§10 Appendice 2: Spazi metrici completi e Teoremi di Baire (Renè Louis, Parigi 1874 – Chambéry 1932) con qualche applicazione (non Banach–Steinhaus)

§10.1 Spazi metrici completi

Per la definizione di spazio metrico completo si può guardare `pag.180` del libro di testo.

Esempi

• l'intervallo $[a,b] \subset \mathbf{R}$ $-\infty \le a < b \le +\infty$ con distanza $d(x,y) = |x-y|$.

La completezza dello spazio metrico $X \stackrel{\text{def}}{=} ([a,b];d)$ è diretta conseguenza della proprietà dell'estremo superiore e la dimostrazione è data nell'esercizio **24.3***.

• L'insieme $(\mathbf{N},d)$, $d(k,n) = |k-n|$. Gli intervalli aperti sono costituiti dagli insiemi $B(n,r) = \{k \in \mathbf{N} \ : \ |k-n| < r\}$ e se $r < 1$ si ha $B(n;r) = n$ chiaramente. Tale insieme è completo. Infatti le successioni di Cauchy sono date dalle successioni definitivamente uguali ad un certo valore intero. Dette successioni convergono e quindi $(\mathbf{N},d)$ è completo.

• Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}$ e sia $A \stackrel{\text{def}}{=} C(K;\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni reali continue definite su K. Sia $X \stackrel{\text{def}}{=} (A;d)$ dove $d(f,g) = \max_{x\in K} |f(x) - g(x)|$. Si può verificare che $d(f,g)$ è una metrica. Si ha la

Proposizione *X è completo* [(1.10.1)]

Dimostrazione Supponiamo di avere una successione $\{f_n\}$ dove $f_n \in A$ e tale che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon \in \mathbf{N}\ : j \ge k_\varepsilon \in \mathbf{N},\ i \ge k_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \Longrightarrow \|f_i - f_j\| < \varepsilon$ ossia la successione è di Cauchy. Vogliamo far vedere che converge ad una funzione $f \in C(K;\mathbf{R})$ da trovare. Dobbiamo in altre parole far vedere che esiste una funzione f *continua* su K tale che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}\ : n \ge n_\varepsilon \Longrightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$. La parte pregnante della dimostrazione è proprio quest'ultima in quanto essa implica che la successione f_n converge *uniformemente* ad f e quindi quest'ultima è una funzione continua.

Il primo passo consiste nel trovare la funzione f. Dato $x_o \in K$ consideriamo la *successione numerica* $\{f_n(x_o)\}$; essendo $|f_i(x_o) - f_j(x_o)| \le \|f_i - f_j\|$ segue che essa è di Cauchy in $\mathbf{R}$. Sapendo che $\mathbf{R}$ è completo la successione $\{f_i(x_o)\}$ converge ad un limite l_{x_o}. Naturalmente il discorso vale per ogni punto di K e quindi possiamo definire una funzione $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Il cuore della dimostrazione è ora far vedere che f è continua su K da cui la convergenza ad un elemento di X.

$\sup_K |f_n(x) - f(x)| = \sup_K |f_n(x) - \lim_{m\to+\infty} f_m(x)| = \sup_K \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \lim_{m\to+\infty} \sup_K |f_n(x) - f_m(x)| \le \sup_{m\ge k_\varepsilon} \sup_K |f_n(x) - f_m(x)| \le \sup_{m\ge k_\varepsilon} \varepsilon = \varepsilon$ ossia $\|f_n - f\| \to 0$ per $n \to +\infty$ [(2.10.1)]

Volendo si può ragionare anche nel seguente modo: dobbiamo dimostrare che per ogni $x_o \in K$ si ha $\forall\ \overline{\varepsilon} > 0\ \exists\ \overline{\delta}_{\overline{\varepsilon},x_o}\ : |x - x_o| < \overline{\delta}_{\overline{\varepsilon},x_o} \Longrightarrow |f(x) - f(x_o)| < \overline{\varepsilon}$. $f(x) - f(x_o) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_o)) + (f_n(x_o) - f(x_o))$ dove $n \ge k_\varepsilon$; sappiamo che $\forall\ \varepsilon' > 0\ \exists\ \delta_{\varepsilon',n}\ :\ |x - x_o| < \delta_{\varepsilon',n} \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_o)| < \varepsilon'$

Ora dato $\overline{\varepsilon} > 0$ prendiamo ε e ε' tale che $2\varepsilon + \varepsilon' < \overline{\varepsilon}$ e conseguentemente per $|x - x_o| < \delta_{\varepsilon',n}$ si ha $|f(x) - f(x_o)| < \overline{\varepsilon}$. Notare che si può prendere $\delta_{\varepsilon',n}$ indipendente da x_o in quanto K è

(1.10.1) Si può verificare che è anche uno spazio normato ossia la funzione $F{:}A\times A \to \mathbf{R}$, $F(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} d(f,g)$ definisce una norma nello spazio A. In ragione di ciò indichiamo $d(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \|f-g\|$.

(2.10.1) Notare che non si è autorizzati a scrivere max in quanto, non sapendo ancora che f è continua, non sappiamo se essa ammette un massimo nell'insieme K.

compatto e quindi le funzioni sono uniformemente continue. Conseguentemente anche $\delta_{\overline{\varepsilon},n}$ non dipende da x_o. ∎

La compattezza del dominio entra esclusivamente nel fatto che date due funzioni continue qualsiasi f e g si ha $\|f-g\|<\infty$. Non così sarebbe nel caso di un insieme aperto. Ad esempio se il dominio fosse $(0,1)$ e considerassimo di nuovo l'insieme delle funzioni continue su di esso, potremmo prendere come f la funzione identicamente nulla e come $g(x)=\frac{1}{x}$ per cui avremmo $\|f-g\|=+\infty$. Se però si prende un insieme aperto e come spazio di funzioni su esso l'insieme delle funzioni *limitate* allora il teorema di completezza appena dimostrato continuerebbe a valere.

• Come esempio di spazio metrico non completo, consideriamo l'insieme numerabile $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ e lo spazio metrico $(\mathbf{Q},d)$, $d(r,s)=|r-s|$.
Ad esempio la successione $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ è di Cauchy ed i suoi elementi appartengono tutti a $\mathbf{Q}$ ma non converge in $\mathbf{Q}$.

• Alla luce delle considerazioni precedenti cosa si può dire dello spazio metrico $(\mathbf{N}\backslash\{0\},d)$ $d(k,n)=\frac{|k-n|}{kn}$?

Dopo aver verificato che d è effettivamente una metrica, se ne conclude che lo spazio non è completo. Infatti la successione $\{n\}$ è di Cauchy ma non converge a nessun elemento di $\mathbf{N}$.

Definizioni
1) Se un insieme si può scrivere come unione numerabile di insiemi chiusi allora allora si dice che è un "F_σ". Ad esempio $Disc(f)$, l'insieme descritto nell'esercizio **4.5*****, *è un F_σ.*
2) Se invece può scriversi come intersezione di aperti allora si dice che è un "G_δ" e chiaramente $Cont(f)$ è un G_δ
3) Uno spazio metrico di prima categoria è uno spazio che può scriversi come unione numerabile di insiemi ciascuno dei quali è non denso in alcun punto ossia se $(X;d)$ è lo spazio metrico allora $X=\cup_{k=1}^{\infty}F_k$ e $\overset{\circ}{\overline{F_k}}=\emptyset$. Ad esempio $\mathbf{Q}$ è di prima categoria. Qualsiasi insieme numerabile i cui elementi sono dati da singoli punti, è di prima categoria. Dimostreremo ad esempio (vedi il **Teorema 3.10.1***) che l'insieme dei punti di discontinuità della derivata di una qualsiasi funzione, insieme che verrà descritto come $Disc(f')$, è un F_σ e di prima categoria.*
4) Uno spazio metrico di seconda categoria è uno spazio metrico che non può essere scritto come unione numerabile di insiemi non densi in alcun punto (ossia non è di prima categoria)
5) Un insieme è detto residuale se contiene l'intersezione numerabile di aperti densi.
6) Sia dato un insieme $A\subset B$. Diremo che A è ovunque denso in B se $\overline{A}=B$ che è come dire che A è denso in ogni punto di B

• Ad esempio l'insieme degli irrazionali di $\mathbf{R}$ è un insieme residuale. Infatti dato $\mathbf{Q}$, definiamo $A_r\overset{\text{def}}{=}\mathbf{R}\backslash\{r\}$ e quindi $\cap_{r\in\mathbf{Q}}A_r=\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$. Del resto si ha $\overline{A}_r=\mathbf{R}$ e $\overset{\circ}{A}_r=A_r$ ossia gli A_r sono aperti e densi da cui la tesi.

• Un intervallo chiuso $[a,b]$ è un F_σ essendo lui stesso chiuso ed è anche un G_δ essendo uguale all'intersezione di intervalli aperti che lo contengono al loro interno. Non è un insieme di prima categoria

• Un intervallo aperto (a,b) è un G_δ ed un F_σ in quanto è uguale all'unione di intervalli aperti contenuti in (a,b). Anche in questo caso non è di prima categoria.

• L'insieme dei razionali $\mathbf{Q}$ è un F_σ e di prima categoria in quanto lo si può scrivere come $\mathbf{Q}=\cup_{\{r\}}\{r\}$ e ciascun punto è contemporaneamente un insieme chiuso e non denso in alcun punto. D'altro canto $\mathbf{Q}$, preso tutto assieme è denso ossia $\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$.

• L'insieme di Cantor F (ternario o no) le cui proprietà salienti sono state enunciate nella **Appendice 1**, è di prima categoria. Inoltre la sua funzione caratteristica $\mathcal{X}_F(x) = \begin{cases} 1 & x \in F \\ 0 & x \in F^c \end{cases}$ è continua su F^c e discontinua su F (questo è in accordo con l'esercizio **4.5*****).

Teorema 1.10.1 *È ovunque denso il complementare di un sottoinsieme di uno spazio metrico non denso in alcun punto*

Dimostrazione L'ipotesi è quella di avere un sottoinsieme U di uno spazio metrico che è non denso in alcun punto. Se $U \subset X$ e $\overset{\circ}{\overline{U}} = \emptyset$ allora $\overline{X \backslash U} = X \backslash \overset{\circ}{U} \supset X \backslash \overset{\circ}{\overline{U}} = X$ da cui la tesi. ∎

• È vero il teorema inverso al precedente? Ossia Supponiamo di avere un sottoinsieme U di uno spazio metrico X tale che $\overline{U} = X$. È vero che U^c è non denso in alcun punto? La risposta è in generale no. Si prenda ad esempio $X = \mathbf{R}$ e $U = \mathbf{Q}$. Allora $U^c = \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ (gli irrazionali). Ma $\overset{\circ}{\overline{\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}}} \neq \emptyset$ ed anzi $\overset{\circ}{\overline{\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}}} = \mathbf{R}$. Se però $U = \overset{\circ}{U}$ ossia U è aperto allora U^c è chiuso ($U^c = \overline{U^c}$) ed essendo $\overset{\circ}{U^c} = \emptyset$ si ha $\overset{\circ}{\overline{U^c}} = \emptyset$ per cui è non denso in alcun punto.

