossia $f(-x) = f(x)$. f si annulla agli estremi degli intervalli I_k in quanto $\sin a_k \frac{\pi}{a_k} = 0$ ed inoltre $\sin a_k \frac{\pi}{a_{k-1}} = \sin \pi n_k = 0$. Dunque la funzione è continua, nulla nell'origine e $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Se $x \in [\delta, x]$ la funzione è a variazione limitata e quindi $\sigma(f)$ converge ad essa. Si vuol dimostrare che la serie diverge in $x = 0$. Sappiamo dal **Teorema 12.2.1** che $S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt \frac{\sin nt}{t} f(x+t) + o(1)$ per cui $S_n(0, f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dt \frac{\sin nt}{t} f(t) + o(1)$ e si dimostrerà che $J_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi} dt \frac{\sin a_k t}{t} f(t)$ tende a $+\infty$ per $k \to +\infty$ e quindi $S_{a_k}(0, f)$ diverge per $k \to +\infty$. $J_k = \int_0^{\pi/a_k} dt \frac{\sin a_k t}{t} f(t) + \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} dt \frac{\sin a_k t}{t} f(t) + \int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi} dt \frac{\sin a_k t}{t} f(t) = A_k + B_k + C_k$. $|A_k| \leq \frac{\pi}{a_k} \max_{x\in[0,\frac{\pi}{a_k}]} |f(x)| a_k \leq \pi c_k$ che tende a zero per $k \to +\infty$. In C_k abbiamo $t \geq \frac{\pi}{a_{k-1}}$ e quindi $\frac{f(t)}{t}$ è continua. Applicando il **lemma 12.2.1** si ha $\lim_{n\to+\infty} \int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi} dt \frac{\sin nt}{t} f(t) = 0$ e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste a_k tale che $|\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi} dt \frac{\sin a_k t}{t} f(t)| < \varepsilon$. Per quanto riguarda C_k abbiamo $C_k = c_k \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\sin^2 a_k t}{t} = c_k \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{1-\cos 2a_k t}{t} = \frac{c_k}{2} \ln n_k - c_k \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\cos 2a_k t}{t}$. Integrando per parti il secondo integrale si può maggiorare con una costante K. Scegliendo $c_k = \frac{1}{\sqrt{\ln n_k}}$ abbiamo $J_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$.

È opportuno osservare che la ragione della non convergenza della serie di Fourier nell'origine è dovuta al fatto che la funzione non è a variazione limitata in un qualsiasi intorno dell'origine stessa.

Diamo ora la dimostrazione di alcuni risultati che sono stati usati. Servono alcuni risultati preliminari.

Lemma 12.2.1 *Se $f(x)$ è una funzione sommabile in $[a, b]$ allora $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$*

Dimostrazione La prima dimostrazione che diamo è quella contenuta a pagina 402 del libro di Kolmogorov. Supponiamo che $f \in C^1([a, b])$ e quindi integrando per parti si ha $\frac{\sin nx}{n} f(x)|_a^b - \int_a^b dx \frac{\sin nx}{n} f'(x)$. Il limite per $n \to +\infty$ è chiaramente zero. Se invece $f \in L_1([a, b])$ la derivata non si può più fare ma essendo le funzioni $C^1([a, b])$ dense nello spazio delle funzioni $L_1([a, b])$ ossia $\overline{C^1([a, b])} = L_1([a, b])$ (la chiusura va intesa nel senso della metrica di L_1,) allora $\forall\ \varepsilon >$

$\exists\ \varphi_\varepsilon \in C^1([a,b])\ :\ \|f-\varphi_\varepsilon\|_{L_1} < \varepsilon$. Il risultato segue ora facilmente.

Teorema 12.2.1 *Data una funzione sommabile f in $[-\pi,\pi]$ si ha*
$S_n(x) \stackrel{\rm def}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(2n+\frac12)u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du + o(1)$

Dimostrazione $\frac{\sin(2n+\frac12)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin nx}{2\tan\frac{x}{2}} + \frac12\cos nx = \frac{\sin nx}{x} + \sin nx(\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}) + \frac12\cos nx$. Sia $g(x) = \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}} - \frac1x$, $g(0)=0$. La funzione è continua in $[-\pi,\pi]$ e si estende per periodicità a tutto l'asse reale e quindi $f(x+u)(\frac{1}{2\tan\frac{u}{2}} - \frac1u)$ è sommabile. Il **lemma 12.2.1** ci dice che tanto $\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\sin nu(\frac{1}{2\tan\frac{u}{2}} - \frac1u)$ quanto $\frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac12\cos nu$ tendono a zero per $n\to+\infty$.

Dimostriamo ora il seguente teorema

Teorema 12.2.2 *La serie di Fourier di una funzione f a variazione limitata converge ad f nei punti in cui è continua ed al valore $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ nei punti in cui è discontinua. Se $(a',b')\subset(a,b)$ è un intervallo in cui la funzione è continua, la serie di Fourier converge ivi uniformemente*

Abbiamo bisogno di alcuni lemmi.

Lemma 12.2.2 *La convergenza o divergenza in x della serie di Fourier di una funzione sommabile dipende solamente dal comportamento della funzione nell'intorno del punto x*

Dimostrazione Definiamo una funzione periodica $g(x+2\pi)=g(x)$ e $g(u) = \begin{cases} 0 & |x|<\delta \\ u^{-1} & \delta\le|x|\le\pi \end{cases}$

Poi dal **teorema 12.2.1** scriviamo $S_n(x) = \frac1\pi\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin nu}{u}du + \frac1\pi\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)g(u)\sin nu du + o(1)$ e dal fatto che $g(x)f(x)$ è sommabile si ha $S_n(x) = \frac1\pi\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\frac{\sin(nu)}{u}du + o(1)$ ∎

$S_n(x) = \frac1\pi\int_0^\delta (f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin nu}{u}du + o(1)$ e se fosse $f(x)\equiv 1$ avremmo $S_n(x)=1$ per ogni n. Ne segue che $1 = \frac2\pi\int_0^\delta \frac{\sin nu}{u}du + o(1)$ e quindi $S = \frac2\pi\int_0^\delta S\frac{\sin nu}{u}du + o(1)$. Una ulteriore conseguenza è che $S_n(x) - S = \frac1\pi\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2S]\frac{\sin nu}{u}du + o(1)$. ∎

Ne segue il seguente

Lemma 12.2.3 *La serie di Fourier $\sigma(f)$ converge al valore S se e solo se $\lim_{n\to+\infty}\frac1\pi\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)-2S]\frac{\sin nu}{u}du = 0$. Il valore S potrebbe benissimo essere $f(x)$.*

Lemma 12.2.4 *Sia $f(x)$ continua in (a,b) e sia $\varepsilon>0$. Condizione necessaria e sufficiente perché la serie di Fourier $\sigma(f)$ converga uniformemente in $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ è che*
$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_x(u)\frac{\sin nu}{u}du = 0$ *uniformemente in (a,b), $0<\delta<\varepsilon$ e $\varphi_x(u) \stackrel{\rm def}{=} f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$, $a+\varepsilon\le x\le b-\varepsilon$, $|u|\le\delta$.*

Dimostrazione Basta osservare che la funzione è uniformemente continua in un qualsiasi intervallo chiuso contenuto in (a,b). In tal modo $|u|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |\varphi_x(u)|<\varepsilon$ e per qualsiasi $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ da cui la convergenza uniforme in $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ ∎

Dimostrazione del teorema 12.2.1 È sufficiente dimostrarlo per funzioni non decrescenti in quanto ogni funzione a variazione limitata può scriversi come somma di funzioni monotone ([Kol] pag. 303). Sia $S \stackrel{\rm def}{=} \frac12(f(x+0)+f(x-0))$ e quindi $f(x+u)+f(x-u)-2S = [f(x+u)-f(x+0)] + [f(x-u)-f(x-0)]$. Stimiamo ora $\int_0^\delta (f(x+u)-f(x+0))\frac{\sin nu}{u}$. Sappiamo che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_1<\delta : 0\le u\le\delta_1 \Rightarrow |f(x+u)-f(x+0)|<\varepsilon$ (è una conseguenza della monotonia). Essendo $\int_0^\delta \frac{\sin nu}{u} \le A$ ne segue che $|\int_0^\delta (f(x+u)-f(x+0))\frac{\sin nu}{u}| \le \varepsilon A$ e quindi $|\int_0^\delta (f(x+u)-f(x+0)-2S)\frac{\sin nu}{u}| \le 2A\varepsilon$

A partire dal **teorema 12.2.2** si può dimostrare il seguente corollario

Corollario 12.2.1 *Se f è una funzione a variazione limitata e continua in $[-\pi,\pi]$, con $f(\pi)=f(-\pi)$ allora la sua serie di Fourier converge uniformemente su tutta la retta reale. In particolare se una funzione è assolutamente continua e periodica in $\mathbf{R}$ allora la sua serie di Fourier converge uniformemente.*

Sia data una funzione f sommabile in $[0,2\pi]$ e periodica e si costruisca la sua serie di Fourier (che non sappiamo se converge). Scriviamo per questo $f(x)\sim\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^\infty a_k\cos kx+b_k\sin kx$ e quindi $F(x)\sim\frac{a_o}{2}x+C+\sum_{k=1}^\infty\frac{-b_k\cos kx+a_k\cos kx}{k}$ dove F è l'integrale di f. La funzione $F(x)-\frac{a_o}{2}x$ è assolutamente continua e quindi ad essa converge uniformemente la sua serie di Fourier. In particolare deve convergere l'espressione $\sum_{k=1}^\infty\frac{b_k}{k}$. Tale osservazione è importante qualora si voglia stabilire se una certa serie trigonometrica convergente q.o. definisce una funzione sommabile [(2.12)]. Ad esempio la serie trigonometrica $\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kx}{\ln k}$ non può definire una funzione sommabile, ancorché la serie converga per ogni $x\in\mathbf{R}$, in quanto $\sum_{k=2}^\infty\frac{1}{k\ln k}$ diverge mentre dovrebbe convergere. La questione di stabilire se esiste una funzione $g(x)$ sommabile, diversa quindi da $f(x)$, tale che la sua serie di Fourier sia $\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kx}{\ln k}$ richiede un ulteriore ragionamento. Il teorema che si usa e che verrà dimostrato fra poco è che per una funzione sommabile $\lim_{n\to+\infty}\sigma_n(x;f)-f(x)=0$ *q.o.* (per la definizione di $\sigma_n(x;f)$ si veda il 12.0) ossia per una funzione sommabile le somme di Fejér convergono alla funzione *q.o.*. Supponiamo allora che esista questa funzione $g(x)$ sommabile tale che $S_n(x;g)=\sum_{k=1}^n\frac{\sin kx}{\ln k}$. Abbiamo $\sigma_n(x;g)-g(x)\to 0$ *q.o.*. Ma $\sigma_n(x;g)=\sigma_n(x;f)$ e quindi $f=g$ q.o. il che è falso essendo g sommabile ed f no. Come si vede essenziale è il Teorema sulla convergenza *q.o.*. delle somme parziali di Fejér; teorema che ora andiamo a dimostrare.

Lemma 12.2.5 *Se $f\in L_1(a,b)$, q.o. si ha* $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}dt|f(t)-f(x)|=0$

Dimostrazione I punti in cui $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}dt|f(t)-f(x)|=0$ sono detti *punti di Lebesgue*. Sia dato un numero razionale r e sia $F(u)\stackrel{\rm def}{=}\int_0^u dt|f(t)-r|$; $|f(t)-r|$ è una funzione sommabile per cui q.o. $F'(u)=|f(u)-r|$. Sia E_r l'insieme dei punti in cui $F'(u)=|f(u)-r|$ è falsa (chiaramente $\mu(E_r)=0$). Sia $E\stackrel{\rm def}{=}\cup_k E_{r_k}$ dove $\{r_k\}$ è una numerazione dei razionali e chiaramente si ha $\mu(E)=0$. Sia ora $x_o\notin E$ e $r\in\mathbf{Q}$ tale che $|f(x_o)-r|<\varepsilon$. $|f(t)-f(x_o)|=|(f(t)-r)+(r-f(x_o))|\le|f(t)-r|+|r-f(x_o)|=(|f(t)-r|-|f(x_o)-r|)+|f(x_o)-r|+|r-f(x_o)|$ $x_o\notin E\;\Rightarrow\;x_o\notin E_{r_k}$ per ogni k per cui $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_o+h}dt|f(t)-r|=|f(x_o)-r|$. Quindi abbiamo $\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_o+h}dt|f(t)-f(x_o)|=o(1)$

Osservazione 1) I punti in cui $f(x)$ è continua sono punti di Lebesgue essendo vera la maggiorazione $\frac{1}{h}\int_x^{x+h}dt|f(t)-f(x)|\le\sup_{x<t<x+h}|f(t)-f(x)|$ 2) Detta $F(x)$ la primitiva di una funzione sommabile, nei punti di Lebesgue si ha l'uguaglianza $F'(x)=f(x)$. In questo caso infatti si ha la disuguaglianza $|\frac{1}{h}\big(F(x+h)-F(x)-f(x)\big)|\le\frac{1}{|h|}\int_{\min\{x,x+h\}}^{\max\{x,x+h\}}dt|f(t)-f(x)|$ il cui limite $h\to 0$ è zero. 3) Il viceversa non è vero ossia se x_o è un punto in cui la funzione $F(x)$ è derivabile, non è detto che sia un punto di Lebesgue (chiaramente non può essere un punto in cui $f(x)$ è continua ma d'altra parte non può essere un punto con una discontinuità di salto). Si prenda la funzione $\begin{cases}\sin x^{-1} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. Nel capitolo sugli integrali esercizio **22.8** si è dimostrato che, detta $F(x)=\int_0^x dtf(t)$, si ha $F'(0)=f(0)=0$. Vogliamo ora far vedere che non esiste $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h dt|f(t)|$. Per questo trasformiamo l'integrale come $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{1/h}^{+\infty}dz\frac{|\sin z|}{z^2}$ (poi bisognerà fare anche il limite a $h\to 0^-$). $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{1/h}^{+\infty}dz\frac{|\sin z|}{z^2}\ge\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{1/h}^{+\infty}dz\frac{\sin^2 z}{z^2}=$

(2.12) Si veda pure il **Teorema 12.3.1** per una serie trigonometrica divergente che non deriva da alcuna funzione sommabile

$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{1/h}^{+\infty}dz\frac{1-\cos(2z)}{z^2}$. Il primo limite fa $\frac{1}{2}$. Il secondo integrale si fa per parti ottenendo $-\frac{1}{2h}\frac{\sin(2t)}{2t^2}\Big|_{1/h}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{1/h}^{+\infty}dt\frac{\sin(2t)}{t^3}=-\frac{1}{4}h-\frac{1}{2h}\int_{1/h}^{+\infty}dt\frac{\sin(2t)}{t^3}$. Il primo contributo ha limite 0 mentre il secondo si maggiora con $\frac{2}{h}\int_{1/h}^{+\infty}\frac{dt}{t^3}$ e nel limite fa zero. Dunque il limite cercato è $\frac{1}{2}$

Corollario 12.2.2 *Data una funzione sommabile, q.o. si ha* $\Phi_x(t)\stackrel{\rm def}{=}\int_0^h du(f(x+u)+f(x-u)-2f(u))=o(t)$

Dimostrazione Basta cambiare variabili

Teorema 12.2.3 *Sia data una funzione* f *sommabile in* $[0,2\pi]$. *Nei punti* x *in cui* $\frac{1}{h}\int_o^h|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|dt=o(h)$ *si ha* $\sigma_n(x;f)\to f(x)$

Osservazioni Se la funzione è continua in x oppure ha una discontinuità di prima specie (salto) oppure è continua in un intervallo valgono dei Teoremi più forti che daremo dopo.

Dimostrazione Detta $\varphi_x(t)\stackrel{\rm def}{=}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|$ e detta $\Phi_x(t)=\int_0^t du|\varphi_x(u)|$ si ha $\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}du\varphi_x(u)K_n(u)$ e $K_n(u)$ è descritta al **12.0**. Dal fatto che $|D_k(x)|\le k+\frac{1}{2}$ se $k\le n$ segue che $|K_n(x)|\le 2n$. $|\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n}dt\varphi_x(t)K_n(t)|\le\frac{2n}{\pi}\int_0^{2n}dt\varphi_x(t)=\frac{2n}{\pi}\Phi_x(\frac{1}{n})=o(1)$ poiché $\Phi_x(t)=o(t)$. Inoltre dal fatto che $0<K_n(x)<\frac{1}{2(n+1)\sin^2\sin^2\frac{u}{2}}\le\frac{\pi^2}{2u^2(n+1)}$ si può stimare $|\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}\varphi_x(t)K_n(t)|\le\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2n}\int_{1/n}^{\pi}|\varphi_x(t)|\frac{1}{t^2}dt=\frac{\pi}{2n}\int_{1/n}^{2\pi}dt\frac{1}{t^2}(\Phi_x)'=\frac{\pi}{2n}\big[\pi^{-2}\Phi_x(\pi)-n^2\Phi_x(\frac{1}{n})\big]+\frac{\pi}{n}\int_{1/n}^{\pi}dt\frac{\Phi_x(t)}{t^3}$. Essendo $\Phi_x(t)=o(t)$ abbiamo $\frac{\pi}{2n}\pi^{-2}\Phi_x(\pi)=o(1)$ e sommando con l'integrale fra 0 e $\frac{1}{n}$ otteniamo $\sigma_n(x;f)-f(x)=o(1)$ con la condizione che $\Phi_x(t)=o(t)$. $\frac{1}{n}n^2\Phi_x(\frac{1}{n})=o(1)$. L'integrale si stima allo stesso modo per cui $\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}dt\varphi_x(t)K_n(t)=o(1)$ ∎

Corollario 12.2.3 *Se* $f\in L_1(0,2\pi)$ $\sigma_n(x;f)\to f(x)$ *q.o.*

Dimostrazione Si applica il **Teorema 12.2.3** in tutti i punti consentiti dal **Corollario 12.2.2** ∎

12.3 Una serie trigonometrica (non di Fourier), dovuta a Steinhaus, che diverge ovunque ed i cui coefficienti tendono a zero

Teorema di Lusin–Denjoy *Se la serie trigonometrica* $\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$ *converge assolutamente nell'insieme* $E\subseteq[0,2\pi]$ *con* $\mu(E)>0$ *allora* $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)<\infty$

Dimostrazione Sia $\rho_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ $k=1,2,\ldots$ e sia $\alpha_0=0$, $\frac{a_0}{2}=\rho_0$, $a_k=\rho_k\cos\alpha_k$, $b_k=\rho_k\sin\alpha_k$. La serie diventa $\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\cos(kx-\alpha_k)$ e la convergenza assoluta in E implica che $\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k|\cos(kx-\alpha_k)|<\infty$. Dal teorema di Yegorov esiste un insieme $P\subset E$, $\mu(P)>0$ nel quale la serie converge uniformemente. Sia $S(x)$ la somma della serie per $x\in P$. Abbiamo $\int_P S(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\int_P\cos(kx-\alpha_k)dx$. Abbiamo le disuguaglianze $\int_P|\cos(kx-\alpha_k)|dx\ge\int_P\cos^2(kx-\alpha_k)dx=\frac{1}{2}\int_P(1+\cos 2(kx-\alpha_k))dx=\frac{1}{2}\mu(P)+\frac{1}{2}\int_P\cos 2(kx-\alpha_k)dx$. Se $\mathcal{X}_P$ è la funzione caratteristica dell'insieme P si ha $\int_P\cos 2(kx-\alpha_k)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{X}_P\cos 2(kx-\alpha_k)dx=\cos\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{X}_P\cos 2kxdx\sin\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{X}_P\sin 2kxdx$. Sia $\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{X}_P\sin 2kxdx$ che $\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{X}_P\cos 2kxdx$ tendono a zero per $n\to+\infty$ essendo $\mathcal{X}_P\in L([-\pi,\pi])$ e quindi $\int_P|\cos(kx-\alpha_k)|dx\ge\frac{1}{4}\mu(P)$. Ma allora deve aversi $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k<\infty$ e quindi $\sum_k|a_k|+\sum_k|b_k|<\infty$.

Teorema di Cantor–Lebesgue *Se una serie trigonometrica converge su di un insieme di misura positiva allora i suoi coefficienti di Fourier tendono a zero*

Dimostrazione Se $\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\cos(kx-\alpha_k)$ converge in E con $\mu(E)>0$ allora $\lim_{k\to+\infty}\rho_k\cos(kx-\alpha_k)=0$ per ogni $x\in E$. Supponiamo che esista una successione $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tale che $\rho_{n_k}\ge\delta>0$. Ne consegue che $\lim_{k\to+\infty}\cos(kx-\alpha_k)=0$ per ogni $x\in E$ e quindi $\lim_{k\to+\infty}\cos^2(kx-\alpha_k)=0$ e quindi $\int_E\lim_{k\to+\infty}\cos^2(kx-\alpha_k)dx=0$. Scambiando integrale e limite abbiamo $\lim_{k\to+\infty}\int_E\cos^2(kx-\alpha_k)dx=0$. Ripetendo il ragionamento precedente si arriva ad avere

$\lim_{k\to+\infty}\int_E \cos^2(kx-\alpha_k)dx = \frac{1}{2}\mu(E)$.■

Se cade quella parte di ipotesi per cui $\mu(E)>0$ allora la conclusione non vale come mostra l'esempio $\sum_{k=0}^{\infty}\sin(k!x)$.

Il ragionamento inverso al teorema di Cantor–Lebesgue non funziona. Se si dispone di una serie trigonometrica i cui coefficienti tendono a zero non è detto che essa converga su di un insieme a misura positiva ed anzi può non convergere affatto come mostra il seguente

Teorema 12.3.1 *La serie trigonometrica* $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\cos k(x-\ln\ln k)}{\ln k}$ *diverge per ogni valore di* x[(2.12.?)]

Dimostrazione Siano $l_k \stackrel{\rm def}{=} [\ln k]$, $v_k \stackrel{\rm def}{=} \ln\ln k$, $g_n(x)\stackrel{\rm def}{=}\sum_{k=n+1}^{n+l_n}\frac{\cos k(x-v_k)}{\ln k}$, $g_n \stackrel{\rm def}{=} \sum_{k=n+1}^{n+l_n}\frac{1}{\ln k}$; $|g_n-g_n(x)|\le\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{n+l_n}\frac{k^2(x-v_k)^2}{\ln k}\le\frac{1}{2\ln n}\sum_{k=n+1}^{n+l_n}k^2(x-v_k)^2$.

Per $v_n\le x\le v_{n+1}$ e $n+1\le k\le n+l_n$, applicando il teorema di Lagrange abbiamo ($n<\xi<n+l_n$)

$$|x-v_k|\le v_{n+l_n}-v_n=\ln\ln(n+l_n)-\ln\ln n=\frac{1}{\ln\xi}\frac{l_n}{\xi}\le\frac{1}{n}$$

Ne segue che

$$|g_n-g_n(x)|\le\frac{l_n}{2\ln n}(n+l_n)^2\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}(n+l_n)^2\le\frac{1}{2}(1+\frac{l_n}{n})^2$$

e quindi $0<g_n-g_n(x)\le\frac{1}{2}+\varepsilon$ per $n\ge N_\varepsilon$. Ora $g_n\ge\frac{l_n}{\ln(n+l_n)}\to 1$ per $n\to+\infty$ da cui $g_n\ge 1-\varepsilon$ per $n\ge N_\varepsilon$ ossia $g_n(x)>\frac{1}{2}-2\varepsilon>\frac{1}{4}$ per $n\ge N_\varepsilon$ e $v_n\le x\le v_{n+1}$. Dunque abbiamo dimostrato che per ogni $x\in[v_{k_x},v_{k_x+1}]\ \Rightarrow\ g_{k_x}(x)>\frac{1}{4}$. Per periodicità $g_{k_x}(x)=g_{k_x}(x+2\pi p)$ per ogni p intero e $x+2\pi p\in[v_{k_p},v_{k_p+1}]$ con $k_p\to+\infty$. Dunque si ha una successione $\{k_p\}$ per cui $g_{k_p}(x)>\frac{1}{4}$. Ne segue che la successione $g_{k_p}(x)$ non è di Cauchy.■

Nell'introduzione del capitolo è preannunciato che la serie $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\cos k(x-\ln\ln k)}{\ln k}$ non è la serie di Fourier di alcuna funzione sommabile in $[0,2\pi]$ ossia non esiste alcuna $f\in L_1(0,2\pi)$ tale che $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dxf(x)\cos kx=\frac{\cos(k\ln\ln k)}{\ln k}$ e $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dxf(x)\sin kx=\frac{\sin(k\ln\ln k)}{\ln k}$. L'argomento usato a proposito della funzione $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}$ non funziona nel caso specifico poiché esso si basa sul fatto che la serie definisca una funzione (che poi tale funzione non sia sommabile è discorso successivo). Nel caso della serie di Steinhaus, $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\cos k(x-\ln\ln k)}{\ln k}$ non definisce funzione alcuna.