Meno evidente è il seguente Teorema

Teorema 2.10.1 *Il complementare di un insieme di prima categoria in uno spazio metrico completo è ovunque denso*

Dimostrazione Sia X il nostro spazio metrico completo e supponiamo che $U \subset X$ possa scriversi come $U = \cup_{k=1}^{\infty} U_k$ dove $\overset{\circ}{\overline{U}}_k = \emptyset$ (si pensi ad esempio ad $X = [0,1]$ con distanza $d(x,y) = |x-y|$) e U l'unione di tutti i razionali). Vogliamo mostrare che $U^c = \cap_{k=1}^{\infty} U_k^c$ è denso in X ossia $\overline{U^c} = X$. Prendiamo un punto $p \in X$; vogliamo costruire una successione $\{p_k\}$ di punti di U^c tale che $\lim_{k \to \infty} = p$. Prendiamo per questo una successione di sfere aperte $B(p; r_i) \doteq B_i$ di centro p e raggio $r_i \to 0$ per $i \to \infty$. Per definizione di insieme non denso, per ogni B_i esiste una sfera aperta $W_1^{(i)} \subset B_i$ tale che $W_1^{(i)} \cap U_1 = \emptyset$ e quindi $W_1^{(i)} \subset U_1^c$. Sia $p_1^{(i)} \in W_1^{(i)}$ un punto. Dato un insieme aperto $A_2^{(i)}$ contenente $p_1^{(i)}$ si può trovare in esse una sfera aperta $W_2^{(i)}$ tale che $W_2^{(i)} \subset U_2^c$. Sia $p_2^{(i)} \in W_2^{(i)}$. Chiaramente $p_2^{(i)} \in U_1^c \cap U_2^c$ per costruzione. Proseguendo così si ottiene una successione di Cauchy $\{p_k^{(i)}\}$ ed essendo lo spazio completo si ha $p_k^{(i)} \to p^{(i)}$ per $k \to +\infty$. Inoltre abbiamo l'inclusione $p_k^{(i)} \in \cap_{j=1}^{k} W_j^{(i)}$ e $p^{(i)} \in \cap_{k=1}^{\infty} W_k^{(i)} \subset U^c$. Essendo le sfere $B(p; r_i)$ di raggio tendente a zero la successione $\{p^{(i)}\}$ tende a p e quindi $p \in \overline{\cap_{k=1}^{\infty} \mathrm{U}_k^c}$ come dovevamo dimostrare. ∎

Tre corollari della definizione di spazio completo sono i seguenti

Corollario 1.10.1 *Un insieme residuale in uno spazio metrico completo è ovunque denso*

Dimostrazione Sia X lo spazio metrico in questione e sia $B \supset (\cap_{i=1}^{\infty} O_i)$ dove $\{O_i\}$ una famiglia numerabile di aperti densi ossia $O_i = \overset{\circ}{O}_i$, e $\overline{O}_i = X$ (e quindi $\overset{\circ}{O_i^c} = \overset{\circ}{\overline{O}_i^c} = \emptyset$). Abbiamo $X = B \cup B^c \supset (\cap_{i=1}^{\infty} O_i) \cup B^c$. Inoltre $B^c \subset (\cup_{i=1}^{\infty} O_i^c)$ per cui è di prima categoria. Dal **Teorema 2.10.1** $\overline{B} = X$ in quanto B è il complementare di un insieme di prima categoria in uno spazio completo. ∎

Corollario 2.10.1 *Il complementare di un insieme residuale in uno spazio metrico completo è di prima categoria*

Dimostrazione Sia X lo spazio completo e sia B l'insieme residuale ossia $B \supset \cap_{i=1}^{\infty} O_i$ dove $O_i = \overset{\circ}{O}_i$, $\overline{O}_i = X$. $X \backslash B \subset X \backslash \cap_{i=1}^{\infty} O_i = \cup_{i=1}^{\infty} O_i^c = \cup_{i=1}^{\infty} \overline{O_i^c}$ e $\overset{\circ}{\overline{O}_i^c} = \emptyset$ per cui B^c è un sottoinsieme di un insieme di prima categoria e quindi è di prima categoria. ∎

Corollario 3.10.1 *Sia data una qualsiasi funzione $f\colon X \to \mathbf{R}$ dove X è uno spazio metrico completo. Allora $Disc(f)$ (che sappiamo già essere un F_σ) è un insieme di prima categoria se e solo se il complementare è ovunque denso.*

Dimostrazione Se $Disc(f)$ è di prima categoria allora il complementare in X che è completo è ovunque denso (come dice il Teorema 2.10.1). Supponiamo ora che $Cont(f)$ è ovunque denso ed indichiamo con $M \stackrel{\rm def}{=} Disc(f)$. Allora $\emptyset = \overset{\circ}{(X \backslash M^c)} = \overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{(\cup_{j=1}^\infty F_j)} \supset \overset{\circ}{F_k} = \overset{\circ}{\overline{F}_k}$ e questo per ogni k da cui il fatto che M è di prima categoria. ∎

Un altro bel risultato è fornito dal seguente Teorema (vedi [N] pp.128–156, [K] pag.395, [Y] pag.12–13, [O] Teorema 7.3; la dimostrazione in [Y] è fatta per funzioni reali definite su di uno spazio topologico generico. Yosida chiama questo "secondo Teorema di Baire" laddove il primo è per lui una versione adattata a spazi tolpologici generici del **Teorema 2.10.1**.)

Teorema 3.10.1 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue su di uno spazio metrico X che converge puntualmente ad una funzione f. Allora Disc (f) è un insieme di prima categoria*

Osservazione i) Ne consegue che se X è completo, i punti di continuità della funzione limite costituisce un insieme G_δ denso in virtù del precedente teorema. Le funzioni continue su di uno spazio completo sono dette appartenere alla *classe di Baire* 0. I limiti puntuali di funzioni continue sono dette appartenere alla *classe di Baire* 1.

Dimostrazione Sia $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente per $x \in X$ e $f_n \in C(X;\mathbf{R})$. Ciò vuol dire che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_{\varepsilon,x}\colon n \geq n_{\varepsilon,x} \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Certamente la funzione $f(x)$ può essere discontinua. Si prenda $X = [0,1]$ e $f_n(x) = x^n$; è chiaro che se la convergenza fosse uniforme ossia n_ε senza x allora $f(x)$ sarebbe continua. Con un pò di riflessione si ha che $Disc(f) = \cup_{k=1}^\infty \cup_{j=k}^\infty \cap_{n=1}^\infty E_{n,j} \stackrel{\rm def}{=} \cup_{k=1}^\infty A_k$ e $E_{n,j} \stackrel{\rm def}{=} \{x \in X\colon \exists\ y \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}),\ \exists\ p^o_{x,y,n}\colon\ m \geq p^o_{x,y,n},\ p \geq p^o_{x,y,n} \ \Rightarrow\ |f_m(x) - f_p(y)| \geq \frac{1}{j}\}$

Come prima cosa facciamo vedere che $A_k = \overline{A}_k$ in quanto $Disc(f) = F_\sigma$. Dunque la ipotesi ora è che $x^{(r)} \to x\ r = 1,2,3,\ldots$ dove $x^{(r)} \in A_k$. Vogliamo far vedere che $x \in A_k$. Supponiamo allora che $x \notin A_k$ e quindi $x \in \cap_{j=k}^\infty \cup_{n=1}^\infty E_{n,j}$ e quindi $\forall\ j' \geq k\ \exists\ n_o \geq 1$: $\forall\ \overline{y} \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, $\forall\ \overline{p}_o \geq 1\ \exists\ m_{\overline{p}_o,n_o,\overline{y}}\ p_{\overline{p}_o,n_o,\overline{y}}\colon |f_{m_{\overline{p}_o,n_o,\overline{y}}}(x) - f_{p_{\overline{p}_o,n_o,\overline{y}}}(\overline{y})| < \frac{1}{j'}$. Sia dato ora n_o e $I_{n_o} \stackrel{\rm def}{=} (x - \frac{1}{n_o}, x + \frac{1}{n_o})$. $x^{(r_{n_o})} \in I_{n_o}$ e sia $n_{x_{r_{n_o}}}$ tale che $(x_{r_{n_o}} - \frac{1}{n_{x_{r_{n_o}}}}, x_{r_{n_o}} + \frac{1}{n_{x_{r_{n_o}}}}) \subset I_{n_o}$. Sia $y_{x_{r_{n_o}}} \in (x_{r_{n_o}} - \frac{1}{n_{x_{r_{n_o}}}}, x_{r_{n_o}} + \frac{1}{n_{x_{r_{n_o}}}})$ tale che $|f_m(x_{r_{n_o}}) - f_p(y_{x_{r_{n_o}}})| \geq \frac{1}{j}$ e questo per qualsiasi p ed m abbastanza grandi. Ora $|f_m(x_{r_{n_o}}) - f_p(y_{x_{r_{n_o}}})| \leq |f_m(x_{r_{n_o}}) - f_{\overline{m}}(x)| + |f_{\overline{m}}(x) - f_p(y_{x_{r_{n_o}}})|$. Se ora prendiamo: 1) due interi m e p tali che $m \geq p^o_{x_{r_{n_o}}, y_{x_{r_{n_o}}}, n_{x_{r_{n_o}}}}$, e $p \geq p^o_{x_{r_{n_o}}, y_{x_{r_{n_o}}}, n_{x_{r_{n_o}}}}$, 2) $\overline{p}_o \geq p_o$, 3) $j' = \frac{1}{4j}$ cadiamo in contraddizione in quanto dovremmo avere $\frac{1}{j} \leq \frac{1}{2j}$. Dunque dalla contraddizione si esce dicendo che $x \in A_k$. *Come si sarà notato non si è usato il fatto che $f_n \in C(X;\mathbf{R})$. Infatti ciò che abbiamo dimostrato è che $Disc(f) = F_\sigma$; fatto questo vero indipendentemente dall'essere f limite o no di funzione più o meno continue.*

Ora dobbiamo dimostrare che $Disc(f)$ è di prima categoria e quindi $\overset{\circ}{A_k} = \emptyset$. Anche qui supponiamo che $\overset{\circ}{A_k} \neq \emptyset$ e quindi esiste $x \in A_k$ ed un intorno aperto tale $A_k \supset U \ni x$. Esiste quindi $y \in U$ tale che $|f_m(x) - f_p(y)| \geq \frac{1}{j}$ per ogni m e p sufficientemente grandi. Siccome $y \in A_k$ allora esiste ξ tale che $|f_{\overline{m}}(y) - f_{\overline{p}}(\xi)| \geq \frac{1}{j'}$ anche qui per $\overline{m}$ e $\overline{p}$ abbastanza grandi. Ora abbiamo $|f_m(x) - f_m(\xi)| \leq |f_m(x) - f_p(y)| + |f_p(y) - f_m(\xi)|$ e se U è abbastanza piccolo $|f_m(x) - f_m(\xi)| < \varepsilon$ per ε abbastanza piccolo. Dunque è sufficiente prendere $\varepsilon < \frac{1}{j} + \frac{1}{j'}$ in quanto $|f_m(x) - f_p(y)| \geq \frac{1}{j}$ e $|f_p(y) - f_m(\xi)| \geq \frac{1}{j'}$. In quest'ultimo passaggio viceversa si è usato $f_m \in C(X;\mathbf{R})$. ∎

A partire da tale risultato si dimostra il

Corollario 4.10.1 *Se una funzione reale è derivabile su di uno spazio metrico completo $X \subset \mathbf{R}$ allora $\overline{Cont(f')} = X$*

Dimostrazione Poichè $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ e poichè $n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ è una funzione continua per ogni n, la funzione limite, $f'(x)$, è discontinua su di un insieme di tipo F_σ ossia $Disc(f) = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$ con $F_k = \overline{F}_k$ e prima categoria ossia $\overset{o}{F}_k = \emptyset$. Ne segue che essendo X completo, il complementare di un insieme di prima categoria, esattamente l'insieme dei punti in cui è continua f', è ovunque denso.■

Nonostante la relazione $\overline{Cont(f')} = X$, l'insieme $Disc(f')$ può essere "molto brutto". Così brutto da far si che f' non sia integrabile secondo Riemann in nessun intervallo di X (vedi nell'**Appendice 1** la funzione ψ. Quindi qualunque sia l'intervallo $I \subset X$, $Discf(f') \cap I$ deve esere un insieme non–numerabile ed a misura di Lebesgue positiva.