12.4 Una funzione continua la cui serie di Fourier non converge uniformemente in nessun intervallo di $[0,2\pi]$

Sia $g(x)$ la funzione costruita al **12.1** e sia $\{r_i\}$ un ordinamento dei numeri razionali. Definiamo la funzione $G(x)\stackrel{\rm def}{=}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}g(x-r_k)$. La funzione definita è continua per il criterio di Weierstrass e dunque ammette una serie di Fourier $\sigma(G)$ le cui somme parziali sono date da $S_n(x,G)$. $S_n(x,G)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}S_n(x-r_k,g)$ e quindi $R_n(x,G)=S_n(x,G)-G(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}(S_n(x-r_k,g)-g(x-r_k))=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}R_n(x-r_k,g)=\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}2^{-k}R_n(x-r_k,g)+\sum_{N_\varepsilon+1}^{\infty}2^{-k}R_n(x-r_k,g)$. Nella dimostrazione in **12.1** circa la funzione che converge ovunque in $[0,2\pi]$ ma non uniformemente nell'intorno di 0 si ha la stima $|S_n(x,g)|\le 2(1+\ln a)$ che adesso riprendiamo per dire che scegliendo N_ε opportuno (dipendente anche dal valore a) si ha $\sum_{N_\varepsilon+1}^{\infty}2^{-k}|R_n(x-r_k,g)|<\varepsilon$. D'altra parte $\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}2^{-k}R_n(x-r_k,g)$ converge a zero per $n\to+\infty$. Dalla somma dei due contributi abbiamo che $S_n(x,G)$ converge a $G(x)$ in ogni punto dell'intervallo $[0,2\pi]$. Prendiamo

[(2.12.?)] 1) H.Steinhaus: *Sur une série trigonométrique divergente,* C.R. de la Soc. sci. de Varsovie, V, fasc.3 (1912) pp.223–227, 2) H.Steinhaus: *A divergent trigonometrical series,* Journal of London Mathematical Society, **4** (1929) pp.86–88, 3) Sioban O'Shea: *On a Divergent Trigonometrical Series Given by Steinhaus*, Proocedings of the American Mathematical Society, Volume 10, Issue 1 (Feb., 1959) pp.60–70.

ora un numero razionale r_{j_o} e facciamo vedere che la serie non converge uniformemente in alcun intervallo che circonda r_{j_o}. Ne segue che la serie non converge uniformemente in alcun intervallo. Scriviamo $R_n(x,G)=\sum_{k=1}^{N,k\neq j_o}2^{-k}R_n(x-r_k,g)+2^{-j_o}R_n(x-r_{j_o},g)+\sum_{N+1}^{\infty}2^{-k}R_n(x-r_k,g)$. Sia δ_N la distanza minima tra r_{j_o} e $r_1,\ r_2,\ldots,r_N$ con $N\neq j_o$ e consideriamo un intervallo x appartenente all'intervallo $(r_{j_o}-\frac14\delta_N,r_{j_o}+\frac14\delta_N)$. Da quanto scritto nella dimostrazione di **12.1** abbiamo che $2^{-j_o}R_n(x-r_{j_o},g)$ non converge uniformemente per $n\to+\infty$ nel senso che vi è una successione di punti x_k tale che $x_k\to r_{j_o}$ e $2^{-j_o}R_n(x_k-r_{j_o},g)>2^{-j_o}$. L'ultimo contributo tende a zero uniformemente per $N\to+\infty$ per le stesse ragioni di prima. Rimane da studiare il comportamento del primo contributo $\sum_{k=1}^{N,k\neq j_o}2^{-k}R_n(x-r_k,g)$. In ciascuno dei termi presenti si ha $|x-r_k|\geq\frac12\delta_N$ e quindi sappiamo che $|R_n(x-r_k)|\leq\frac{M}{\delta_N}\frac{1}{(m_n+1)^2}$ e quindi prendendo n grande abbastanza si ha $\sum_{k=1}^{N,k\neq j_o}2^{-k}|R_n(x-r_k,g)|\leq 2^{-j_o-1}$. La conclusione è la convergenza non uniforme nell'intervallo $(r_{j_o}-\frac14\delta_N,r_{j_o}+\frac14\delta_N)$ data la densità dei razionali.■

Diamo ora alcune definizioni

Definizione *La successione* $\{f_n(x)\}$ *è detta divergente limitatamente se* $-\infty<\underline{\lim}_{n\to+\infty}f_n(x)<\overline{\lim}_{n\to+\infty}f_n(x)<\infty$. *La stessa successione è detta divergente illimitatamente se* $\overline{\lim}_{n\to+\infty}f_n(x)=\infty$. *Inoltre è detta divergente se verifica una qualsiasi delle precedenti definizioni.*

Teorema 12.4.1 *Sia data la successione* $\{f_n(x)\}$ *dove* $f_n\in C([a,b])$. *Allora l'insieme dei punti in cui dovesse divergere illimitatamente è un insieme* G_δ. *Se inoltre tale insieme è denso allora è non–numerabile.*

Dimostrazione Basta osservare che l'insieme in questione può scriversi come $\cap_{M=1}^{\infty}\cup_{k=1}^{\infty}\{x\in[a,b]\colon f_k(x)>M\}$ che è chiaramente intersezione di aperti essendo le funzioni continue. Dunque l'insieme in questione è della forma $O=\cap_{k=1}^{\infty}O_k$ e quindi è un G_δ. Supponiamo che sia denso in $[a,b]$ che è completo come spazio metrico. Il complementare di O è dato da $[a,b]\backslash O\overset{\text{def}}{=}O^c=\cup_{k=1}^{\infty}O_k^c$ e ciascun O_k^c è chiuso. Non può accadere che $\overset{\circ}{O^c}\neq\emptyset$ in quanto violerebbe la densità di O e quindi deve per forza aversi $\overset{\circ}{O_k^c}=\emptyset$. Se O fosse numerabile ossia $O=\{a_i\}$ vorrebbe dire che $[a,b]=\{a_i\}\cup_{k=1}^{\infty}O_k^c$ e ciascun elemento verifica la relazione secondo cui la chiusura ha interno vuoto e questo è impedito dalla completezza di $[a,b]$. La contraddizione si risolve dicendo che se $\overline{O}=[a,b]$ allora O è non–numerabile.

12.5 Una funzione continua la cui serie di Fourier diverge su di un insieme non–numerabile

Sia data la funzione $g(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}Q_k(k!x)$ dove $Q_k(x)$ è definito in **12.1** e $n_k=a^{k^3}$. È una serie uniformemente convergente di funzioni continue e quindi definisce una funzione continua. Se scriviamo la serie di Fourier di $g(x)$ otteniamo $\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$ che è data esattamente da $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}Q_k(k!x)$ in quanto $3n_kk!<n_{k+1}(k+1)!$ (a maggior ragione se $3n_k<n_{k+1}$ grazie ad una opportuna scelta di a; vedi il paragrafo **12.1**). Se $\nu_m\overset{\text{def}}{=}2n_m-1$ e $\mu_m\overset{\text{def}}{=}3n_{m-1}$ allora $S_{\nu_m}(x,g)-S_{\mu_m}(x,g)=\frac{1}{m^2}P(m!x,n_m)$. Ora se $x=2\pi\frac{p}{q}$ esiste un intero m_p tale che $m!2\pi\frac{p}{q}$ è multiplo di 2π per ogni intero maggiore o uguale a m_p. Ne segue che $\frac{1}{m^2}P(m!2\pi\frac{p}{q},n_m)>m\ln a$ e quindi $\{S_{3n_k}(x,g)\}_{k=1}^{\infty}$ diverge a $+\infty$. Conseguentemente si ha $\overline{\lim}_{n\to+\infty}S_n(x,g)=+\infty$ (ossia divergenza illimitata) su di un insieme denso di numeri e grazie al **Teorema 12.4.1** la divergenza accade su di un insieme non–numerabile.■

12.? Un esempio, dovuto a Kolmogorov, di funzione sommabile in $[0,2\pi]$ e la cui serie di Fourier diverge quasi ovunque[(1.12.?)]

[(1.12.?)] Diamo qualche referenza bibliografica: 1) A.N.Kolmogorov: *Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque*

Lemma 12.?.1 *Esistono funzioni $\varphi_n(x)$ tali che:*

1) $\varphi_n \geq 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} dx\varphi_n(x) = 2$, $n = 1, 2, \ldots,$ 2) $\varphi_n(x)$ a variazione limitata

3) $\exists\ A > 0\ :\ |S_p(x, \varphi_n)| < A \ln n, p = 1, 2, \ldots,\ \forall\ x \in H_n$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mu(H_n) = 2\pi$

4) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \alpha_\varepsilon > 0 \wedge\ N_\varepsilon \in \mathbf{N}\ : \forall\ n > N_\varepsilon\ \exists\ \mathcal{E}_n\ :$

a) $\mu(\mathcal{E}_n) > 2\pi - \varepsilon$, *b)* $\forall\ x \in \mathcal{E}_n\ \exists\ p_x\ :\ |S_{p_x}(x, \varphi_n)| > \alpha_\varepsilon \ln n$

c) $n \leq p_x \leq m_n$, m_n dipende solo da n e non da ε.

Dimostrazione Sia $A_k \stackrel{\text{def}}{=} = k\frac{4\pi}{2n+1}$ $k = 1, 2, \ldots, n$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 \ldots$ una successione crescente da definirsi di numeri dispari. Sia inoltre $m_1 = n$, $2m_k+1 = \lambda_k(2n+1)$ $k = 2, 3, \ldots, n$. Siano dati gli intervalli aperti $\Delta_k \stackrel{\text{def}}{=} (A_k - \frac{1}{m_k^2}, A_k + \frac{1}{m_k^2})$ $k = 1, 2, \ldots, n$.

$\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \emptyset$; infatti $A_k + \frac{1}{m_k^2} < A_{k+1} - \frac{1}{m_{k+1}^2}$ è implicata da $\frac{4}{(\lambda_k(2n+1)-1)^2} < \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{4}{\lambda_{k+1}(2n+1)-1)^2}$ ossia $\frac{1}{\lambda_k(2n+1)-1)^2} + \frac{1}{\lambda_{k+1}(2n+1)-1)^2} < \frac{\pi}{2n+1}$ che è implicata da $\frac{2}{\lambda_k(2n+1)-1)^2} < \frac{\pi}{2n+1}$ e che a sua volta è implicata da $\frac{2}{(2n+1)-1)^2} < \frac{\pi}{2n+1}$ ossia $4\pi n^2 - 4n - 2 > 0$ che è sempre vera.

Definiamo le seguenti funzioni $\varphi_n(x) = \begin{cases} m_k^2/n & x \in \Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

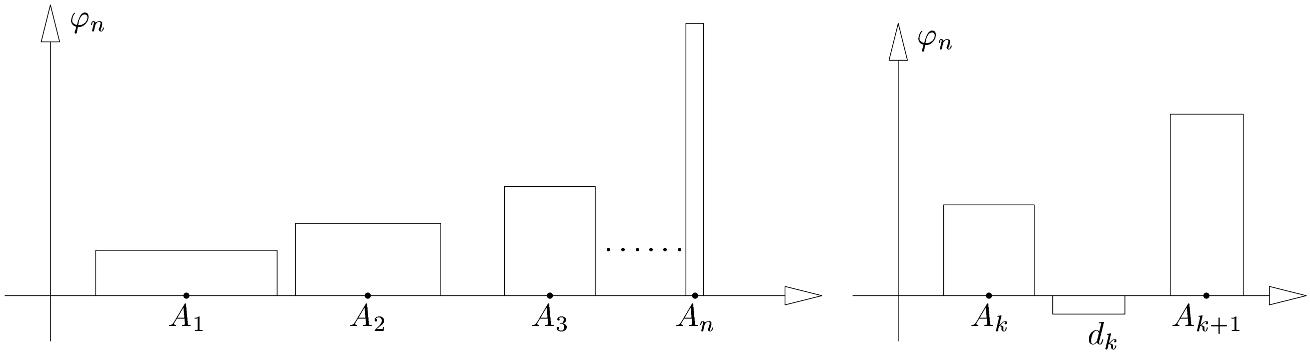
$\int_0^{2\pi} dx\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} dx\varphi_n(x) = \frac{2}{n}n$. Inoltre ogni φ_n è positiva ed a variazione limitata e quindi si è dimostrata la 1) e la 2). Passiamo a dimostrare la 3).

---

partout, Fundamenta Mathematicae, **4** 1923, 324–329 (ad ogni modo già il 2–VI–1922 il lavoro era scritto),

2) J.Marcinkiewicz: *Sur les séries de Fourier,* Fundamenta Mathematicae, **27** 1938, 38–69 Vorrei citare a proposito un aneddoto raccontato da V.I.Arnol'd in una nota a pié pagina 132 del libro *The Golden Years of the Moscow Mathematics.* Racconta Arnol'd di un incontro da lui avuto con il matematico Maurice René Frechét (1878–1973) nel 1965 e scrive testualmente "Frechet said to me 1965: Oh, Kolmogorov–is the young man who constructed a summable function with Fourier series that diverges almost–everywhere?" All later achievements of Andrei Nikolaevich– in probability theory, topology, functional analysis, turbulence theory, the theory of dynamical systems–were of less value in the eyes of Frechet".

Per molti anni, fino al 1966 (vedi [Kol] pag.405), è rimasto aperto il problema di dimostrare se divergeva o convergeva q.o. la serie di Fourier di una funzione L_2 (il quadrato del modulo è sommabile). Nel 1966 il matematico L.Carleson ha dimostrato che tale serie converge q.o. e la referenza è : *On the convergence and growth of partial sums of Fourier Series*, Acta Mathematica **116** (1966) pp.135–157. Successivamente R.A.Hunt ha dimostrato lo stesso risultato per funzioni L_p (la potenza $p{>}1$ del modulo è sommabile) e la referenza è : *On the convergence of Fourier Series*, Proc. Conference Edwardsville, Ill., 1967,pp. 235–255. Per funzioni "a quadrato sommabile" lo stesso risultato ma con tecniche diverse, si può trovare in C.Feffermann: *Pointwise Convergence of Fourier Series*, Annals of Mathematics, **98**, (1973) pp.551–571 (si veda pure *Erratum:"Pointwise Convergence of Fourier Series*, Annals of Mathematics (2) **146** (1997), no.1 p.239) e G.Gallavotti–A.Porzio: *The Almost Everywhere Convergence of Fourier Series*, quaderno del CNR–GNFM, Roma 1987. In quest'ultima referenza gli autori fanno uso di una tecnica di studio di problemi aventi singolarità che è nata nel contesto della Fisica Teorica negli anni 1950–1960, che tuttora trova vasta applicazione sia in Fisica Teorica che Fisica Matematica e che va sotto il nome di *Gruppo di Rinormalizzazione.* Qualcosa di molto simile è contenuto nell'articolo di Fefferman



Sia data la famiglia di intervalli chiusi $d_k = [A_k + \frac{1}{n\ln n}, A_{k+1} - \frac{1}{n\ln n}]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ e $H_n = \cup_{k=1}^{n-1} d_k$; $\mu(H_n) = (n-1)[\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n\ln n}] \to 2\pi$ per $n \to +\infty$. Gli intervalli Δ_k e d_k sono tali che $d_k \cap \Delta_j = \emptyset$ per ogni k, j. Basta verificare che $A_k + \frac{1}{m_k^2} < A_k + \frac{1}{n\ln n}$ e ciò è implicato da $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Sia $x \in d_k$. La quantità che dobbiamo stimare è data da $S_p(x, \varphi_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dt\varphi_n(t)\frac{\sin(t-x)(p+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{t-x}{2}} = \tilde S_p(x,\varphi_n) + o(1)$ e $\tilde S_p(x,\varphi_n) \stackrel{\rm def}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dt\varphi_n(t)\frac{\sin p(t-x)}{t-x}$. Inoltre si ha $\frac{1}{\pi}|\int_0^{2\pi} dt\varphi_n(t)\frac{\sin p(t-x)}{t-x}| \le \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi}\int_{\Delta_j} dt\frac{\varphi_n(t)}{|t-x|} = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_j} dt\frac{\varphi_n(t)}{|t-x|} + \sum_{j=k}^{k+1}\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_j} dt\frac{\varphi_n(t)}{|t-x|} + \sum_{j=k+2}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_j} dt\frac{\varphi_n(t)}{|t-x|} \doteq B_1 + B_2 + B_3$

Bisogna ora distinguere diversi casi. Il primo è quello per cui $t \in \Delta_j$ e $j < k$. In tal caso si ha $x - t = (x - A_k) + (A_k - A_j) + (A_j - t) > (A_k + \frac{1}{n\ln n} - A_k) + \frac{4\pi}{2n+1}(k-j) - |A_j - t| \ge \frac{1}{n\ln n} + \frac{4\pi}{2n+1}(k-j) - \frac{1}{m_j^2} > \frac{4\pi}{2n+1}(k-j) - \frac{1}{m_{k-1}^2} = \frac{4\pi}{2n+1}(k-j) - \frac{4}{(\lambda_{k-1}(2n+1)-1)^2} > \frac{4\pi}{2n+1}(k-j) - \frac{1}{n^2} > \frac{4\pi}{2n+1}(k-j)$. Il contributo B_1 si stima come $|B_1| \le \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k-1}(\max_{t\in\Delta_j}\varphi_n)|\Delta_j|\frac{4\pi}{2n+1}(k-j) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{m_j^2}{n}\frac{2}{m_j^2}\frac{2n+1}{4\pi}\frac{1}{(k-j)} \le \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{(k-j)} \le \ln k \le \ln n - 1 < \ln n$

Il secondo caso è quello per cui $t \in \Delta_j$ e $j > k+1$. $t - x = (t - A_j) + (A_j - A_{k+1}) + (A_{k+1} - x) \ge \frac{4\pi}{2n+1}(k+1-j) + A_{k+1} - (A_{k+1} - \frac{1}{n\ln n}) - \frac{1}{m_j^2} \ge \frac{2\pi}{2n+1}(k+1-j)$. Naturalmente se $k+1 = n$ tale contributo è assente. Possiamo stimare B_3 allo stesso modo di B_1 ed ottenere $\sum_{j=k+2}^{n}\frac{2}{(k-j-1)} < 2\ln n$

Il terzo caso è quello in cui $t \in \Delta_k$ oppure $t \in \Delta_{k+1}$ ed in questo ambito il contributo maggiore a B_2 è quello in cui t coincide con l'estremo sinistro dell'intervallo Δ_n e x con l'estremo destro di d_{n-1}. In tal caso $t > x$ e $t - x \ge \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2n\ln n}$. Il contributo di B_2 si stima come $|B_2| \le \frac{1}{\pi}\frac{m_n^2}{n}\frac{2}{m_n^2}2n(\ln n)2 < 3\ln n$. Sommando i tre contributi otteniamo $|\tilde S_p(x,\varphi_n)| \le 6\ln n$.

Dunque per ogni $x \in d_k$ abbiamo $|S_p(x,\varphi_n)| < A\ln n$ e poiché $H_n = \cup_{k=1}^{n-1} d_k$ si ha $x \in H_n \Rightarrow |S_p(x,\varphi_n)| < A\ln n$. La proprietà 3) è dimostrata.

Passiamo ora alla proprietà 4).

Per $x \in d_{k-1}$ dobbiamo stimare in modulo la quantità $\frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=1}^n\Delta_j} dt\varphi_n(t)D_{m_k}(t-x) =$
$= (\int_{\cup_{j=1}^{k-1}\Delta_j} + \int_{\cup_{j=k}^{n}\Delta_j})(\frac{1}{\pi}dt\varphi_n(t)D_{m_k}(t-x)) \doteq B_1 + B_2$.
$|B_1| \le \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k-1}|\int_{\Delta_j} dt\varphi_n(t)\frac{\sin(t-x)(m_k+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{t-x}{2}}| = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k-1}|\int_{\Delta_j} dt\varphi_n(t)\frac{\sin m_k(t-x)}{t-x}| + o(1)$ e $x - t > A_{k-1} + \frac{1}{n\ln n} - (A_{k-1} + \frac{1}{m_{k-1}^2}) = \frac{1}{n\ln n} - \frac{4}{(\lambda_{k-1}(2n+1)-1)^2} \ge \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{n^2} \ge \frac{1}{2n\ln n}$. La funzione $\varphi_n(t)$ è stimabile con $\frac{m_j^2}{n}$ per $t \in \Delta_j$ e quindi $|\frac{\varphi_n(t)}{t-x}| \le \frac{m_{k-1}^2}{n}2n\ln n$ è limitata in $\cup_{j=1}^{k-1}\Delta_j$. La conseguenza è che $|\frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=1}^{k-1}\Delta_j} dt\varphi_n(t)\frac{\sin m_k(t-x)}{t-x}|$ tende a zero per $m_k \to +\infty$ grazie al **Lemma 12.2.1**. Si tenga presente che qui m_k è grande perché è grande λ_k e non perché n è grande. A

differenza di prima (dove $p = 1, 2, , \ldots$) stavolta cerchiamo un p_x e quindi possiamo prendere m_k così grande da rendere piccolo il contributo appena stimato.

Ora dobbiamo stimare l'integrale $|\frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=k}^n \Delta_j} dt\varphi_n(t)\frac{\sin(t-x)(m_k+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{t-x}{2}}|$ e $x \in d_{k-1}$. Non possiamo ripetere il ragionamento fatto prima in quanto stavolta la stima di $|\frac{\varphi_n(t)}{t-x}|$ comporta a numeratore una quantità maggiore od uguale a m_k^2. Scriviamo $D_{m_k}(t-x) = (D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x)) + D_{m_k}(A_j - x)$. L'integrale diventa $\frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=k}^n \Delta_j} dt\varphi_n(t)D_{m_k}(t-x) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=k}^n \int_{\Delta_j} dt\varphi_n(t)(D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x)) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=k}^n \int_{\Delta_j} dt\varphi_n(t)D_{m_k}(A_j - x)$. $|D'_{m_k}(t)| \leq m_k^2$ (basta ricordare la definizione $D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt$) e quindi per Lagrange $|D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x)| \leq m_k^2|t - A_j|$ con $t \in \Delta_j$. Ora $|t - A_j| \leq m_j^{-2}$ da cui $|D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x)| \leq \frac{m_k^2}{m_j^2} \leq 1$ essendo $j \geq k$. In tal modo si ha $|\frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=k}^n \Delta_j} dt\varphi_n(t)(D_{m_k}(t-x) - D_{m_k}(A_j - x))| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{j=k}^n \int_{\Delta_j}\varphi_n(t)dt \leq \sum_{j=k}^n \frac{1}{\pi}\frac{m_j^2}{n}\frac{2}{m_j^2} \leq \sum_{j=k}^n \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} \leq \frac{2}{\pi}$ e quindi $\frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=k}^n \Delta_j} dt\varphi_n(t)D_{m_k}(t-x) = \frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=k}^n \Delta_j} dt\varphi_n(t)D_{m_k}(A_j - x) + O(1)$.
$D_{m_k}(A_j - x) = \frac{\sin(A_j-x)(m_k+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{A_j-x}{2}} = \frac{\sin(A_j-x)(m_k+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{A_j-x}{2}} = \frac{-\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{A_j-x}{2}}$ tenendo conto che $2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1)$. Per $j \geq k$ abbiamo $0 < A_j - x \leq 2\pi$ per cui $\sin\frac{A_j-x}{2} > 0$ e quindi $|\frac{-\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{A_j-x}{2}}| = \frac{|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|}{\sin\frac{A_j-x}{2}} \geq \frac{|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|}{\frac{A_j-x}{2}}$. Inoltre $A_j - x \leq A_j - A_{k-1} = (j-k+1)\frac{4\pi}{2n+1}$ per cui $\frac{|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|}{\frac{A_j-x}{2}} \geq |\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|\frac{1}{(j-k+1)}\frac{2n+1}{4\pi}$. In tal modo si può stimare
$\frac{1}{\pi}|\sum_{j=k}^n \int_{\Delta_j} dt\varphi_n(t)D_{m_k}(t-x)| \geq \frac{1}{\pi}|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|\sum_{j=k}^n \frac{1}{(j-k+1)}\frac{2n+1}{4\pi}\frac{2}{n} + O(1) >$
$> \frac{1}{\pi^2}|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|\sum_{j=k}^n \frac{1}{(j-k+1)} + O(1)$. Ora prendiamo $k < n - \sqrt{n}$ e per tali k si ha $\sum_{j=k}^n \frac{1}{(j-k+1)} = \sum_{j=1}^{n-k-1}\frac{1}{j} > \frac{1}{2}\ln n$. Dunque per $x \in d_{k-1}$ e $k < n - \sqrt{n}$ si ha $S_{m_k}(x, \varphi_n) = |\frac{1}{\pi}\int_{\cup_{j=k}^n \Delta_j} dt\varphi_n(t)D_{m_k}(t-x)| \geq \frac{1}{2\pi^2}\ln n|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}| + O(1)$.

Sia dato ora $\delta > 0$ e sia $G_{k-1}(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in d_{k-1} : |\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}| < \delta\}$. Sia inoltre $G(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{k=1}^n G_k(\delta)$. Si ha $\mu(G(\delta/n)) = O(\delta)$. Infatti se $x \in d_{k-1}$ allora $\frac{A_{k-1}}{2} < \frac{x}{2} < \frac{A_k}{2}$ ossia $(k-1)\frac{2\pi}{2n+1} < \frac{x}{2} < k\frac{2\pi}{2n+1}$ ma $2m_k+1 = \lambda_k(2n+1)$ per cui $|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}| = |\sin(\lambda_k(2n+1)(\frac{x}{2} - (k-1)\frac{2\pi}{2n+1}))|$ e quindi è sufficiente studiare il comportamento di $|\sin\lambda_k(2n+1)t|$ per $0 < t < \frac{2\pi}{2n+1}$ ovvero $|\sin\lambda_k u|$ per $0 < u < 2\pi$. L'insieme delle u per cui $|\sin\lambda_k u| < \delta$ consiste di $4\lambda_k$ intervalli la cui lunghezza è $\frac{\arcsin\delta}{\lambda_k}$ per cui la somma delle loro lunghezze è data da $4\arcsin\delta$. Ciò vuol dire che la somma delle lunghezze dei valori di x per cui $|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}| < \delta$ ha misura maggiorata da $8\frac{\arcsin\delta}{2n+1}$ e quindi $\mu(G(\delta)) < \frac{4\arcsin\delta}{n}$ e quindi $\mu(G(\delta)) < O(\delta/n)$.