Vale anche un Teorema inverso (vedi l'esercizio **4.5***** per un corrispettivo del teorema nel caso delle funzioni solamente continue)

Teorema 4.10.1 *Qualunque insieme $A \subset \mathbf{R}$ che sia un F_σ e di prima categoria è l'insieme dei punti di discontinuità della derivata di una funzione*

Dimostrazione Sia dato $A = \cup_{k=1}^{\infty} C_k$ dove $C_k = \overline{C}_k$ e $\overset{o}{C}_k = \emptyset$. Costruiamo gli insiemi $F_j = \cup_{k=1}^{j} C_k$ che sono ancora chiusi e non densi in alcun punto e con la proprietà che $F_j \subset F_{j+1}$. Dire che $\overset{o}{F}_k = \emptyset$ vuol dire che per ogni punto p e per ogni aperto $U \ni p$ esiste un aperto $V \subset U$ tale che $V \cap F_k = \emptyset$. Consideriamo ora tutti quegli intervalli aperti che non contengono punti di F_k ed i cui estremi appartengono ad F_k (si veda l'esercizio **25.1.5***). L'unione di tali aperti (che è ancora un aperto) può essere ricoperta da una sottofamiglia numerabile di intervalli i cui estremi ancora appartengono a F_k. Per ogni valore di k costruiamo la funzione di Volterra descritta nella **Appendice 1** e che chiamiamo $f_k(x)$. Se $(a,b) \subset \mathbf{R}\backslash F_k$ $a \in F_k$ e $b \in F_k$ è uno degli intervalli descritti prima la funzione f_k si costruisce attraverso la seguente procedura. Sia $c = \frac{a+b}{2}$ e consideriamo la funzione $A(x) = (x-a)^2 \sin\frac{1}{x-a}$. Sia ora $x_1 \in (a,c)$ il punto più vicino a c in cui $A(x)$ ha un massimo. Analogamente $x_2 \in (c,b)$ il punto più vicino a c in cui la funzione $B(x) = (b-x)^2 \sin\frac{1}{b-x}$ ha un massimo. A questo punto costruiamo la funzione che vale zero se $x = a$ oppure $x = b$ e nell'intervallo (a,b) vale $f(x;a,b) =$

$$\begin{cases} (x-a)^2 \sin(x-a)^{-1} & a < x \le x_1 \\ (x_1-a)^2 \sin(x_1-a)^{-1} & x_1 \le x \le x_2 \\ (b-x)^2 \sin(x-b)^{-1} & x_2 \le x < b \end{cases}$$

$f'(a^+;a,b) = 0$, (la derivata destra in a è nulla) $f'(b^-;a,b) = 0$, (la derivata sinistra in b è nulla) $\overline{\lim}_{x\to a^+} f'(x;a,b) = +1$, $\underline{\lim}_{x\to b^-} f'(x;a,b) = -1$, $|f(x;a,b)| \le \min\{(b-x)^2, (x-a)^2\} \le (b-a)^2$. $|f'(x;a,b)| \le 1+2(b-a)$. Eseguiamo la stessa costruzione per tutti gli intervalli aperti complementari a F_k (ossia gli intervalli componenti di $\mathbf{R}\backslash F_k$). A questo punto possiamo costruire $f_k(x) = \begin{cases} f(x;a,b) & x \in (a,b) \subset \mathbf{R}\backslash F_k \\ 0 & x \in F_k \end{cases}$ .La funzione $f_k(x)$ è derivabile in tutti i punti. Infatti se $x \in (a,b)$ la derivata è addirittura continua. Sia ora $\xi \in F_k$ e sia $\Delta_\xi(h) = \frac{1}{h}(f_k(\xi+h) - f_k(\xi)) = \frac{1}{h} f_k(\xi+h)$. Se $\xi + h \in F_k$ allora $\Delta_\xi(h) = 0$. Se $x + h \in \mathbf{R}\backslash F_k$ allora vuol dire che cade in uno degli intervalli aperti che abbiamo costruito prima e quindi $|f(\xi+h)| \le |h|^2$. In ogni caso la derivata è nulla. Definiamo ora $F(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{3^k}$. La serie converge uniformemente in $\mathbf{R}$ e quindi la funzione limite è continua. Inoltre è derivabile. Se $x \in \mathbf{R}\backslash A$ le $f_k'(x)$ sono continue e quindi la funzione limite è pure essa continua. Se $\xi \in A$ sia k_o il primo intero per cui $\xi \in F_{k_o}$ e quindi $\xi \in F_k$ per tutti i $k \ge k_o$ mentre $\xi \notin F_k$ per $k < k_o$. $f_k'(x)$ è continua in $x = \xi$ $k < k_o$. $\underline{\lim}_{x\to\xi} f_{k_o}'(x) = -3^{-k_o}$ e $\overline{\lim}_{x\to\xi} f_{k_o}'(x) = 3^{-k_o}$ ma $\overline{\lim}_{x\to\xi} \sum_{k=k_o+1} \frac{f_k'(x)}{3^k} \le \sum_{k=k_o+1} \frac{\overline{\lim}_{x\to\xi} f_k'(x)}{3^k} \le \frac{1}{2} 3^{-k_o}$ e $\underline{\lim}_{x\to\xi} \sum_{k=k_o+1} \frac{f_k'(x)}{3^k} \ge \sum_{k=k_o+1} \frac{\underline{\lim}_{x\to\xi} f_k'(x)}{3^k} \ge -\frac{1}{2} 3^{-k_o}$ per cui la derivata non può essere continua in ξ.■

Va notato che la decomposizione in intervalli disgiunti è in generale impossibile nel piano come evidenziato nell'esercizio **25.1.5***

• Si può rispondere quindi negativamente alla seguente domanda

Sia dato un intervallo $I \subset \mathbf{R}$; esiste una funzione derivabile $f(x)$ tale che $Disc(f') = I$?
• Alla luce del precedente corollario è impossibile.

Si può indebolire la domanda cercando di rispondere alla seguente: può una funzione derivabile avere derivata discontinua in I tranne un insieme numerabile? Per la risposta (che è ancora negativa) bisogna però "munirsi" del Teorema di Baire che viene dimostrato nelle prossime pagine.

• Si può viceversa dare un insieme A numerabile (denso o meno) e costruire una funzione F derivabile tale che $Disc(F') = A$.
Prendiamo l'insieme $(0,1)$ e $a_n = \frac{1}{n}$ (non denso quindi) e costruiamo la funzione

$$f\colon (0,1) \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos(x-a_k)^{-1} & x \neq a_i \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{\infty} k^{-2} \cos(a_i-a_k)^{-1} & x = a_i \end{cases}$$

Non essendo $\{a_i\}$ denso, la funzione f è continua in $(0,1)\backslash\{a_i\}$. In a_i la funzione non ammette limite. Avendo solo una quantità numerabile di discontinuità , possiamo effettuare l'integrale secondo Riemann $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x dy f(y)$.
Per derivare $F(x)$ nei punti in cui $f(x)$ è continua applichiamo il Teorema fondamentale del calcolo integrale così come è esposto nel libro di testo `pag.362 Teorema 8.8` ed otteniamo $F'(x) = f(x)$. Nei punti $x = a_i$ applichiamo la definizione di derivata dimostrando che
$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} dx (f(x) - f(\frac{1}{n})) = 0$. Ne segue che $F'(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$.

$$f(x) - f(\frac{1}{n}) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-2}(\cos(x-a_k)^{-1} - \cos(a_n-a_k)^{-1}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}(\cos(x-a_k)^{-1} - \cos(a_n - a_k)^{-1}) + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{x-a_n}$$

• $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} dx \sum_{k=1}^{n-1} k^{-2}(\cos(x-a_k)^{-1} - \cos(a_n-a_k)^{-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-2} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} dx(\cos(x-a_k)^{-1} - \cos(a_n-a_k)^{-1}) = 0$ essendo $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} dx \cos(x-a_k)^{-1} = \cos(a_n-a_k)^{-1}$

• $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} dx \cos\frac{1}{x-a_n} = \frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{n}}^{x} dy f(y)\Big|_{x=\frac{1}{n}} = 0$ (vedi l'esercizio **22.8**).

• Sia $k > n$. $|\cos\frac{1}{x-a_k} - \cos\frac{1}{a_n-a_k}| = 2|\sin(\frac{1}{x-a_k} + \frac{1}{a_n-a_k})\sin(\frac{1}{a_n-a_k} - \frac{1}{x-a_k})| \leq$
$\leq 2\frac{x-a_n}{(a_n-a_k)(x-a_k)}$. $\quad |x-a_k| > |a_n-a_k|$ e quindi

$$\lim_{h\to 0^+}\Big|\frac{1}{h}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} dx\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}(\cos(x-a_k)^{-1} - \cos(a_n-a_k)^{-1}) + \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{x-a_n}\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} \sum_{k=n+1}^{\infty} dx \frac{1}{k^2} 2\frac{x-a_n}{(a_n-a_k)^2} \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+h} \sum_{k=n+1}^{\infty} dx\frac{1}{k^2} 2\frac{h}{(a_n-a_k)^2} \leq$$

$\leq \lim_{h\to 0^+} h \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sup_{k\neq n} \frac{1}{(a_n-a_k)^2} = 0$ ed esattamente come per la $f(x)$ non esiste $\lim_{x\to a_i} F'(x)$

• Una funzione $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile che abbia derivata discontinua su un insieme ovunque denso e numerabile si può definire nel seguente modo. Sia data in $[0,1]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1-x)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} g_k(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \in \mathbf{R}\backslash[0,1] \end{cases} \quad \text{dove}$$

$$g_k(x) = \begin{cases} (x-r_k)^2 \sin \frac{1}{x-r_k} & x \neq r_k \\ 0 & x = r_k \end{cases}$$ e $\{r_k\}$ è l'insieme dei razionali in $[0,1]$. Successivamente si definisce $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x-k)$

• Dare una funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile tale che $f'(x)$ non è continua in un intorno di $x=0$ e $f''(0)$ esiste [3.10.1]

Siano $p > 1$, e $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a_i\}$ una successione tale che $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ e $0 \notin A$. Definiamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos(x-a_k)^{-1} & x \neq a_i \\ a_j^p \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{1}{a_j - a_k} & x = a_i \end{cases}$$

. La derivata della funzione $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x dy f(y)$ è

$$F'(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin \{a_i\} \\ a_j^p \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{1}{a_j-a_k} & x = a_j \end{cases}$$

. Mostriamo che $F''(0)$ esiste. Sia r_k una qualsiasi successione tale che $\lim_{k\to+\infty} r_k = 0$ e scomponiamo la successione in due sottosuccessioni s_k e t_k tali che $s_k \in A$ e $t_k \notin A$. Chiaramente vi è una corrispondenza fra la successione $\{s_k\}$ e una sottosuccessione di $\{a_k\}$. In altre parole vi è una relazione crescente φ per cui $s_k = a_{\varphi(k)}$. $\frac{F'(s_k)-F'(0)}{s_k} = a_{\varphi(k)}^{p-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\varphi(k)}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{1}{a_{\varphi(k)} - a_k} \to 0$ per $k \to +\infty$. Nel caso della sottosuccessione $\{t_n\}$ si ha $\frac{F'(t_n)-F'(0)}{t_n} = \frac{1}{t_n} t_n^p \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos(t_n - a_k)^{-1}$ che tende a zero quando $n \to +\infty$.