Sia ora $x \in d_{k-1}$ e $x \notin G(\delta)$; $|\sin\frac{x}{2}(2m_k+1)| \geq \delta$ e quindi $S_{m_k}(x, \varphi_n) \geq \frac{\delta}{2\pi^2}\ln n - O(1)$.

$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{k=1}^{[n-\sqrt{n}]-1} d_k$, $\mathcal{E}_n \stackrel{\text{def}}{=} (G(\delta))^c \cap E_n$; $\mu(E_n) = ([n-\sqrt{n}]-1)(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n\ln n}) \to 2\pi$ per $n \to +\infty$. Ne segue che $\mu(\mathcal{E}_n) \geq 2\pi - o(1) - O(\delta/n)$ ossia $\mu(\mathcal{E}_n) \geq 2\pi - \varepsilon$ per $n > N_\varepsilon$ e $\delta = \delta_\varepsilon$ dove δ_ε è tale che $|o(1)| + |O(\delta_\varepsilon/N_\varepsilon)| < \varepsilon$.

$x \in \mathcal{E}_n \Rightarrow x \in E_n \wedge x \notin G(\delta)$ e quindi si può trovare un valore di k per cui $x \in d_{k-1}$, $k < n - \sqrt{n}$, $x \notin G(\delta)$, $|S_{m_k}(x, \varphi_n)| \geq \frac{\delta}{2\pi^2}\ln n - O(1)$, $m_1 \leq m_k \leq m_n$; quindi essendo $m_1 = n$ possiamo asserire che per ogni $x \in \mathcal{E}_n$ esiste p_x, $n \leq p_x \leq m_n$ tale che $|S_{p_x}(x, \varphi_n)| \geq \frac{\delta}{2\pi^2}\ln n - O(1)$ mentre $\mu(\mathcal{E}_n) \geq 2\pi - \varepsilon$ per ogni $n > N_\varepsilon$. Se N_ε è abbastanza grande allora $\frac{\delta}{2\pi^2}\ln n - O(1) > \frac{\delta}{4\pi^2}\ln n$ per $n > N_\varepsilon$ e prendiamo $\alpha_\varepsilon = \frac{\delta_\varepsilon}{4\pi^2}$ da cui $|S_{p_x}(x, \varphi_n)| \geq \alpha_\varepsilon \ln n$ per $n > N_\varepsilon$ $\blacksquare$

Osservazione 1) È opportuno confrontare la 3) e la 4) in quanto apparentemente sembrano andare in opposta direzione. Il punto centrale è la maggiorazione $k < n - \sqrt{n}$. Se infatti si arrivasse a $k=n$ allora la stima relativa non potrebbe avere un $\ln n$ in $\frac{1}{2\pi^2}\ln n|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|$. Naturalmente togliere $\sqrt{n}$ non impedisce di avere $\lim_{n\to+\infty}\mu(E_n)=2\pi$. Successivamente ci si libera della presenza di x attraverso la costruzione dell'insieme $G(\delta)$. Nella 3) invece si prende $\cup_{k=1}^{n-1}d_k$ per cui la stima $\frac{1}{2\pi^2}\ln n|\sin(2m_k+1)\frac{x}{2}|$ non può aversi ed inoltre non si è interessati a prendere il valore di p in $S_p(x,\varphi_n)$ grande anche solo laddove potrebbe produrre un contributo piccolo dell'integrale (come in $\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k-1}|\int_{\Delta_j}dt\varphi_n(t)\frac{\sin(t-x)(m_k+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{t-x}{2}}|$) in quanto vogliamo stimare dall'alto con $\ln n$. 2) $\mu(\{x\in[0,2\pi]:\varphi_n(x)\neq 0\})\leq\frac{2}{n}$ 3) È opportuno evidenziare che all'interno dei segmenti Δ_k si hanno delle stime "brutte." Supponiamo infatti di stimare l'integrale $S_{m_k}(x,\varphi_n)$ per $x\in\Delta_1$. Uno degli integrale coinvolti è $\frac{1}{\pi}|\int_{\Delta_1}dt\varphi_n(t)\frac{\sin(t-x)(m_k+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{t-x}{2}}|$ Ebbene quantunque grande sia m_k, non si può affermare che l'integrale tende a zero per $k\to+\infty$ in quanto la funzione $\frac{\varphi_n(t)}{t-x}$ non è sommabile all'interno di Δ_1 e quindi non si può applicare il **Lemma 12.2.1**. D'altro canto il problema rimane anche se si cerca di stimare la funzione $D_{m_k}(t-x)$ con $|t-x|\geq 0$ in quanto l'unica stima che va bene è $|D_{m_k}(t-x)|\leq\frac{\pi}{|t-x|}$ che di nuovo non è sommabile. È interessante vedere come Kolmogorov risolve tale problema per costruire una funzione la cui serie di Fourier diverge ovunque (vedi i polinomi $\tau_n(x)$ nel **Lemma 1.12.???**

Teorema 12.?.2 *A partire dalle funzioni $\{\varphi_n\}$ si possono costruire due funzioni sommabili $\Phi(x)$ e $F(x)$ (appartenenti entrambe a $L([0,2\pi])$) tali che $\overline{\lim}_{n\to\infty}S_n(x,\Phi)=+\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}S_n(x,F)<\infty$ e sia $S_n(x,\Phi)$ che $S_n(x,F)$ non convergono su di un insieme $E\subset[0,2\pi]$ tale che $\mu(E)=2\pi$*

Dimostrazione Sia data una successione di interi $n_1<n_2<n_3<\ldots$ da definirsi e tale che $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n_k}}<\infty$. $\Phi(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_k}(x)}{\sqrt{\ln n_k}}$ e $F(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_k}(x)}{\ln n_k}$ sono le funzioni da studiare. Φ e F sono definite q.o. grazie al teorema di Levi (vedi [Kol] a pag. 298). Negli altri eventuali punti, avendo misura nulla, si può dare un valore arbitrario a Φ e F. Consideriamo infatti la successione $f_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_{n_j}(x)}{\sqrt{\ln n_j}}$ che verifica la proprietà per cui $f_1\leq f_2\leq\ldots$. Inoltre $\sum_{j=1}^{\infty}\int_o^{2\pi}\varphi_{n_j}(x)dx(\ln n_j)^{-1/2}\leq 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n_j}}<K$ dove K è una costante che dipenderà dalla successione $\{n_k\}$ che chiaramente verà scelta in modo tale che la serie sia convergente. Ne segue che q.o. esiste il limite $\lim_{k\to+\infty}f_k(x)\stackrel{\text{def}}{=}\Phi(x)$. La stessa cosa accade quando si considera $\ln n_k$ al posto di $\sqrt{\ln n_k}$.

Indicati rispettivamente con $S_{p_x}(x,\Phi)$ e con $S_{p_x}(x,F)$ i polinomi trigonometrici di ordine p_x, calcolati in x per la Φ e la F, si dimostrerà che $|S_{p_x}(x,\Phi)-\Phi(x)|\geq c\sqrt{\ln n_k}$ e $|S_{p_x}(x,F)-F(x)|\geq c$ per infiniti valori di n_k e q.o in $x\in[0,2\pi]$. La conclusione è che le serie di Fourier divergono entrambe quasi ovunque ed inoltre $\overline{\lim}_{n\to\infty}|S_n(x,\Phi)|=+\infty$. Al contempo facendo uso della 3) si avrà $\overline{\lim}_{n\to\infty}|S_n(x,F)|<\infty$.

Dunque dobbiamo analizzare le quantità $S_{p_x}(x,\Phi)-\Phi(x)$ e $S_{p_x}(x,F)-F(x)$. Riscriviamo la prima come $S_{p_x}(x,\Phi)-\Phi(x)=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{S_{p_x}(x,\varphi_{n_j})}{\sqrt{\ln n_j}}-\Phi(x)+\frac{S_{p_x}(x,\varphi_{n_k})}{\sqrt{\ln n_k}}+\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{S_{p_x}(x,\varphi_{n_j})}{\sqrt{\ln n_j}}$. Per scrivere due dei quattro termini è necessario scambiare il limite $j\to+\infty$ di $\sum_{k=1}^{n_j}\frac{\varphi_{n_k}(x)}{\sqrt{\ln n_k}}$ con l'integrale $\int_0^{2\pi}$ e questo è possibile grazie a teorema di Lebesgue (pag. 297 di [Kol]).
Iniziamo a considerare $\sum_{j=1}^{k-1}\frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\sqrt{\ln n_j}}-\Phi(x)=\sum_{j=1}^{k-1}(\frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\sqrt{\ln n_j}}-\frac{\varphi_{n_j}}{\sqrt{\ln n_j}})+$

$+(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_j}}{\sqrt{\ln n_j}}-\Phi(x))$ e la quantità analoga per la funzione F : $\sum_{j=1}^{k-1}\frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j}-F(x)=$ $\sum_{j=1}^{k-1}(\frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j}-\frac{\varphi_{n_j}}{\ln n_j})+(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_j}}{\ln n_j}-F(x))$
Sia M l'insieme dei valori di x per cui le serie scritte all'inizio per $\Phi(x)$ e $F(x)$ convergono a valori

finiti. $\forall\ \eta > 0\ \exists\ k_{\eta,x}\ :\ k \geq k_{\eta,x}\ \Rightarrow\ |\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}}\varphi_{n_j}(x) - \Phi(x)| < \eta$ e $|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln n_j}\varphi_{n_j}(x) - F(x)| < \eta$. Dal Teorema di Levi si ha $\mu(M) = 2\pi$

Essendo φ_{n_i} a variazione limitata, la successione, $\{S_n(x,\varphi_{n_i})\}_{n=1}^{\infty}$ converge a φ_{n_i} q.o. grazie al teorema 12.2.2 (a parte i punti di discontinuità della funzione φ_{n_i}). Dal teorema di Yegorov (vedi [Kol] pag.282) abbiamo che $\forall\ \delta_{n_i} > 0\ \exists\ E_{\delta_{n_i}} \subset [0,2\pi]\ :\ \mu(E_{\delta_{n_i}}) > 2\pi - \delta_{n_i}\ \wedge\ \{S_n(x,\varphi_{n_i})\} \to \varphi_{n_i}$ *uniformemente in* $E_{\delta_{n_i}}$ e quindi $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ p_{\varepsilon,n_i}\ : n > p_{\varepsilon,n_i}\ \Rightarrow\ |S_p(x,\varphi_{n_i}) - \varphi_{n_i}| < \varepsilon$. Sia ora $n_1 = 1$ e $q_1 = 1$. Applicando il Teorema esiste l'insieme P_2 tale che $\mu(P_2) \geq 2\pi - \delta_{n_1}2\pi - \frac{1}{2}$ per $\delta_{n_1} = \frac{1}{2}$ ed in P_2 $S_n(x,\varphi_{n_1})$ converge a φ_{n_1} uniformemente ossia $|S_p(x,\varphi_{n_1}) - \varphi_{n_1}| < \frac{1}{2}$ non appena $p > \tilde{p}_1$ e $x \in P_2$. All'interno di P_2 troviamo l'insieme P_3 per cui $\mu(P_3) > \mu(P_2) - \delta_{n_2} > 2\pi - \delta_{n_1} - \delta_{n_2}$ ed in P_3 $S_n(x,\varphi_{n_2})$ converge a φ_{n_2} uniformemente e quindi $|S_P(x,\varphi_{n_i}) - \varphi_{n_i}| < \frac{1}{3}$ per $i = 1,2$ e $P > \tilde{P}_{1,2}$. Proseguendo sulla stessa falsariga arriviamo all'insieme P_k tale che $\mu(P_k) > 2\pi - \frac{1}{k}$ e per $p > \tilde{p}_{1,2,\ldots,k-1}$ si ha $\sup_{x\in P_k}|S_P(x,\varphi_{n_i}) - \varphi_{n_i}| < \frac{1}{k}$ con $i = 1,2,\ldots k-1$. Sia $q_k > \max\{q_{k-1},\tilde{p}_{1,2,\ldots,k-1}\}$. Dopo scegliamo n_k in modo che $\sqrt{\ln n_k} \geq 2^k q_k$

Sia $P = \underline{\lim}_{k\to+\infty} P_k \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{N=1}^{\infty}\cap_{k=N}^{\infty} P_k$. Si ha $\mu(P) = 2\pi$. Infatti $P^c = \cap_{N=1}^{\infty}\cup_{k=N}^{\infty} P_k^c$ e quindi $\mu(P^c) \leq \mu(\cup_{k=N}^{\infty}P_k^c)$ per ogni $N \geq 1$ e quindi $\mu(P^c) \leq \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k}$ che tende a zero per $N \to +\infty$. Se $x_o \in P\ \Rightarrow\ x \in P_k$ per tutti i $k \geq k'_x$ da cui discende che $|S_p(x_o,\varphi_{n_i}) - \varphi_{n_i}(x_o)| < \frac{1}{k}$ per $p \geq q_k$ e $i = 1,2,\ldots,k-1$ e quindi $|\sum_{j=1}^{k-1}\big(\frac{1}{\sqrt{\ln n_j}}S_p(x,\varphi_{n_j}) - \frac{1}{\sqrt{\ln n_j}}\varphi_{n_j}(x)\big)| < \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{\ln n_j}} < \frac{1}{k}$ poiché dalla scelta fatta per n_k abbiamo $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Se $\tilde{E} \stackrel{\text{def}}{=} P \cap M$ allora $x \in \tilde{E}$ implica $|\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{\ln n_j}}S_p(x,\varphi_{n_j}) - \Phi(x)| < \eta + \frac{1}{k}$ se $p \geq q_k$, $x \in E$ e $k \geq \max\{k_{\eta,x}, k'_x\}$. Analogamente si ha $|\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\ln n_j}S_p(x,\varphi_{n_j}) - F(x)| < \eta + \frac{1}{k}$ se $p \geq q_k$, $x \in E$ e $k \geq \max\{k_{\eta,x}, k'_x\}$.

Stimiamo ora il contributo $|S_{p_x}(x,\varphi_{n_k})|$. Nella 4) del lemma **12.?.1** prendiamo un dato valore $\varepsilon > 0$ con l'idea di poter ripetere il ragionamento che segue per ogni numero ε positivo. Ad ε corrisponde α_ε e N_ε. Per $n > N_\varepsilon$ abbiamo gli insiemi $\mathcal{E}_n$ con le caratteristiche scritte nel lemma. Sia $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{k\to+\infty}\mathcal{E}_{n_k} = \cap_{N=1}^{\infty}\cup_{k=N}^{\infty}\mathcal{E}_{n_k}$. $\mu(\mathcal{E}) = \lim_{N\to+\infty}\mu(\cup_{k=N}^{\infty}\mathcal{E}_{n_k})$ e $\mu(\cup_{k=N}^{\infty}\mathcal{E}_{n_k}) > 2\pi - \varepsilon$ per ogni N sufficientemente grande da cui $\mu(\mathcal{E}) > 2\pi - \varepsilon$. Inoltre nell'insieme $\mathcal{E}$ vi sono quei punti che appartengono ad infiniti $\mathcal{E}_n$. Definiamo l'insieme $E = \mathcal{E}\cap P\cap M$ da cui $\mu(E) > 2\pi - \varepsilon$. Se $x \in \mathcal{E}$ allora $x \in \mathcal{E}_{n_k}$ per infiniti valori n_k ed esiste p_x, $n_k \leq p_x \leq m_{n_k}$, tale che $|S_{p_x}(x,\varphi_{n_k})| > \alpha\ln n_k$

Da ultimo è rimasto $\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{S_{p_x}(x,\varphi_{n_j})}{\sqrt{\ln n_j}}$. Sappiamo che $|S_{p_x}(x,\varphi_{n_j})| \leq (p_x+1)\int_0^{2\pi}\varphi_{n_j}dt = 2(p_x+1) < 4p_x \leq 4m_k$. Scegliendo i numeri $\{n_k\}$ in modo che $\sqrt{\ln n_k} \geq 2^k q_k$ abbiamo che $|\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n_j}}S_{p_x}(x,\varphi_{n_j})| \leq 4m_k\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n_k}} \leq 4\sum_{j=k+1}^{\infty}2^{-j} = 2^{-k+2}$. Dunque alla fine si ottiene $|S_{p_x}(x,\Phi) - \Phi(x)| \geq \alpha\sqrt{\ln n_k} - \eta - \frac{1}{k} - 2^{-k+2} \geq \alpha\sqrt{\ln n_k} - \frac{\eta}{2}$. Poiché $x \in \mathcal{E}\ \Rightarrow\ x \in \mathcal{E}_{n_k}$ per una infinità di k e $p_x \geq n_k$ ne segue che $\overline{\lim}_{n\to\infty}|S_n(x,\Phi)| = +\infty$. Da ciò segue la divergenza di $\sigma(\Phi)$ in E con $\mu(E) > 2\pi - \varepsilon$. Il ragionamento può ripetersi per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi si ha divergenza quasi ovunque con in più la non limitatezza delle somme parziali di Fourier.

Il ragionamento si può ora ripetere per la quantità $S_{p_x}(x,F) - F(x) = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{S_{p_x}(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j} - F(x) + \frac{S_{p_x}(x,\varphi_{n_k})}{\ln n_k} + \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{S_{p_x}(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j}$ e minorarla come $|S_{p_x}(x,F) - F(x)| \geq \alpha - \eta - \frac{1}{k} - 2^{-k+2} > \frac{\alpha}{3}$ se prendiamo $\eta < \frac{\alpha}{3}$ e k così grande che $\frac{2}{k} < \frac{\alpha}{3}$.

Dimostriamo ora che $\overline{\lim}_{n\to\infty}|S_n(x,F)| < +\infty$ quasi ovunque. Sia $H \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim}_{k\to+\infty}H_{n_k}$. $\mu(H) = 2\pi$ deriva dal fatto che $\lim_{k\to+\infty}\mu(H_k^c) = 0$ e quindi scegliendo la successione $\{n_k\}$ che va all'infinito in modo sufficientemente rapido. Sia $E^* \stackrel{\text{def}}{=} H \cap P \cap M$ e sia $x \in E^*$. Sia inoltre p un intero tale che $q_k \leq p < q_{k+1}$; $|S_p(x,F)| \leq |\sum_{j=1}^{k-1}\frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j}| + |\frac{S_p(x,\varphi_{n_k})}{\ln n_k}| + |\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j}|$

Sappiamo che per $x \in P \cap M$ si ha $|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j}| \leq F(x) + \eta + \frac{1}{k}$. Dalla condizione 3) del lemma fondamentale si ha $|\frac{S_p(x,\varphi_{n_k})}{\ln n_k}| \leq A$ per $x \in H_{n_k}$ e questo è vero anche per $x \in E^*$ se n_k è sufficientemente grande. Poi abbiamo $|\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{S_p(x,\varphi_{n_j})}{\ln n_j}| \leq 4q_{k+1}\sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j}q_j^{-1} < 2^{-k+2}$ poiché $q_j \geq q_{k+1}$ per $j \geq k+1$. Riunendo il tutto si ha $|S_p(x,F)| \leq F(x) + \eta + A + 2^{-k+2}$ per $p \geq p_o(x)$ e $x \in E^*$.■

12.?? Un esempio di serie di Fourier, dovuto a G.H.Hardy, di funzione sommabile in $[0,2\pi]$ che diverge quasi ovunque [(3.12.??)]

Lemma 12.??.1 *Esiste una successione di polinomi trigonometrici $\{T_n(x)\}$ che verifica le seguenti proprietà : a) $T_n \geq 0$, b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx T_n(x) = 1$, c) $\forall\ T_n\ \exists\ E_n \subset [-\pi,\pi]$, $\mu(E_n) \to 2\pi$ per $n \to +\infty$: $\forall\ x \in E_n\ \exists\ k_x$: $|S_{k_x}(x,T_n)| > M_n$ e $M_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$*

Dimostrazione Come prima prendiamo $A_j = \frac{4\pi j}{2n+1}$ $0 \leq j \leq n$ e sia $m_o, m_1, m_2, \ldots, m_n$ dove $2m_j+1$ è divisibile per $2n+1$ ed inoltre $m_o \geq n^4$, $m_{j+1} \geq 2m_j$. Sia $T_n(x) = \frac{1}{n+1}(F_{m_o}(x-A_o) + F_{m_1}(x-A_1) + \ldots + F_{m_n}(x-A_n))$. $F_k(x)$ è il *nucleo di Fejér* ed è definito da $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)$ dove $D_k(x)$ è il nucleo di Dirichlet. È evidente la proprietà a). Con pochi calcoli si arriva alla espressione $F_k(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$ da cui la b).

Sia ora $m_{j_o} \leq k \leq m_{j_o+1}$
$S_k(x,T_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt T_n(t) D_k(t-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=0}^{m_j}(\frac{1}{2} + \cos(t-A_j) + \ldots + \cos l_j(t-A_j))(\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \ldots \cos k(t-x))$ e moltiplicando otteniamo (a meno di termini contenenti coseni il cui integrale è nullo)
$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=0}^{m_j}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt(\frac{1}{4} + \sum_{r_j=1}^{l_j}\sum_{p=1}^{k}\cos r_j(t-A_j)\cos p(t-x))$. Consideriamo dapprima il caso in cui $j \leq j_o$. Si ha $r_j \leq l_j \leq m_j \leq m_{j_o}$ ed inoltre $l_j \leq k$. Il relativo contributo è $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{j_o}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=0}^{m_j}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\sum_{r_j=1}^{l_j}\sum_{p=1}^{k}(\frac{1}{4} + \cos r_j(t-A_j)\cos p(t-x))$ che è uguale a
$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{j_o}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=0}^{m_j}(\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{l_j}\cos p(x-A_j)) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{j_o}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=0}^{m_j} D_{l_j}(x-A_j) =$
$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{j_o} F_{m_j}(x-A_j)$

Il secondo contributo, sempre a meno di termini che integrati danno zero è
$\frac{1}{n+1}\sum_{j=j_0+1}^{n}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=0}^{m_j}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\sum_{r_j=1}^{l_j}\sum_{p=1}^{k}(\frac{1}{4} + \cos r_j(t-A_j)\cos p(t-x)) =$
$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=j_0+1}^{n}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=0}^{k}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\sum_{r_j=1}^{l_j}\sum_{p=1}^{l_j}(\frac{1}{4} + \cos r_j(t-A_j)\cos p(t-x)) +$
$+ \frac{1}{n+1}\sum_{j=j_0+1}^{n}\frac{1}{m_j+1}\sum_{l_j=k+1}^{m_j}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\sum_{r_j=1}^{k}\sum_{p=1}^{k}(\frac{1}{4} + \cos r_j(t-A_j)\cos p(t-x)) =$
$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=j_0+1}^{n}\frac{1}{m_j+1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l_j=1}^{k}\sum_{p=1}^{l_j}\cos p(x-A_j) + \sum_{l_j=k+1}^{m_j}\sum_{p=1}^{k}\cos p(x-A_j)\right)$ e
$\sum_{l_j=1}^{k}\sum_{p=1}^{l_j}\cos p(x-A_j) + \sum_{l_j=k+1}^{m_j}\sum_{p=1}^{k}\cos p(x-A_j) = \sum_{r=1}^{k}\cos r(x-A_j)(m_j-r+1)$ da cui segue che
$S_k(x,T_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{j_0} F_{m_j}(x-A_j) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=j_0+1}^{n}\frac{1}{m_j+1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{k}\cos r(x-A_j)(m_j-r+1)\right)$;
$\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{k}\cos r(x-A_j)\frac{(m_j-r+1)}{m_j+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{k+1}{m_j+1}\sum_{r=1}^{k}\frac{k+1-r}{k+1}\cos r(x-A_j) + \frac{m_j-k}{m_j+1}\sum_{r=1}^{k}\cos r(x-A_j) = \frac{1}{2} + \frac{k+1}{m_j+1}(F_k(x-A_j) - \frac{1}{2}) + \frac{m_j-k}{m_j+1}\sum_{r=1}^{k}\cos r(x-A_j)$ da cui
$S_k(x,T_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{j_0} F_{m_j}(x-A_j) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=j_0+1}^{n}\left(\frac{k+1}{m_j+1}F_k(x-A_j) + \frac{m_j-k}{m_j+1}D_k(x-A_j)\right) \doteq S_1 + S_2 + S_3$

(3.12.??) G.H.Hardy, W.W.Rogosinski: *Fourier Series,* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, General Editors W.V.D.Hodge, M.A. N.38 Cambridge University Press, second edition 1950 pp.1–100, W.W.Rogosinski: *Fourier Series* , Chelsea Publishing Company, 1959

Sia ora $k = m_{j_0}$ e $S_{m_{j_0}}(x,T_n)$ nell'intervallo $I_{j_0} = (A_{j_0} + \frac{1}{n^2}, A_{j_0+1} - \frac{1}{n^2})$. Se $x \in I_{j_0}$ allora per ogni p si ha $|x - A_p| \geq \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{\sqrt{m_l}}$ poiché prendiamo $n^4 \leq m_0$. Ciò vuol dire che $F_{m_p}(x - A_p) = O(\frac{1}{m_p|x-A_p|^2}) = O(1)$. Inoltre per $j \geq j_0 + 1$ si ha $\frac{k+1}{m_j+1} \leq \frac{m_{j_0}+1}{m_j+1} \leq 1$ e quindi $|S_1| + |S_2| \leq H$ con $x \in I_{j_0}$.