•• Dare una funzione f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile tale che $f'(x)$ non è continua su di un sottoinsieme denso di $\mathbf{R}$ e $f''(x)$ esiste su di un altro sottoinsieme denso.

• Dal **Teorema 3.10.1** segue che la somma di una serie trigonometrica convergente puntualmente deve essere una funzione continua su di un insieme denso. Sempre dallo stesso teorema segue che non può esistere una successione di funzioni continue definite su $\mathbf{R}$ che converge puntualmente alla funzione che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali (la funzione di Dirichlet).

[3.10.1] *E2572 – C.D.H. Cooper American Mathematical Monthly* Vol.84, No.4 (Apr.,1977), 298. Si dà come esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \ \vee \ x > 1 \ \vee \ x = \frac{1}{n} \\ (x-\frac{1}{n})^2 (x - \frac{1}{n+1})^2 \sin \frac{1}{x - \frac{1}{n+1}} & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \end{cases}$

Per un esempio di successione di funzioni $f_{k,m}(x)$ che convergono alla funzione $\mathcal{X}_{\mathbf{Q}}$ si consideri l'insieme dei razionali e li si ordini in un qualche modo $\{r_k\}$.

Sia $f_{k,m}(x) \stackrel{\rm def}{=} \exp(-k\prod_{j=1}^m (x-r_j)^2)$. Ciascuna $f_{k,m}$ è continua e $\lim_{k\to+\infty} f_{k,m} = g_m(x)$ dove $g_m(x) = \begin{cases} 1 & x = r_1 \dots r_m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e quindi $\lim_{m\to+\infty} g_m(x) = \mathcal{X}_{\mathbf{Q}}$. Come si vede $Disc(g_m)$ è un F_σ di prima categoria.

Riprendiamo il **Teorema 3.10.1** e consideriamo un suo sottoinsieme F che verifica la relazione $F = F'$ (insieme perfetto). Il teorema continua ad essere valido con le funzioni $(f_n)|_F$. La nozione di prima e seconda categoria ora si riferiscono ad F. Vale un teorema che inverte il **Teorema 3.10.1**.

Teorema 5.10.1 *Sia data una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che le discontinuità della restrizione ad un qualsiasi sottoinsieme perfetto di $\mathbf{R}$ è di prima categoria relativa all'insieme perfetto. Allora f è il limite puntuale di funzioni continue su $\mathbf{R}$.*

Se $Disc(f)|_F \neq$ prima categoria ristretta ad F per almeno un $F = F'$ allora non è detto $f = \lim_n f_n$ con le funzioni f_n continue. Si consideri l'insieme di Cantor ed il modo in cui si ottiene. Sia per definizione $F_e \subset F$ l'insieme dei punti α, β tale che (α, β) è uno degli intervalli che vengono tolti per ottenere l'insieme di Cantor. $F_e \subset F$ è numerabile ed inoltre $\overline{F}_e = F$. Sia data ora la funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbf{R}\backslash F \\ 1/2 & x \in F_e \\ 1 & x \in F\backslash F_e \end{cases}$ ora $Disc(f) = F$ che è di prima categoria grazie al **Corollario 3.10.1**. Del resto $f|_F$ è discontinua ovunque $\underline{\underline{\text{in } F}}$ e quindi per il **Teorema 5.10.1** f non può essere limite puntuale di funzioni continue.

Esercizio Si dimostri viceversa che la funzione $\mathcal{X}_F$ è in classe di Baire 1. Per la dimostrazione bisogna sapere come si costruisce l'insieme di Cantor e ciò è contenuto in numerosi libri (ad esempio sul Giusti di analisi II). Alternativamente si può ricorrere all'esercizio **30.1.5*** e partire da uno degli intervalli aperti di cui ivi si parla. Sia (a, b) un intervallo aperto che viene eliminato nella costruzione dell'insieme di Cantor da un intervallo chiuso $[A, B]$ che lo contiene. Si definisce la funzione $(f_k)_{a,b}(x) = \begin{cases} k(x-a) & a \le x \le a + k^{-1} \\ 1 & a + k^{-1} \le x \le b - k^{-1} \\ k(b-x) & b - k^{-1} \le x \le b \end{cases}$ Ripetiamo la stessa costruzione per ogni intervallo (a, b) ed otteniamo una funzione $f_k(x)$ che vale 0 per ogni punto estremo di uno degli intervalli e per ogni punto di F che non sia estremo di nessun intervallo (si badi che questi ultimi punti sono in quantità non–numerabile e sono quindi molti di più di quelli che stanno agli estremi degli intervalli eliminati). Inoltre ciascuna f_k è continua. Il limite $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$ esiste per ogni x e vale $1 - \mathcal{X}_F$.

Esercizio *Si dimostri che la funzione $\mathcal{X}_E$ è in classe di Baire* 1 *per qualsiasi insieme chiuso E*
R.: Sia dato un insieme *chiuso* $E \subset \mathbf{R}$ e sia $\rho(x; E)$ la distanza di un qualsiasi punto da E (vedi l'esercizio **13.1.5***). Si definisca poi la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{1}{1+n\rho(x;E)}$. Se $x \in E$ $f_n(x) = 1$ per ogni n mentre se $x \notin E$ allora $f_n(x) \to 0$. Dunque $f_n(x) \to \mathcal{X}_E$ e le funzioni f_n sono tutte continue.
Allo stesso modo si può definire una successione che converge puntualmente alla funzione $\mathcal{X}_F$ essendo $F = \overline{F}$.

Esercizio Cosa accade se si ripete il ragionamento ma al posto di E si pone l'insieme $\mathbf{Q}$?
Risposta: essendo $\rho(x; \mathbf{Q}) \equiv 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, si ha $f_n(x) \equiv 1$ e quindi $f_n(x) \not\to \mathcal{X}_{\mathbf{Q}}$. Del resto

non poteva aversi lo stesso tipo di risultato in quanto sappiamo che $\mathcal{X}_{\mathbf{Q}}$ non è in classe di Baire 1

Esercizio Dimostrare che la funzione dell'esercizio **6.1.5**** è in classe di Baire 1 e quindi trovare una successione di funzioni continue $f_n(x)$ che converge ad essa puntualmente
Risposta: consideriamo $\mathbf{Q}\cap[0,1]$ (per il complementare si opera allo stesso modo). Enumeriamo i razionali $\{r_i\}$ e dato k intero prendiamo l'insieme $R_k \stackrel{\rm def}{=} \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, $r_0 = 0$. Ordiniamo ora l'insieme R_k secondo la loro crescenza e facciamo l'ipotesi che $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_k$. Ci sarà un minimo della quantità $\min_{i=1,\ldots,k}\{|r_{i-1} - r_i|\} \stackrel{\rm def}{=} d$. Definiamo allora una funzione *continua* che vale sempre zero tranne sul perimetro di k triangoli isosceli aventi la base di lunghezza $\frac{d}{2} - \frac{1}{k}$, posizionata sull'asse delle ascisse e centrata nel punto r_k. La funzione vale $\frac{1}{q}$ per $x = \frac{p}{q}$ (si potrebbe dare la definizione analitica di una tale f_k ma non è necessario). La costruzione si può ripetere per ogni valore di k. Per costruzione si ha $f_k(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ per ogni valore di k. Se $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ allora $f_k(x) \to 0$ e quindi $f_k(x)$ converge alla funzione dell'esercizio **6.1.5****.

Esercizio Si supponga ora di modificare la costruzione precedente definendo $f_k(x) = 1$ se $x \in \mathbf{Q}$ ed il resto tutto uguale. Facendo il limite $k \to +\infty$ esattamente come prima si avrebbe che $f_k(x) \to \mathcal{X}_{\mathbf{Q}}$ che sappiamo non poter essere vero. Dove è l'errore?
Risposta: nel supporre che $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \;\Rightarrow\; f_n(x) \to 0$

Un ulteriore bel risultato è fornito dal seguente teorema (indichiamo con $Der(f)$ l'insieme dei punti in cui una determinata funzione è derivabile):

Teorema 6.10.1 *Sia data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$. Se $\overline{Disc(f)} = [a,b]$ allora l'insieme dei punti in cui è derivabile, che può anche essere vuoto e che chiameremo $Der(f)$, è di prima categoria*

Dimostrazione
$p \in Dom(f) \cap Der(f)$ solo se $\forall\; k \geq 1\; \exists\; n \geq 1 : x, y \in (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n})\backslash\{p\} \;\Rightarrow\; |\frac{f(x)-f(p)}{x-p} - \frac{f(y)-f(p)}{y-p}| < \frac{1}{k}$ e quindi $Der(f) = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} E_{kn}$ dove $E_{kn} = \{p \in Dom(f) \colon |\frac{f(x)-f(p)}{x-p} - \frac{f(y)-f(p)}{y-p}| < \frac{1}{k}\; \forall x, y \in (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n})\backslash\{p\}\}$. Se facciamo vedere che $\overset{\circ}{\overline{E}}_{kn} = \emptyset$ abbiamo il risultato in quanto $Der(f)$ si può riscrivere come unione di insiemi la cui chiusura ha interno vuoto (vedi alla fine). Se $p \in E_{kn} \;\Rightarrow\; p \in Cont(f)$. Infatti esiste n_o tale che $|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}| < |\frac{f(y)-f(p)}{y-p}| + \frac{1}{k}$ per ogni coppia x, y che sta in $(p - \frac{1}{n_o}, p + \frac{1}{n_o})$ e quindi, fissato ad esempio y, si ha che $f(x)$ è addirittura Lipschitziana nell'intorno dato. Infatti segue che i rapporti incrementali $|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}|$ sono limitati superiormente e quindi si ha $\sup_{x\neq p} |\frac{f(x)-f(p)}{x-p}| \stackrel{\rm def}{=} S < \infty$. Questo vuol dire che $E_{kn} \cap Disc(f) = \emptyset$. Se ora facciamo vedere che $E'_{kn} \cap Disc(f) = \emptyset$ abbiamo dimostrato la tesi in quanto, essendo $\overline{Disc(f)} = [a,b]$, qualunque sia $p \in E_{kn}$ e qualunque sia l'intorno di esso, ci sono punti di $Disc(f)$ che cadono dentro l'intorno di p scelto. Sia quindi $\{p_n\} \subset E_{kn_o}$ una successione di punti tali che $p_n \in E_{kn_o}$ e tale che $p_n \to p$. Vogliamo far vedere che $p \in Cont(f)$. Supponiamo che $p \in Disc(f)$ e quindi $\exists\; \varepsilon > 0 :\; \forall\; \delta > 0\; \exists\; y \in (p - \delta, p + \delta) \;\wedge\; |f(p) - f(y)| \geq \varepsilon$. Sia $\delta(n)$ tale che $(p - \delta(n), p + \delta(n)) \subset (p_n - \frac{1}{n_o}, p_n + \frac{1}{n_o})$. Ora $\varepsilon \leq |f(p) - f(p_n)| + |f(p_n) - f(y)| \leq (|p - p_n| + |y - p_n|)S$ che tende a zero per $n \to +\infty$ e quindi se ne ricava una contraddizione.

Facciamo vedere ora che $Der(f) = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} E_{kn}$ si può scrivere come unione numerabile di insiemi non densi in alcun punto. $Der(f) = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} E_{kn} = \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{l=i+1}^{\infty} \cap_{t=1}^{\infty} (B_{ij} \cap E_{lt})$ dove $B_{ij} \stackrel{\rm def}{=} E_{ij} \backslash \cup_{k=j+1}^{\infty} E_{ik}$ e quindi, essendo $\overset{\circ}{\overline{B_{ij} \cap E_{lt}}} \subset \overset{\circ}{\overline{E}}_{lt} = \emptyset$, si ha il risultato.∎

Una diretta conseguenza del precedente Teorema è il corollario che segue

Corollario 4.10.1 *Se* $\overline{Disc(f)} = [a,b]$ *e* $\overline{Der(f)} = [a,b]$ *allora* $Cont(f)\backslash Der(f)$ *è un insieme residuale e quindi denso.*

Dimostrazione Essendo $Der(f) \subset Cont(f)$, quest'ultimo è denso e quindi $Disc(f)$ è di prima categoria (vedi **Corollario 3.10.1**). Inoltre sappiamo che $Disc(f)$ è un F_σ. Scriviamo quindi come $Disc(f) = \cup_{j=1}^\infty A_i$ dove $\overset{\circ}{\overline{A}}_i = \overset{\circ}{A}_i = \emptyset$. Per il precedente Teorema sappiamo che $Der(f) = \cup_{j=1}^\infty B_i$ dove $\overset{\circ}{\overline{B}}_i = \emptyset$ e quindi $Cont(f)\backslash Der(f) = [a,b] \backslash \cup_{j=1}^\infty (A_j \cap B_j)$. Essendo $A_i \cap B_j$ non denso in alcun punto ne segue che $Cont(f)\backslash Der(f)$ è residuale.$\blacksquare$

• Una funzione il precedente corollario è : sia $E \subset \overline{E} = \mathbf{R}$ un insieme numerabile. Diamo una numerazione agli elementi di E (possibile essendo E numerabile) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $f(x) = \begin{cases} 1/n^3, & x = x_n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ Detto $E = \{x_n\}$, dall'esercizio **6.5**** ricaviamo facilmente che la funzione non è ivi continua e quindi neanche derivabile. Per la derivabilità gli unici candidati sono i punti di E^c e quel che bisogna fare è analizzare il limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dove $x \in E^c$ e $x+h \in E$ ($x+h \in E^c \Rightarrow f(x+h) = 0$). Sia $h_n \to 0$ e $x + h_n \overset{\text{def}}{=} x_n$ da cui $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3 h_n}$.

Consideriamo l'insieme $S \overset{\text{def}}{=} \cap_{k\ge 1} \cup_{n\ge k} (x_n - \frac{1}{n^2}, x_n + \frac{1}{n^2})$ ed il suo complementare $S^c \overset{\text{def}}{=} \cup_{k\ge 1} \cap_{n\ge k} \big((-\infty, x_n - \frac{1}{n^2}] \cup [x_n + \frac{1}{n^2}, +\infty)\big)$. Se $x \in S^c$, la successione $x + h_n$ tende a x (ricordiamo che $\overline{E} = \mathbf{R}$) ma $|h_n| \ge \frac{1}{n^2}$ per cui $\frac{f(x+h_n)}{h_n} = \frac{n^2}{n^3} \le 0$.

Ora l'insieme S è ricopribile da una collezione numerabile di intervalli aperti la somma delle cui lunghezze è piccola quanto si vuole. Infatti la somma delle lunghezze degli intervalli che compongono l'insieme $\cup_{n\ge k}(x_n - \frac{1}{n^2}, x_n + \frac{1}{n^2})$ è maggiorata da $\sum_{n=k}^\infty \frac{2}{n^2}$ e questo per ogni k da cui il risultato (in teoria della misura si dice che l'insieme ha misura di Lebesgue nulla). Ne segue che S^c ha "misura piena" (se fin dall'inizio ci fossimo messi nell'intervallo $[0,1]$ avrebbe avuto misura 1). Ma allora deve essere ovunque denso in quanto se così non fosse esisterebbe un intervalo aperto (certamente di misura non nulla) nel quale non cadono punti di S^c e quindi quest'ultimo non avrebbe misura piena (vedi [F])

§10.2 Il Teorema di Baire

Il teorema di Baire è essenziale in *analisi funzionale* per lo studio della teoria degli operatori lineari e non–lineari. In ogni caso è indispensabile anche per stabilire alcuni risultati "fini" nella teoria delle funzioni.

L'enunciato del teorema di Baire o della categoria è dato dal seguente

Teorema 1.10.2 *Uno spazio metrico completo non può essere scritto come unione numerabile di suoi sottoinsiemi non densi in alcun punto (ossia è di seconda categoria)*

Dimostrazione Sia (X,d) uno spazio metrico completo. Supponiamo per assurdo che tale spazio X possa scriversi come unione numerabile di suoi sottoinsiemi U_k tale che $\overset{\circ}{\overline{U}}_k = \emptyset$ (nell'esercizio **21.1.5** si dimostra che tale condizione è equivalente ad essere non denso in alcun punto). Dunque abbiamo $X = \cup_{k\ge 1} U_k$; e $x \in X$. Poiché $\overset{\circ}{\overline{U}}_1 = \emptyset$ si può dare un insieme aperto (ad esempio una sfera) che contiene x ed all'interno di essa trovare un'altra sfera aperta che non ha punti in comune con U_1. Dunque si può dare $S(x;r)$ (sfera aperta di centro x e raggio r) tale che $S(x;r) \supset B_1(x_1;r_1)$ e $B_1(x_1;r_1) \cap U_1 = \emptyset$. All'interno di $B_1(x_1;r_1)$ si può trovare una sfera aperta $B_2(x_2;r_2)$ tale che $B_2(x_2;r_2) \cap U_2 = \emptyset$ e così via. Prendendo i raggi delle varie sfere B_j pari a $r_j \to 0$, ne segue che la successione $\{x_j\}$ è di Cauchy e quindi converge ad un punto $p \in X$ per ipotesi di spazio completo. Se indichiamo con $p \doteq \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ ne segue per costruzione che $p \notin U_k$ per ogni k. Infatti p appartiene a ciascuna delle sfere $B_j(x_j; r_j)$ da cui la non appartenenza di p a ciascun U_k. Ma l'unione degli U_k copre X e la contraddizione si risolve riconoscendo la falsità dell'ipotesi ossia che X potesse scriversi come $\cup_{k\geq 1} U_k$. ∎

Per convenzione si dice: *Uno spazio metrico completo è di seconda categoria.*

A volte la conclusione del Teorema di Baire viene data nella seguente forma ed in questo caso è un corollario del precedente **Teorema 1.10.2**. Inoltre il Teorema stesso è conseguenza del corollario che segue ed infatti sono equivalenti

Corollario 1.10.2 *Sia X uno spazio metrico completo ed O_i una famiglia numerabile di sottoinsiemi aperti densi. Allora $\cap_{i=1}^\infty O_i \neq \emptyset$*

Facciamo vedere ora che dal **Teorema 1.10.2** segue la affermazione del **Corollario 1.10.2**. Sia quindi $X = \cap_{i=1}^\infty O_i \cup (\cap_{i=1}^\infty O_i)^c = (\cap_{i=1}^\infty O_i) \cup (\cup_{i=1}^\infty O_i^c)$. Ora $\mathring{O_k^c} = \mathring{\overline{O_k^c}} = \emptyset$ e quindi, dal teorema precedente, essendo X completo, non può aversi $X = \cup_{i=1}^\infty O_i^c$ da cui il fatto che $\cap_{i=1}^\infty O_i \neq \emptyset$.
Facciamo vedere ora come il **Teorema 1.10.2** segua dal **Corollario 1.10.2**. In questo caso l'ipotesi è è avere famiglia di aperti $O_i = \mathring{O_i}$ tali che $\overline{O_i} = X$ ed inoltre $\cap_{i=1}^\infty O_i \neq \emptyset$. Abbiamo bisogno del **Teorema 2.10.1**

Supponiamo che il **Teorema 1.10.2** sia falso e quindi possa scriversi $X = \cup_{i=1}^\infty A_i$ con $\mathring{\overline{A}_i} = \emptyset$. Certamente si ha $X \subset \cup_{i=1}^\infty \overline{A}_i \implies \emptyset \supset \cap_{i=1}^\infty \overline{A}_i^c$. Ma abbiamo $\overline{A}_i = X$ (essendo $\mathring{\overline{A}_i} = \emptyset$) ed inoltre gli $\overline{A}_i^c$ sono aperti contraddicendo l'ipotesi ossia il Corollario. ∎

• Come applicazione del teorema di Baire facciamo vedere che $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ non è un F_σ ossia non si può scrivere $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} = \cup_{k\geq 1} F_k$ dove $F_k = \overline{F}_k$. Se per assurdo fosse possibile allora si potrebbe scrivere $\mathbf{R} = \cup_{r\in\mathbf{Q}} \{r\} \cup_k F_k$ ed essendo $\mathbf{R}$ completo almeno uno degli insiemi che costituiscono le due unioni deve avere interno non vuoto. Ciò è impossibile in quanto ogni singolo punto $r \in \mathbf{R}$ ha chiaramente interno vuoto e F_k pure non può avere interno non vuoto a causa della densità dei razionali.

• Lo spazio metrico $([a,b], d)$, essendo completo, non è di prima categoria.

• Lo spazio metrico $((a,b), d)$, pure non è di prima categoria. Infatti se lo fosse, sarebbe di prima categoria anche lo spazio $([a,b], d)$.

Esercizio *Dimostrare che non può esistere una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ per cui $\mathbf{Q}^c \subset Disc(f)$ e $\overline{Cont(f)} = \mathbf{R}$*

Dimostrazione Siano $\{a_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbf{Q}$ e $\{b_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbf{Q}$ tali che $\{a_i\} \cup \{b_i\} = \mathbf{Q}$ e $\{a_i\} \cap \{b_i\} = \emptyset$. Inoltre $\mathbf{Q}^c \cup \{a_i\} = Disc(f)$ ed è quindi un F_σ e $\overline{\{b_i\}} = \mathbf{R}$. Facciamo vedere che non è possibile. Poiché $Disc(f)$ è un F_σ si ha $Disc(f) = \cup_{k=1}^\infty F_k = \mathbf{Q}^c \cup \{a_i\}$ e $F_k = \overline{F}_k$. Inoltre abbiamo che $\mathring{F_k} = \emptyset$ essendo $\{b_i\}$ ovunque denso. Ne seguirebbe che $\mathbf{R} = \{b_i\} \cup \cup_{k=1}^\infty F_k$ il che è impossibile perché vorrebbe dire che $\mathbf{R}$ è di prima categoria ∎

Esercizio *Dimostrare o confutare con un esempio la affermazione*
$\mathbf{Q}^c \subset Disc(f) \;\Rightarrow\; Disc(f) = \mathbf{R}$

L'affermazione è falsa. In base al risultato precedente non può essere $\overline{Cont(f)} = \mathbf{R}$ ma può essere $Cont(f)$ non denso in alcun punto. Infatti la funzione f_2 data nell'esercizio **5.5** fa al caso nostro.

Esercizio *Può esistere una funzione $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{Q}^c \subset Disc(f)$ e $Cont(f)$ è denso in un punto p?*

Un altro esempio di applicazione del teorema di Baire è il corollario

Corollario 2.10.2 *Uno spazio metrico completo senza punti isolati è non numerabile.* Tale risultato deriva dal seguente: *Uno spazio metrico completo numerabile ha almeno un punto isolato*
Dimostrazione Sia X lo spazio metrico numerabile costituito da una quantità numerabile di punti $\{x_k\}$ $k \in \mathbf{N}$ per cui $X = \cup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$. Essendo X completo, almeno un suo elemento, diciamo x_j, deve avere la chiusura con almeno un punto interno. Ora la chiusura di x_j è esattamente x_j e può avere interno non vuoto solo se x_j è isolato. Infatti in tal caso non si contraddice la definizione di non densità in quanto le sfere aperte di X che contornano x_j e che hanno raggio sufficientemente piccolo sono tutte costituite da un solo punto ossia x_j.∎

Il risultato precedente a questo punto è ovvio. Tra l'altro questo aspetto del Teorema di Baire consente di dire che se si ha un insieme F per cui $F = F'$ allora tale insieme deve necessariamente essere non numerabile ed è il caso dell'insieme di Cantor (ternario o no).