Dobbiamo ora stimare S_3.
Tenendo conto della definizione di A_p si ha $D_{m_{j_0}}(x - A_p) = \frac{\sin(m_{j_0}+\frac{1}{2})\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x-A_p}{2}} = -\frac{\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{A_p-x}{2}}$ ossia $S_3 = -\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}\frac{1}{n+1}\sum_{p=j_0+1}^n \frac{m_p-m_{j_0}}{m_p+1}\frac{1}{2\sin\frac{A_p-x}{2}}$ da cui $|S_3| = |\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}|\frac{1}{n+1}\times$ $\times\sum_{p=j_0+1}^n \frac{m_p-m_{j_0}}{m_p+1}\frac{1}{A_p-x} \geq |\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}|\frac{1}{n+1}\sum_{p=j_0+1}^n \frac{m_p-m_{j_0}}{m_p+1}\frac{1}{A_p-A_{j_0}}$. Essendo $\frac{1}{A_p-A_{j_0}} = \frac{2n+1}{4\pi(p-j_0)}$ e $\frac{m_p-m_{j_0}}{m_p+1} \geq \frac{1}{2}$ per $p \geq j_0+1$ otteniamo $|S_3| \geq |\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}|\frac{2n+1}{8\pi(n+1)}\sum_{p=j_0+1}^n \frac{1}{p-j_0} \geq \frac{1}{8\pi}\ln(n-j_0)|\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}|$ Sia ora $j_0 \leq n - \sqrt{n}$ e quindi $|S_3| \geq \frac{1}{8\pi}\ln n|\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}|$ e sia $E_n = \{x \in I_{j_0} : j_0 \leq n - \sqrt{n}, |\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}| \geq \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\}$. Abbiamo quindi $|S_3| \geq \frac{1}{8\pi}\sqrt{\ln n}$ e quindi $|S_{m_{j_0}}(x,T_n)| \geq \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - H$. La somma degli intervalli I_{j_0} con $j_0 \leq n - \sqrt{n}$ è dell'ordine $(n-\sqrt{n})(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n^2}) \to 2\pi$ per $n \to +\infty$. Si dovrebbero togliere quei punti in cui $|\sin(2m_{j_0}+1)\frac{x}{2}| < \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ ma tali punti hanno misura maggiorabile con $4\arcsin\frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ e quindi $\mu(E_n) \to 2\pi$ per $n \to +\infty$ ∎

Riscriviamo in forma complessa i polinomi di prima (che ricordiamo per costruzione erano positivi) $T_{n_k}(x) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{\nu=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} C_\nu^{(k)} e^{i\nu x}$ dove $\nu_k > \nu_{k-1} + m_{n_{k-1}} + m_{n_k}$ e successivamente il polinomio $P_{n_k}(x) \stackrel{\rm def}{=} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\sum_{\nu=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} C_\nu^{(k)} e^{i(\nu+\nu_k)x}$

Teorema 12.??.1 *La serie di Fourier della funzione* $F(x) = \sum_{k=1}^\infty P_{n_k}(x)$ *diverge q.o. in* $[0,2\pi]$

La scelta dei ν_k è tale che se $l < k$ allora in T_{n_k} e T_{n_l} non vi sono esponenziali aventi lo stesso esponente in quanto $\nu_l + m_{n_l} \leq \nu_{k-1} + m_{n_{k-1}}$. A maggior ragione sarà vero nei polinomi P_{ν_l} e P_{ν_k}. $\int_0^{2\pi} dx|P_{n_k}(x)| = \int_0^{2\pi} dx\Big[\frac{e^{i\nu_k x}}{\sqrt{M_{n_k}}}T_{n_k}(x)\cdot\frac{e^{-i\nu_k x}}{\sqrt{M_{n_k}}}T_{n_k}(x)\Big]^{1/2} = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{M_{n_k}}}T_{n_k}(x) = \frac{\pi}{\sqrt{M_{n_k}}}$. Ne consegue che $\sum_{k=1}^\infty\int_0^{2\pi} dx|P_{n_k}(x)| < \infty$ e quindi q.o. può definirsi la funzione $F(x) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{k=1}^\infty P_{n_k}(x) = f(x) + ig(x)$ dove $f(x)$ e $g(x)$ sono evidentemente la parte reale ed immaginaria di $F(x)$. $F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\gamma_\nu e^{i\nu k}$ e $\gamma_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dxF(x)e^{-i\nu x}$. Per ogni p intero $S_p(x,T_n)$ è parte di $T_n(x)$ essendo entrambe polinomi trigonometrici. Sia $\overline{\lim}_{k\to+\infty}E_{n_k} \stackrel{\rm def}{=} \cap_{k=1}^\infty \cup_{j=k}^\infty E_{n_j}$ e quindi x appartiene ad infiniti E_{n_k} per infiniti k. In base al Lemma, per ognuno di questi k si ha $|S_{p_x}(x,T_{n_k})| > M_{n_k}$ e questo implica che esistono interi α_k e β_k per cui $|\sum_{\alpha_k}^{\beta_k}\gamma_k e^{i\nu k}| > \sqrt{M_{n_k}}$ ossia la serie diverge q.o. D'altra parte vi è un teorema che implica la convergenza della parte reale se si ha la convergenza della parte immaginaria e viceversa. Quindi la parte reale non può che divergere.

12.???Un esempio, dovuto a Kolmogorov, di funzione sommabile in $[0,2\pi]$ e la cui serie di Fourier diverge ovunque (3.12.???)

Come al solito ci vuole un Lemma

Lemma 1.12.??? *Esiste una successione di polinomi trigonometrici* $\{f_n\}$ *definiti in* $[0,2\pi]$ *tali*

(3.12.???) 1) A.N.Kolmogorov: *Une série de Fourier divergente partout,* Comptes rendus de l'Acadeémie des Sciencies á Paris, **183** 1926 pp.1327–1329 *che* *a)* $f_n \geq 0$, *b)* $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx f_n(x) = 1$, *c) Se* ν_n *è l'ordine del polinomio* f_n *allora si possono trovare dei numeri* $\lambda_n \to +\infty$, *e dei numeri* $M_n \to +\infty$, *insiemi* E_n *tali che* $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$, $[0, 2\pi] = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, $\forall\, x \in E_n\ \exists\ k_x \in \mathbf{N}:\ \lambda_n \leq k_x \leq \nu_n\ \wedge\ S_{k_x}(x, f_n) > M_n$

Dimostrazione Sia $A_l = \frac{2\pi}{n} l$ e $l = 0, 1, 2, \ldots, n$, $T_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n F_{m_i}(x - A_i)$. Assumiamo $m_{j+1} > 2m_j$ $j = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Se $m_j \leq k \leq \frac{1}{2} m_{j+1}$ allora (vedi **Lemma 12.??.1** $S_k(x, T_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^j F_{m_i}(x - A_l) + \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^n \frac{k+1}{m_l+1} F_k(x - A_l) + \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^n \frac{m_l - k}{m_l+1} D_k(x - A_l) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^n \frac{m_l-k}{m_l+1} D_k(x - A_l)$ essendo i nuclei di Fejér non negativi. Inoltre essendo $D_k(y) = \frac{\sin ky}{y} + \varphi_k(t)$ e $\|\varphi_k\|_\infty < C\ \forall\ k$, abbiamo $S_k(x, T_n) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^n \frac{m_l-k}{m_l+1}\frac{\sin k(x-A_l)}{x-A_l} - O(1)$. Assumendo $k = \rho n$ $\rho \in \mathbf{N}$ si ha $\sin k(x - A_l) = \sin kx$ e quindi $\sum_{l=j+1}^n \frac{m_l-k}{m_l+1}\frac{\sin k(x-A_l)}{x-A_l} = -\sin kx \sum_{l=j+1}^n \frac{m_l-k}{m_l+1}\frac{1}{A_l - x}$. Sia $I_l \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{\pi}{n} l - \delta, \frac{\pi}{n} l + \delta)$, $l = 0, 1, , \ldots, 2n$, $\sigma_l \stackrel{\text{def}}{=} [\frac{\pi}{n} l + \delta, (l+1)\frac{\pi}{n} - \delta]$, $l = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Sia $x \in \sigma_{2j}\ \vee\ \sigma_{2j+1}$ e quindi $x \leq \frac{\pi}{n}(2j+2) - \delta \doteq A_{j+1} - \delta$. Ne segue che $A_l - x > 0$ per ogni $l \geq j+1$ ed inoltre abbiamo $\frac{m_l - k}{m_l + 1} = \frac{1 - \frac{k}{m_k}}{1 + \frac{1}{m_l}} > \frac{1}{4}$ essendo $k < \frac{1}{2} m_{j+1}$ e $\frac{m_l-k}{m_l+1} > \frac{1 - \frac{m_{j+1}}{2m_l}}{1 + \frac{1}{m_l}} > \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$. Dunque se per le x considerate esiste un valore intero k_x tale che $-\sin k_x x \geq \frac{1}{2}$, possiamo stimare $S_{k_x}(x, T_n) \geq \frac{1}{8(n+1)}\sum_{l=j+1}^n \frac{1}{A_l - x} - O(1)$ e $A_l - x > 0$ in quanto $x < A_{j+1} - \delta$ e $l \geq j+1$. Essendo inoltre $x \in \sigma_{2j}$ abbiamo $x \geq A_j$ e quindi $S_{k_x}(x, T_n) \geq \frac{1}{8(n+1)}\sum_{l=j+1}^n \frac{1}{A_l - A_j} - O(1) = \frac{n}{16\pi(n+1)}\sum_{l=j+1}^n \frac{1}{l-j} - O(1) > \frac{1}{32\pi}\sum_{r=1}^{n-j}\frac{1}{r} - O(1) \geq C\ln(n-j) \geq C_1 \ln n$ se $j \leq n - \sqrt{n}$.

Ricapitoliamo il risultato parziale a cui siamo giunti. Se per ogni $x \in \sigma_{2j} \cup \sigma_{2j+1}$, $j \leq n - \sqrt{n}$ esiste k_x multiplo di n che soddisfa le condizioni: i) $m_j \leq k_x \leq \frac{1}{2} m_{j+1}$, ii) k_x divisibile per n, iii) $-\sin k_x x \geq \frac{1}{2}$ allora è vera la stima $S_{k_x}(x, T_n) \geq C_1 \ln n$.

Sia ora $\tau_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_n(2nx) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n D_j(2nx) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n (\frac{1}{2} + \cos 2nx + \ldots + \cos 2n^2 x)$. $\tau(l\frac{\pi}{n}) = F(0) = \frac{n}{2}$; $|F'(x)| \leq n^2$ per ogni x da cui $|\tau'(x)| < 2n^3$. Assumendo $\delta = \frac{1}{8n^4}$ si ottiene che $x \in I_l \ \Rightarrow\ |\tau_n(x) - \tau_n(\frac{\pi}{n} l)| < 2\delta n^3 \leq \frac{1}{n}$ da cui $\tau_n(x) > \frac{n}{2} - \frac{1}{n}$ per $x \in I_l$ e quindi $\tau_n(x) > \frac{n}{4}$ con $l = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. Assumiamo ora che $m_o = 2n^2$. Dalla relazione $|D'_{m_o}(x)| \leq m_o^2$ e $D_{m_o}(0) = \frac{1}{2} + m_o$ segue che $|x| \leq \delta \ \Rightarrow\ |D_{m_o}(x) - D_{m_o}(0)| \leq \delta m_o^2 < \frac{4n^4}{8n^4} = \frac{1}{2}$ da cui $D_{m_o}(x) > 1$ per $|x| \leq \delta$.