Alla luce del corollario precedente si può inoltre dire che lo spazio metrico $(\mathbf{Q}; |x-y|)$ non è completo. Infatti non vi sono punti isolati ed è numerabile.

Lo spazio metrico $(\mathbf{N}; d)$ descritto all'inizio è numerabile e completo e quindi deve avere almeno un punto isolato. Infatti tutti i punti sono isolati. Si può osservare che ciascun punto di $(\mathbf{N}, d)$ ha chiusura avente interno non vuoto e questo è in linea col fatto che $(\mathbf{N}, d)$ è completo.

Il teorema di Baire unitamente al risultato secondo cui $Disc(f) = F_\sigma$ e di prima categoria se $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ puntualmente e $f_n \in C(X; \mathbf{R})$, consente di rispondere negativamente alla domanda rimasta non risposta se è possibile che le discontinuità della derivata di una funzione possano costituire tutto un intervallo ad eccezione di una sua quantità numerabile. Si ha infatti il corollario

Corollario 3.10.2 *Dato un intervallo chiuso I ed un suo sottoinsieme numerabile $\{a_i\}$. Non esiste una funzione $f \in C(I; \mathbf{R})$ che sia derivabile su I e la cui derivata f' sia discontinua su $I \backslash \{a_i\}$ e continua su $\{a_i\}$*

Dimostrazione Supponiamo che una tale funzione esista. Sappiamo che $Disc(f') = F_\sigma$ ed inoltre è di prima categoria ossia $Disc(f') = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$ con $\overline{F}_k = F_k$ ed inoltre $\overset{\circ}{F}_k = \emptyset$. Ma allora $I = (\cup_{k=1}^{\infty} F_k) \cup \{a_i\}$. Ma il Teorema di Baire vieta ad I tale scomposizione in quanto I è esso stesso uno spazio metrico completo e quindi non lo si può scrivere come unione numerabile di insiemi non densi in alcun punto.∎

Un'altra conseguenza del Teorema di Baire è il seguente celebre teorema dovuto a Stefan Banach (nato nel 1892 in Cracovia (all'epoca parte dell'Impero Austro–Ungarico) e morto nel 1945 in Leopoli (Ucraina); uno dei fondatori dell'analisi funzionale). Prima però introduciamo le *Derivate di Dini:*

$$D^+f(x) = f^+(x) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad D_+f(x) = f_+(x) \overset{\text{def}}{=} \underline{\lim}_{h\to0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D^-f(x) = f^-(x) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{h\to0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad D_-f(x) = f_-(x) \overset{\text{def}}{=} \underline{\lim}_{h\to0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

(consideriamo pure i limiti infiniti) e sono dette rispettivamente $D^+f(x)$–derivata superiore destra, $D_+f(x)$–derivata inferiore destra, $D^-f(x)$–derivata superiore sinistra, $D_-f(x)$–derivata inferiore sinistra. Chiaramente si hanno le relazioni $D_+f(x) \le D^+f(x)$, $D_-f(x) \le D^-f(x)$ e una funzione è derivabile a destra se $D_+f(x) = D^+f(x)$ mentre è derivabile a sinistra se $D_-f(x) = D^-f(x)$ con i limiti che possono assumere il valore $\pm\infty$. Se una funzione è derivabile a destra diciamo che esiste $f'_+(x)$ mentre se è derivabile a sinistra diciamo che esiste $f'_-(x)$.

Sia inoltre $Q = C([a,b];\mathbf{R})$ lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[a,b]$ con la metrica del massimo (come all'inizio del capitolo **10.1**). Abbiamo il seguente celebre Teorema (vedi [B], [M], [K] pag.420–421, [Y] pag.72–73, [HS] pag.260–261, [ST] pag.60–62, [O] pag.45–46)

Teorema *Nello spazio Q l'insieme delle funzioni che in almeno un punto $x_o \in [a,b)$ ammettono $D^+f(x_o)$ e $D_+f(x_o)$ finite (detto F) è un insieme di prima categoria.*

Osservazione i) Ne segue che il complementare di F è denso grazie alla **Proposizione** a pagina 1 e al **Corollario 1.10.1**. Il complementare contiene l'insieme delle funzioni che in ogni punto di $[a,b)$ ammettono $D^+f(x)$ oppure $D_+f(x)$ infinito. Quindi sono dense le funzioni continue ma non derivabili a destra in nessun punto di $[a,b)$. Poiché lo stesso discorso può farsi per $(a,b]$, ne segue che sono dense le funzioni che non sono derivabili in nessun punto di $[a,b]$ ii) Se si omette il termine *finita* il teorema non è valido.

Dimostrazione Mostreremo che l'insieme delle funzioni aventi rapporto incrementale destro definitivamente limitato sia superiormente che inferiormente in almeno un punto di $[a,b]$, costituiscono un insieme di prima categoria e F_σ ossia può scriversi come $\cup_{i=1}^\infty F_k$ dove $F_k = \overline{F}_k$ e $\overset{o}{F}_k = \emptyset$. Tali funzioni sono quelle per cui esiste un punto, diciamo x_o, in cui si ha $-m \le D_+f(x_o) \le D^+f(x_o) \le m < \infty$ per un qualche $m^{(1.10.2)}$. Definiamo l'insieme $\cup_{N=1}^\infty\{f \in Q \,|\, \exists\, x \in [a, b-\frac{b-a}{N}]:\ 0 < h \le \frac{b-a}{N} \ \Rightarrow\ |\frac{f(x+h)-f(x)}{h}| \le N\} \overset{\rm def}{=} \cup_{N=1}^\infty F_N$. Dimostriamo che esso coincide con l'insieme delle funzioni che hanno rapporto incrementale destro definitivamente limitato sia superiormente che inferiormente in almeno un punto ossia quelle funzioni per le quali in almeno un punto (diverso da funzione a funzione) si ha $-m \le D_+f(x) \le D^+f(x) \le m$. Infatti se $f \in F_N$ allora, $-N \le \inf\limits_{h\in(0,\frac{b-a}{N}]} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \sup\limits_{h\in(0,\frac{b-a}{N}]} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le N$. Ne segue $-N \le \sup\limits_{\delta\in(0,\frac{b-a}{N}]} \inf\limits_{h\in(0,\delta]} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le \inf\limits_{\delta\in(0,\frac{b-a}{N}]} \sup\limits_{h\in(0,\delta]} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le N$ che equivale a scrivere $-N \le D_+f(x) \le D^+f(x) \le N$ e quindi è limitato.

Viceversa supponiamo che una certa funzione abbia $-m \le D_+f(x_o) \le D^+f(x_o) \le m < \infty$ per $x_o \in [a,b)$. $D^+f(x_o) \le m$ vuol dire $I \overset{\rm def}{=} \inf\limits_{0<\delta\le b-x_o} \sup\limits_{0<h\le\delta} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le m$ e quindi $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_{\varepsilon,x_o} > 0,\ 0 < \delta_{\varepsilon,x_o} \le b - x_o :\ I \le \sup\limits_{0<h\le\delta_{\varepsilon,x_o}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < I + \varepsilon \le m + \varepsilon$. $-m \le D_+f(x_o)$ vuol dire che $S \overset{\rm def}{=} \sup\limits_{0<\delta\le b-x_o} \inf\limits_{0<h\le\delta} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge -m$ e quindi $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta'_{\varepsilon,x_o} > 0,\ 0 < \delta'_{\varepsilon,x_o} \le b - x_o :\ S \ge \inf\limits_{0<h\le\delta'_{\varepsilon,x_o}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > S - \varepsilon \ge -m - \varepsilon$. Se definiamo $\tilde\delta_{\varepsilon,x_o} = \min\{\delta_{\varepsilon,x_o}, \delta'_{\varepsilon,x_o}\}$ si ottiene che $0 < h \le \tilde\delta_{\varepsilon,x_o} \ \Rightarrow\ -m - \varepsilon \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le m + \varepsilon$. Prendendo ora $N > \max\{m+\varepsilon, \frac{b-a}{\tilde\delta_{x_o,m}}\}$ segue che $f \in F_N$ in quanto si ottiene sia $b - \frac{b-a}{N} > x_o$ che $\frac{b-a}{N} < \tilde\delta_{\varepsilon,x_o}$ e la seconda implica la prima essendo $\tilde\delta_{\varepsilon,x_o} < b - x_o$.

Facciamo vedere che F_N è chiuso e non denso in alcun punto ossia $F_N = \overline{F}_N$ e $\overset{o}{F}_N = \emptyset$.

(1.10.2) Le funzioni derivabili a destra con derivata finita sono un sottoinsieme dell'insieme precedente e quindi esse stesse sono un sottoinsieme di prima categoria. Peraltro va osservato che l'insieme delle funzioni derivabili a destra in almeno un punto è sì contenuto all'interno di un insieme di prima categoria ma è contemporaneamente denso. Infatti tali funzioni contengono al loro interno le funzioni $C^1([a,b];\mathbf{R})$ (derivabili con continuità in ogni punto di $[a,b]$). Inoltre essendo l'insieme oggetto del Teorema un insieme di prima categoria e F_σ, il complementare è denso e *residuale*

Cominciamo dalla chiusura. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni appartenenti a F_N tale che $\|f_k - f\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Vogliamo mostrare che $f \in F_N$. Per definizione, per ogni k vi è un punto $x_k \in [a, b - \frac{b-a}{N}]$ in cui f_k ha rapporto incrementale destro definitivamente limitato. La successione x_k ammette una sottosuccessione $\{x_{k_j}\}$ convergente ad un punto $x_o \in [a, b - \frac{b-a}{N}]$. Chiaramente $f_{k_j}(x) \to f(x)$ e quindi $f_{k_j}(x_o) \to f(x_o)$. Abbiamo $|\dfrac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h}| \le \sum_{r=1}^{5} g_r$ dove $g_1 = |\dfrac{f(x_o+h) - f_{k_j}(x_o+h)}{h}|$, $\quad g_2 = |\dfrac{f_{k_j}(x_o+h) - f_{k_j}(x_{k_j}+h)}{h}|$, $g_3 = |\dfrac{f_{k_j}(x_{k_j}+h) - f_{k_j}(x_{k_j})}{h}|$, $\quad g_4 = |\dfrac{f_{k_j}(x_{k_j}) - f_{k_j}(x_o)}{h}|$, $g_5 = |\dfrac{f_{k_j}(x_o) - f(x_o)}{h}|$. Fissiamo ora $h \neq 0$ (avendo in mente che il ragionamento seguente deve potersi ripetere qualunque sia $h \neq 0$). Il primo ed il quinto termine sono maggiorabili con ε per la convergenza della sottosuccessione $\{f_{k_j}\}$. Si tenga presente che tanto più piccolo è h, tanto più grande deve essere k_j. Il secondo ed il quarto sono maggiorabili con ε per la continuità delle funzioni coinvolte. Il terzo termine è maggiorabile con N per ipotesi. Dunque la somma è maggiorabile con $N + 4\varepsilon$ ed essendo ε piccolo a piacere essa è $\le N$. Dunque $F_N = \overline{F}_N$. Che F_N abbia interno vuoto deriva dal fatto che il complementare è denso. Il complementare è costituito dalle funzioni che in ogni punto di $[a, b - \frac{b-a}{N}]$ ammettono rapporto incrementale destro non minore o uguale in modulo a N e dal punto di vista insiemistico si scrive come $F_N^c = \{f \in Q\,|\forall\ x \in [a, b - \dfrac{b-a}{N}]\ \exists\ 0 < h \le \dfrac{b-a}{N}\ \wedge\ |\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}| > N\}$. Tale insieme contiene le funzioni che in ogni punto di $[a, b)$ ammettono rapporto incrementale destro maggiore in modulo di N che a sua volta contiene l'insieme delle funzioni continue, lineari a tratti le quali, nei punti in cui sono derivabili hanno derivata in modulo maggiore di N e nei punti in cui non sono derivabili hanno rapporto incrementale destro maggiore in modulo di N. Tale insieme è denso in $C([a, b]; \mathbf{R})$ con la metrica uniforme ossia quella propria dello spazio $C([a, b]; \mathbf{R})$. Per dimostrare questo consideriamo una funzione continua (detta f) e quindi uniformemente continua. Sia δ_ε quella quantità per cui $|x - x'| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Consideriamo il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ dove $c = \min\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $d = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$ e frazioniamolo in rettangolini $\{R_i\}$ in modo tale che: 1) la base dei rettangolini è lunga δ_ε o anche meno dimodoché $1 \le i \le M$ dove $M \le \left[\frac{b-a}{\delta_\varepsilon}\right] + 1$ e l'altezza è ε 2) $[a, b] = \cup_{i=1}^{M} B_i$ e B_i è la base di ciascun rettangolino 3) il grafico della funzione è contenuto in $R \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=1}^{M} R_i$.