Sia ora $f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(T_n(x) + \tau_n(x))$ ed i numeri $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ sono ancora da definire. $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx f_n(x) = 1$; l'ordine del polinomio $f_n(x)$ è m_n in quanto è l'ordine di $T_n(x)$ e l'ordine di $\tau_n(x)$ è $2n^2 = m_o < m_n$. Supponendo quindi che $\lambda_n = m_o = 2n^2$ e $\nu_m = m_n$ vediamo che se k_x soddisfa la condizione $m_j \leq k_x \leq \frac{1}{2} m_{j+1}$ allora $\lambda_n \leq k_x \leq \nu_n$. Poiché $k_x \geq \lambda_n = m_o$ e l'ordine di $\tau_n(x)$ è m_o allora $S_{k_x}(x, \tau_n) \equiv \tau_n(x)$ da cui $S_{k_x}(x, f_n) = \frac{1}{2} S_{k_x}(x, T_n) + \frac{1}{2}\tau_n(x) \geq \frac{1}{2} S_{k_x}(x, T_n) \geq \frac{C_1}{2}\ln n$ essendo $\tau_n(x) \geq 0$. Quindi abbiamo ottenuto che se $x \in \sigma_{2j} \vee\ \sigma_{2j+1}$ e $j \leq n - \sqrt{n}$ allora $S_{k_x}(x, f_n) \geq C_1 \ln n$ (sempre che si possano soddisfare le condizioni i)–iii) scritte prima).

Quello che ancora manca è una stima del tipo $S_{k_x}(x, f_n) \geq C_1 \ln n$ anche quando $x \in I_l$ ed è bene notare che se $x \in \sigma_{2j} \cup \sigma_{2j+1}$, $\tau_n(x)$ non gioca alcun ruolo se non quello di essere una quantità non negativa.

Dimostriamo ora che per $x \in I_l$, $l = 0, 1, \ldots, 2n$, abbiamo $S_{m_o}(x, f_n) > C\ln n$. Poniamo $j = 0$, e $k = m_o$ nella formula $S_k(x, T_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^j F_{m_i}(x - A_l) + \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^n \frac{k+1}{m_l+1} F_k(x - A_l) + \frac{1}{n+1}\sum_{l=j+1}^n \frac{m_l-k}{m_l+1} D_k(x - A_l)$ ed otteniamo $S_k(x, T_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^n \frac{m_o+1}{m_l+1} F_{m_o}(x - A_l) + \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^n \frac{m_l - m_o}{m_l+1} D_{m_o}(x - A_l) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^n \frac{m_l - m_o}{m_l+1} D_{m_o}(x - A_l)$. Sia $x \in I_p$ e quindi $p\frac{\pi}{n} - \delta \leq x \leq p\frac{\pi}{n} + \delta$. Se $p = 2j$ allora $p\frac{\pi}{n} = A_j$ e quindi $|x - A_j| < \delta$. Essendo $D_{m_o}(x) > 1$ per $|x| < \delta$ si ha

$S_{m_o}(x,T_n) \geq \frac{1}{n+1}\sum_{l=1\,l\neq j}^{n} \frac{m_l-m_o}{1+m_l} D_{m_o}(x-A_l) \geq -\frac{1}{n+1}\sum_{l=1\,l\neq j}^{n} |D_{m_o}(x-A_l)|$. Dalla relazione $|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{|x|}$ abbiamo $S_{m_o}(x,T_n) \geq -\frac{\pi}{n+1}\sum_{l=1\,l\neq j}^{n} \frac{1}{|x-A_l|}$ e poiché $x - A_j = O(\frac{1}{n^4})$ si ha $S_{m_o}(x,T_n) \geq -\frac{C_3}{n+1}\sum_{l=1\,l\neq j}^{n} |2j\frac{\pi}{n} - l\frac{2\pi}{n}|^{-1} = -C_4\sum_{l=1\,l\neq j}^{n} |j-l|^{-1} > -C_5 \ln n$. Se $p = 2j+1$ si rifanno gli stessi conti senza neanche togliere $l = j$ e si ottiene $S_{m_o}(x,T_n) \geq -\frac{\pi}{n+1}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{|x-A_l|} \geq -\frac{C_6}{n+1}\sum_{l=1}^{n} |(2j+1)\frac{\pi}{n} - l\frac{2\pi}{n}|^{-1} \geq -C_7\sum_{l=1}^{n} |2j+1-2l|^{-1} > -C_8 \ln n$. Dunque per ogni $x \in I_p$, $p = 0,1,2,\ldots,2n$, abbiamo $S_{m_o}(x,T_n) > -C_9 \ln n$ e poiché $S_{m_o}(x,\tau_n) = \tau_n(x) > \frac{n}{4}$ (essendo $m_o = 2n^2$ che è l'ordine del polinomio τ_n) per ogni $x \in I_p$ abbiamo $S_{m_o}(x,\tau_n) > \frac{n}{8} - \frac{1}{2}C_9 \ln n > C_{10} \ln n$

Sia ora $E_n \stackrel{\text{def}}{=} [0, \frac{2\pi}{n}(n - \sqrt{n})] \subset E_{n+1}$ e $\cup_{j=1}^{\infty} E_j = [0, 2\pi]$, Se $x \in E_n$ allora $x \in I_p$ oppure $x \in \sigma_p \ \vee \ \sigma_{p+1}$ dove $p = 2j$ e $j \leq n - \sqrt{n}$. Si hanno le due possibilità : 1) $\exists\, k_x :\ S_{k_x}(x,f_n) > C_2 \ln n$, 2) $S_{m_o}(x,f_n) > C \ln n$. In ogni caso $\forall\, x\ \exists\, k_x :\ m_o \leq k_x < m_n \ \wedge\ S_{k_x}(x,f_n) > M_n$ con $M_n \to +\infty$

Dobbiamo dimostrare ora le tre condizioni i)–iii) ossia che se m_o è scelto allora è possibile trovare m_k $k = 1,2,\ldots,n$ tale che: (1) $m_o < m_1 < \ldots < m_n$, (2) per ogni $x \in \sigma_{2j}$ e $x \in \sigma_{2j+1}$ si può trovare un k_x divisibile per n tale che $m_j \leq k_x \leq \frac{1}{2}m_{j+1}$ e $-\sin k_x x \geq \frac{1}{2}$

Dalla definizione di σ_{2j} e σ_{2j+1} segue che se $x \in \sigma_{2j}$ allora $x = x_j + \frac{2\pi\vartheta}{n}$ mentre se $x \in \sigma_{2j+1}$ allora $x = x_{j+1} - \frac{2\pi\vartheta}{n}$ e $\delta \leq \frac{2\pi\vartheta}{n} < \frac{\pi}{n} - \delta$ ossia $\frac{n\delta}{2\pi} \leq \vartheta \leq \frac{1}{2} - \frac{n\delta}{2\pi}$. Sia $\eta = \frac{n\delta}{2\pi} = \frac{1}{16\pi n^3}$ e quindi $\eta \leq \vartheta \leq \frac{1}{2} - \eta$. Supponendo k_x divisibile per n abbiamo $k_x = \rho n$ con ρ intero per cui $-\sin k_x x = -\sin \rho\vartheta 2\pi$ se $x \in \sigma_{2j}$ e $-\sin k_x x = -\sin \rho\vartheta 2\pi$ se $x \in \sigma_{2j+1}$. Dunque con $\eta \leq \sigma \leq \frac{1}{2} - \eta$ bisogna trovare ρ_1 e ρ_2 tali che $\sin 2\pi\rho_1\vartheta \leq -\frac{1}{2}$ e $\sin 2\pi\rho_2\vartheta \geq \frac{1}{2}$ che a loro volta equivalgono a $\frac{1}{12} \leq \{\rho_2\vartheta\} \leq \frac{5}{12}$ e $\frac{7}{12} \leq \{\rho_2\vartheta\} \leq \frac{11}{12}$ ($\{.\}$ è la parte frazionaria).

Consideriamo dapprima il caso in cui $\eta \leq \vartheta \leq \frac{1}{3}$. $\{m\vartheta\} - \{(m-1)\vartheta\} = \{\vartheta\} \in [\eta, \frac{1}{3}]$. Dimostriamo che qualunque sia l'intero N, almeno uno dei valori $N\vartheta, (N+1)\vartheta, \ldots, (N+1+[\frac{1}{\eta}])\vartheta)$ appartiene all'intervallo $[\frac{1}{12}, \frac{5}{12}]$ ed un altro all'intervallo $[\frac{7}{12}, \frac{11}{12}]$. Infatti la lunghezza di ciascun intervallo è esattamente $\frac{1}{3}$ mentre l'intervallo di lunghezza 1 è suddiviso in $\frac{1}{\eta}$ intervalli di lunghezza η e $\frac{1}{\eta} \leq 1 + [\frac{1}{\eta}]$. Quindi nel passaggio da N a $N + 1 + [\frac{1}{\eta}] \stackrel{\text{def}}{=} M$ si percorre certamente tutto l'intervallo di lunghezza 1 e poiché ciascun passo non è più lungo di $\frac{1}{3}$ certamente si entra dentro ciascuno dei due intervalli descritti.

Sia ora $\frac{1}{2} \leq \vartheta \leq \frac{1}{2} - \eta$ ossia $2\eta \leq (1 - 2\vartheta) \leq \frac{1}{3}$. Come prima dobbiamo risolvere $-\sin 2\pi\rho_1(1 - 2\vartheta) \geq \frac{1}{2}$ e $\sin 2\pi\rho_2(1-2\vartheta) \geq \frac{1}{2}$ ossia $\sin 2\pi\rho_1 2\vartheta \geq \frac{1}{2}$ e $-\sin 2\pi\rho_2 2\vartheta \geq \frac{1}{2}$. Possiamo applicare le stesse considerazioni di prima ed ottenere, dato N arbitrario, il valore $2M$.

L'ultimo punto riguarda il valore di m_l. m_o è già stato definito e supponiamo di avere $m_o < m_1 < \ldots < m_j$ e definiamo m_{j+1}. Per avere $k_x \geq m_j$ basta prendere N così grande che $nN \geq m_j$ (infatti $k_x \stackrel{\text{def}}{=} \rho n$ e $\rho \geq N$). Poi scegliamo m_{j+1} così grande da avere $(N+M)n < \frac{1}{2}m_{j+1}$. ∎

Osservazione Come si sarà notato, l'aggiunzione delle funzioni $\tau_n(x)$ ha due effetti: all'interno di $\sigma_{2j} \cup \sigma_{2j+1}$ si considera semplicemente la loro non negatività mentre all'interno di I_l si considera il fatto che $\tau(x)$ è grande più di un logaritmo con il quale infatti deve competere per avere la stima $S_{m_o}(x,\tau_n) > \frac{n}{8} - \frac{1}{2}C_9 \ln n > C_{10} \ln n$.

Possiamo ora formulare il

Teorema 1.12.??? *Esiste una funzione sommabile in* $[0, 2\pi]$ *tale che* $\overline{\lim}_{n\to\infty} |S_n(x,f)| = +\infty$ *per ogni* $x \in [0, 2\pi]$

Dimostrazione Scegliamo una successione $\{n_k\}$ crescente abbastanza rapidamente e sia $f(x) = \sum_{k=1,}^{\infty} \frac{f_{n_k}}{\sqrt{M_{n_k}}}$. Sia la scelta di $\{n_k\}$ tale che $M_{n_k} > 4M_{n_{k-1}}$ in modo da avere $\sum_{k=1}^{\infty} M_{n_k}^{-1/2} < \infty$.

Grazie al teorema di Levi (vedi [Kol] a pag. 298) la serie converge q.o. e definisce una funzione sommabile in $[0,2\pi]$. Siano $\lambda_{n_m} > \nu_{n_m}$ e $\sqrt{M_{n_m}} > \nu_{n_{m-1}}$. $S_{k_x}(x,f) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{k_x}(x,f_{n_j}) + \frac{1}{\sqrt{M_{n_m}}} S_{k_x}(x,f_{n_m}) + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{k_x}(x,f_{n_j})$. Grazie alla c) del **Lemma 1.12.???** si ha $\frac{1}{\sqrt{M_{n_m}}} S_{k_x}(x,f_{n_m}) > \frac{M_{n_m}}{\sqrt{M_{n_m}}} = \sqrt{M_{n_m}}$. Poiché $k_x \geq \lambda_m > \nu_{n_{m-1}}$, k_x è più grande dell'ordine di ciascuna funzione f_{n_j} con $1 \leq j \leq m-1$ e quindi $S_{k_x}(x,f_{n_j}) = f_{n_j}(x)$ per $1 \leq j \leq m-1$. Di conseguenza si ha $\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} f_{n_j} \geq 0$ essendo le funzioni non negative. Per quanto riguarda la seconda sommatoria possiamo scrivere $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{k_x}(x,f_{n_j}) \leq \frac{2k_x+1}{\pi} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} \int_0^{2\pi} dx f_{n_j}(x) \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{2\nu_{n_m}+1}{\sqrt{M_{n_j}}} \leq \frac{3\nu_{n_m}}{\sqrt{M_{n_{m+1}}}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} < 6$ poiché $\sqrt{M_{n_j}} > 2\sqrt{M_{n_{j-1}}}$. Ne segue che $S_{k_x}(x,f) \geq \sqrt{M_{n_m}} - 6$ e quindi $\overline{\lim}_{n\to\infty} |S_n(x,f)| = +\infty$ ∎