Chiaramente esiste una funzione continua $g(x)$, lineare a tratti il cui grafico è interamente contenuto all'interno di R e tale che, laddove la funzione è derivabile, la sua derivata è maggiore di N in modulo. Laddove non è derivabile, il rapporto incrementale destro è maggiore di N in modulo (basta prendere un "dente di sega").

Chiaramente $\|f - g\| < \varepsilon$ per costruzione ma la g appartiene all'insieme complementare a F_N. ∎

Chiaramente gli stessi argomenti valgono se si fosse considerata la derivata sinistra. Poiché l'unione numerabile (ed a maggior ragione finita) di insiemi di prima categoria è ancora un insieme di prima categoria, ne segue che le funzioni continue che in almeno un punto ammettono rapporto incrementale destro oppure sinistro finiti, costituiscono un sottoinsieme di prima categoria nello spazio delle funzioni continue. A maggior ragione è di prima categoria l'insieme delle funzioni che in almeno un punto sono derivabili (con derivata finita). Infatti tali funzioni debbono avere rapporti incrementali finiti sia a sinistra che a destra ed inoltre debbono avere limite uguale. Segue facilmente il

Corollario 2.10.2 *È di prima categoria l'insieme delle funzioni appartenenti a Q tali che* *in almeno un punto di (a,b) ammettono $-\infty < D_-(x) \le D^-(x) < \infty$ e/o $-\infty < D_+(x) \le D^+(x) < \infty$*

Dimostrazione Siano dati gli insiemi $\cup_{N=1}^{\infty}\{f \in Q\,|\exists\ x \in [a, b - \frac{b-a}{N}]:\ 0 < h \le \frac{b-a}{N} \Rightarrow |\frac{f(x+h)-f(x)}{h}| \le N\} \stackrel{\rm def}{=} \cup_{N=1}^{\infty} F_N$ e $\cup_{N=1}^{\infty}\{f\,|\exists\ x \in [a + \frac{-b+a}{N}, b]:\ \frac{b-a}{N} \le h < 0 \Rightarrow |\frac{f(x+h)-f(x)}{h}| \le N\} \stackrel{\rm def}{=} \cup_{N=1}^{\infty} \tilde F_N$. Gli insiemi $\cup_{N=1}^{\infty}F_N \cup (\cup_{N=1}^{\infty}\tilde F_N)$ oppure $\cup_{N=1}^{\infty}F_N \cap \cup_{N=1}^{\infty}\tilde F_N$ sono certamente di prima categoria essendo intersezione oppure unione di insiemi di prima categoria per quanto dimostrato nel **Teorema**∎

Il **Teorema** ci dice che è di prima categoria l'insieme delle funzioni continue che in almeno un punto hanno $-\infty < D_+f(x) \le D^+f(x) < +\infty$. Ne segue che essendo Q completo, è di seconda categoria e denso il complementare che è costituito dalle funzioni che *in ogni punto* ammettono derivata superiore destra oppure inferiore destra infinita ossia dalle funzioni che in ogni punto ammettono una delle seguenti cinque possibilità : i) $D_+(x) = D^+(x) = +\infty$, ii) $D_+(x) = D^+(x) = -\infty$, iii) $D_+(x) = -\infty, D^+(x) = +\infty$, iv) $-\infty < D_+(x) \wedge D^+(x) = +\infty$, v) $-\infty = D_+(x) \ \wedge\ D^+(x) < +\infty$. Si tenga ad ogni modo presente che non in tutti i punti può aversi una qualsiasi delle i)–v). Vale infatti il seguente Teorema (vedi [Bo] pag. 122–123 [2.10.2] e [E]). Nell'esercizio 3) di **18.5** si dimostra lo stesso risultato nell'ipotesi che la funzione sia derivabile.

Teorema 3.10.2 *Data una funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, se $C > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ allora si verifica*

1) esiste una infinità non–numerabile di punti x, x'

i) $\overline{\lim}_{h\to 0^+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \le C$ *ii)* $\overline{\lim}_{h\to 0^-} \dfrac{f(x'+h)-f(x')}{h} \le C$

Se $c < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ allora si verifica

2) esiste una infinità non–numerabile di punti x, x'

iii) $\underline{\lim}_{h\to 0^-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge c$ *iv)* $\underline{\lim}_{h\to 0^+} \dfrac{f(x'+h)-f(x')}{h} \ge c$

Dimostrazione Sia data la funzione $g(x) = f(x) - f(a) - k\dfrac{x-a}{b-a}$ e $k > f(b) - f(a)$ per cui $g(a) = 0$ mentre $g(b) = f(b) - f(a) - k < 0$. Prendiamo un valore s tale che $0 = g(a) > s > g(b)$ e consideriamo l'insieme $g^{(-1)}([s, M]) \cap [a,b]$ dove $M = \max\limits_{[a,b]} g(x)$. Tale insieme è compatto e quindi ammette massimo che chiamiamo x_s e che non può essere uguale a b in quanto essendo $x_s \in g^{(-1)}([s,M])$ si ha $g(x_s) \ge s$. Per costruzione inoltre si ha $x > x_s \Rightarrow g(x) < g(x_s)$ e ciò implica $\sup\limits_{x > x_s} \dfrac{g(x)-g(x_s)}{x-x_s} \le 0$; ne segue che $\overline{\lim}_{x\to x_s^+} \dfrac{g(x)-g(x_s)}{x-x_s} \le 0$; ossia $\overline{\lim}_{x\to x_s^+} \dfrac{f(x)-f(x_s)}{x-x_s} - \dfrac{k}{b-a} \le 0$;. Dalla continuità della funzione $g(x)$ segue che $g(x_s) = s$ e quindi se cambia s cambia x_s da cui la non–numerabilità . La i) di 1) è dimostrata.
Nella stessa situazione prendiamo $g^{(-1)}([m,s]) \cap [a,b] \ne \emptyset$ essendo $s > g(b)$ e dove $m = \min\limits_{[a,b]} g(x)$. In tal caso $g^{(-1)}([m,s]) \cap [a,b]$ ha un minimo y_s che non può essere uguale ad a in quanto $g(a) = 0$.

[2.10.2] L'enunciato e la dimostrazione che si trovano nel libro sono quelli del **Teorema 5.10.2**. Inoltre la seconda parte dell'enunciato, che corrisponderebbe alla ii), è sbagliato in quanto lì si dice che il limite superiore sinistro è maggiore od uguale ad un numero c che è strettamente minore di $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Infatti nella edizione degli anni novanta contenente alcune pagine in più , si corregge tale errore dicendo che il limite inferiore destro è minore o uguale ad un numero che è strettamente maggiore di $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

In modo analogo a prima abbiamo che $x < y_s \ \Rightarrow \ g(x) > g(y_s)$ per cui $\sup\limits_{x<y_s} \dfrac{g(x)-g(y_s)}{x-y_s} \leq 0$; ne segue che $\overline{\lim}_{x\to y_s^-} \dfrac{g(x)-g(y_s)}{x-y_s} \leq 0$; ossia $\overline{\lim}_{x\to y_s^-} \dfrac{f(x)-f(y_s)}{x-y_s} - \dfrac{k}{b-a} \leq 0$; e la conclusione è la ii) di 1).
Per ottenere le altre si deve prendere $k < f(b) - f(a)$ $\blacksquare$

Enunciamo e dimostriamo ora il seguente Teorema. (vedi [S] dove si dice che il risultato è ottenibile attraverso una diretta applicazione delle tecniche usate per dimostrare il **Teorema**). Le uniche referenze in cui ho trovato la dimostrazione sono [BG] e [Br1] pag.143 dove però è ottenuta come corollario di un teorema più generale e secondo l'opinione di chi scrive è meno diretta della seguente. Altre referenze dove si cita tale risultato senza dimostrazione sono [Br] e [O] pag. 46, righe 22 e 23 dall'alto.

Teorema 4.10.2 *È di prima categoria l'insieme delle funzioni di Q le quali, in almeno un punto di (a,b) ammettono derivata bilatera infinita*

Osservazioni i) Di conseguenza è di seconda categoria il sottoinsieme di X delle funzioni che in almeno un punto di (a,b) ammetono derivata bilatera infinita ii) Nell'enunciato si intende che se a destra la derivata è $\pm\infty$ allora a sinistra è $\pm\infty$ (hanno lo stesso segno).

Dimostrazione Sia S l'insieme delle funzioni di Q le quali, in almeno un punto di (a,b) ammettono derivata bilatera infinita.

$F_{n,m} = \Big\{ f \in Q \mid \exists\, x \in [a + \dfrac{b-a}{n}, b - \dfrac{b-a}{n}],\ \exists\, \xi_{n,m} > 0,\ \lambda_{n,m} \leq \dfrac{b-a}{n}$ indipendenti da f, $\lambda_{n,m} - \xi_{n,m} > \frac{1}{m} : \xi_{n,m} \leq |h| \leq \lambda_{n,m} \ \Rightarrow \ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq n \Big\}$ e sia

$E_{n,m} = \Big\{ f \in Q \mid \exists\, x \in [a + \dfrac{b-a}{n}, b - \dfrac{b-a}{n}],\ \exists\, \xi_{n,m} > 0,\ \lambda_{n,m} \leq \dfrac{b-a}{n}$ indipendenti da f, $\lambda_{n,m} - \xi_{n,m} > \frac{1}{m} : \xi_{n,m} \leq |h| \leq \lambda_{n,m} \ \Rightarrow \ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq -n \Big\}$

Chiaramente si ha $S \subset \cup_{n=2}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} (F_{n,m} \cup E_{n,m})$. Infatfi se $Q(h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $h \neq 0$, Q è una funzine continua di h e quindi $Q^{-1}[n,+\infty)$ è un insieme chiuso che contiene un intervallo chiuso. Vogliamo dimostrare che $F_{n,m} = \overline{F}_{n,m}$ e $\overset{\circ}{F}_{n,m} = \emptyset$ (lo stesso dicasi per $E_{n,m}$). Cominciamo dalla chiusura. Sia $f_k \to f$ una successione dove $f_k \in F_{n,m}$. Per ogni k vi è un x_k e quindi una sottosuccessione x_{k_j} tale che $x_{k_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} x_o$ e $x_o \in [a + \frac{b-a}{n}, b - \frac{b-a}{n}]$. Scriviamo quindi $\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \geq g_1 - \sum\limits_{i=2}^{5} |g_i|$ e $g_1 = \dfrac{f_{k_j}(x_{k_j}+h) - f_{k_j}(x_{k_j})}{h}$, $g_2 = \dfrac{f(x_o+h) - f_{k_j}(x_o+h)}{h}$, $g_3 = \dfrac{f_{k_j}(x_o+h) - f_{k_j}(x_{k_j}+h)}{h}$, $g_4 = \dfrac{f_{k_j}(x_{k_j}) - f_{k_j}(x_o)}{h}$, $g_5 = \dfrac{f_{k_j}(x_o) - f(x_o)}{h}$. Procedendo esattamente come prima nel caso del **Teorema** si ha:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \xi_{n,m} < |h| < \lambda_{n,m}\ \dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} > n - 4\varepsilon$ da cui $\geq n$

Ne segue che $f \in F_{n,m}$. Dobbiamo far vedere ora che $\overset{\circ}{F}_{n,m} = \emptyset$. Basta chiaramente far vedere che $\overline{F^c}_{n,m} = X$. $F^c_{n,m}$ è l'insieme delle funzioni per le quali, in ogni punto si verifica:

$F^c_{n,m} = \Big\{ f \in Q : \forall\, x \in [a + \dfrac{b-a}{n}, b - \dfrac{b-a}{n}],\ \forall\, 0 < \xi < \lambda < \dfrac{b-a}{n},\ \lambda - \xi > \dfrac{1}{m},\ \exists\, h_o : \xi < |h_o| < \lambda\ \wedge\ n > \dfrac{f(x+h_o)-f(x)}{h_o} \Big\}$.

Vogliamo dimostrare che le funzioni *lineari a tratti* e la cui pendenza nei punti in cui sono derivabili è sufficientemente elevata sono un sottoinsieme di $F^c_{n,m}$ per qualsiasi n, m. Poiché tali funzioni sono dense in Q, ne segue che $\overline{F^c}_{n,m} = Q$.

Fissiamo quindi $x \in [a+\dfrac{b-a}{n}, b-\dfrac{b-a}{n}]$ ed il valore intero $n \geq 2$. Siano dati ξ, λ tali che $0<\xi<\lambda<\dfrac{b-a}{n}$, $\lambda-\xi=\dfrac{1}{m}$ e siano $a'=x_o+\xi$, $b'=x_o+\lambda$. Consideriamo una funzione lineare a tratti $p(x)$ tale che $p(a)=p(b)=0$ (altrimenti si considera $p(x)+\alpha x+\beta$ con opportuni α e β). Se $T<\frac{1}{2m}$ è la distanza massima sull'asse delle x fra due estremi consecutivi, dal Teorema di Weieestrass sulle funzioni continue segue che esiste $y\in(\xi,\lambda)$ tale che $p(x)=p(y)$ e quindi $\dfrac{p(x+h_o)-p(x)}{h_o}=0<n$, $x+h_o=y$. ∎

Quanto abbiamo ottenuto da **Teorema 4.10.2** ci dice che nel senso della categoria quasi nessuna funzione ammette in almeno un punto derivata bilatera che sia $+\infty$ oppure $-\infty$. Riunendo con il **Teorema** possiamo dire che nel senso della categoria *quasi nessuna funzione in almeno un punto ammette derivata unilatera finita e neppure derivata bilatera infinita.* A questo punto ci si può chiedere *quanto numerose siano nel senso della categoria le funzioni che in almeno un punto ammettano derivata unilatera infinita. Contrariamente a quanto ci si aspetterebbe dai teoremi testé dimostrati, esse sono numerose.* Sono quindi rare le funzioni che in almeno un punto ammettono derivata bilatera infinita mentre sono numerose le funzioni che in almeno un punto ammettono derivata unilatera infinita. Le funzioni non derivabili in nessun punto che comunemente si trovano nei libri di testo appartengono ai casi citati (vedi **Appendice 7.**. Trovare funzioni non derivabili che in nessun punto ammettono derivata unilatera infinita è molto difficile (vedi [Be], [Pe], [Mo], [Ma] e le referenze internamente scritte alcune delle quali testé citate,) e la ragione sta nel contenuto del teorema che segue (vedi [S]) [3.10.2]. Prima di darne enunciato e dimostrazione cerchiamo di capire perché **non è di prima categoria l'insieme delle funzioni continue che in almeno un punto ammettono derivata destra infinita**. Tale insieme, detto $\tilde S$ è sottoinsieme di $\cup_{n=2}^{\infty}\cup_{m=1}^{\infty}(\tilde F_{n,m}\cup\tilde E_{n,m})$, dove

$\tilde F_{n,m}=\Big\{f\in Q \,|\, \exists\, x\in[a,b-\dfrac{b-a}{n}],\ \exists\,\xi_{n,m}>0,\ \lambda_{n,m}\leq\dfrac{b-a}{n}$ indipendenti da f, $\lambda_{n,m}-\xi_{n,m}>\dfrac{1}{m}:\ \xi_{n,m}\leq h\leq\lambda_{n,m}\ \Rightarrow\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq n\Big\}$ e

$\tilde E_{n,m}=\Big\{f\in Q \,|\, \exists\, x\in[a,b-\dfrac{b-a}{n}],\ \exists\,\xi_{n,m}>0,\ \lambda_{n,m}\leq\dfrac{b-a}{n}$ indipendenti da f, $\lambda_{n,m}-\xi_{n,m}>\dfrac{1}{m}:\ \xi_{n,m}\leq h\leq\lambda_{n,m}\ \Rightarrow\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq -n\Big\}$

Se $\tilde S$ fosse di prima categoria e volessimo riproporre l'argomento di prima dovremmo dimostrare che $\tilde F^c_{n,m}=\Big\{f\in Q:\forall\ x\in[a,b-\dfrac{b-a}{n}],\ \forall\ 0<\xi<\lambda<\dfrac{b-a}{n},\ \lambda-\xi>\dfrac{1}{m},\ \exists\ h_o:\xi<h_o<\lambda\ \wedge\ n>\dfrac{f(x+h_o)-f(x)}{h_o}\Big\}$ $n\geq 2$, è denso in X. Questo è impossibile in relazione alla seconda parte del ragionamento precedente. Infatti non è specificato se $x<a'<b'$ oppure $b'<a'<x$. È essenziale la possibilità di avere rapporti incrementali arbitrariamente grandi a sinistra oppure a destra. Nel caso in questione si possono avere grandi solo a destra.

Diamo ora enunciato e dimostrazione del Teorema di Saks

Teorema di S.Saks *La classe delle funzioni continue in* $(0,1)$ *che hanno derivata destra*

(3.10.2) Forse è il caso di ricordare che Saks fu ucciso per mano della Gestapo durante l'occupazione della Polonia. Purtroppo numerosi appartenenti alla fiorentissima scuola matematica polacca nata all'inizio del ventesimo secolo, furono uccisi per mano dei Nazisti. Chi fosse interessato può leggere gli articoli [Ku] e [Ku1]. In tali articoli si ripercorre la storia della matematica sviluppatasi in Polonia dai primi del 1900 fino alla seconda guerra e vengono elencati alcuni (quelli più noti) fra coloro che furono purtroppo uccisi. Si possono inoltre leggere due delle pagine iniziali del volume di *Fundamenta Mathematicae* che venne pubblicato nel 1945 per avere un'idea di quanto accadde (le pagine sono in formato jpg) ed il link per il loro scaricamento si può trovare accanto al link per il file presente

$+\infty$ in un insieme avente la potenza del continuo, è di seconda categoria in ogni sfera aperta dell'insieme Q (4.10.2)

Prima ci vuole un lemma

Lemma *Sia $x(t)$ una funzione continua in (a,b) e supponiamo che si abbia la condizione $|x(t)-mt+n|<\frac{b-a}{8}\varepsilon$ con $m>0$ e $\varepsilon>0$ per ogni $a\le t\le b$ (successivamente indicata con (1)). Allora esiste nell'intervallo $(a,\frac{a+b}{2})$ un insieme non–numerabile di punti c per i quali si ha $x(t)-x(c)\ge(m-\varepsilon)(t-c)$ per ogni $c\le t\le b$ (successivamente indicata con (2))*(5.10.2).

Dimostrazione Supponiamo che i punti c ($a\le c\le\frac{a+b}{2}$) soddisfacenti la (2) siano in quantità numerabile e quindi siano essi $\{c_j\}$. Sia η un numero positivo arbitrario. Consideriamo l'insieme T costituito dai punti t che verificano la relazione $x(t)-x(a)\le(m-\varepsilon)(t-a)+\sum_{n:c_n\le t}\frac{\eta}{2^n}$ (successivamente indicata con (3)) dove la somma è estesa solamente ai valori di n per cui $c_n\le t$. Sia T_0 un maggiorante di T. Facciamo vedere che $T_0\ge\frac{a+b}{2}$. Infatti se t è un punto arbitrario di $(a,\frac{a+b}{2})$ che verifica la (3) ma non appartiene alla successione $\{c_j\}$ allora per ipotesi esiste $u>t$ tale che $x(u)-x(t)<(m-\varepsilon)(u-t)$ in quanto se così non fosse allora, per ipotesi, si avrebbe $x(u)-x(t)\ge(m-\varepsilon)(u-t)$ per ogni $u>t$ e questo implicherebbe che $t\in\{c_k\}$. Riunendo il tutto otteniamo $x(u)-x(a)=((x(u)-x(t))+(x(t)-x(a))\le(m-\varepsilon)(u-t)+(m-\varepsilon)(t-a)+\sum_{n:c_n\le t}\frac{\eta}{2^n}$ e dunque $\forall\ t\in(a,\frac{a+b}{2})\ \exists\ u>t\colon\ u\in T$ da cui segue che t non può essere un maggiorante dell'insieme T. Il secondo caso è quello per cui $t\in\{c_i\}$ per cui supponiamo che $t=c_k$. Abbiamo per ipotesi la relazione $x(c_k)-x(a)\le(m-\varepsilon)(c_k-a)+\sum_{n:c_n\le c_k}\frac{\eta}{2^n}$. Inoltre per continuità della funzione $x(t)$ abbiamo che esiste $u>c_k$ tale che $x(u)-x(c_k)<\frac{\eta}{2^k}$ e sommando si ottiene $x(u)-x(a)=(x(u)-x(c_k))+(x(c_k)-x(a))\le\frac{\eta}{2^k}+(m-\varepsilon)(c_k-a)+\sum_{n:c_n\le c_k}\frac{\eta}{2^n}\le\frac{\eta}{2^k}+(m-\varepsilon)(u-a)+\sum_{n:c_n\le c_k}\frac{\eta}{2^n}\le(m-\varepsilon)(u-a)+\sum_{n:c_n\le u}\frac{\eta}{2^n}$. Ne segue che $u>c_k$ verifica la (3) e quindi t non può essere maggiorante dell'insieme T. Abbiamo fino ad ora stabilito che un qualsiasi maggiorante dell'insieme T appartiene all'intervallo $(a,\frac{a+b}{2})$. Ora possiamo stabilire la catena di disuguaglianze per T_0 maggiorante dell'insieme T $\frac{b-a}{4}\varepsilon\ge|x(T_0)-m_{T_0}+n|+|x(a)-ma+n|\ge|(x(T_0)-m_{T_0}+n))-(x(a)-ma+n)|\ge m(T_0-a)-|x(T_0)-x(a)|\ge m(T_0-a)-(m-\varepsilon)(T_0-a)-\sum_{n:c_n\le T_0}\frac{\eta}{2^n}>\varepsilon(T_0-a)-\eta>\frac{b-a}{2}\varepsilon-\eta$ e questo è una contraddizione non appena η è piccolo.∎

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema di S.Saks

Dimostrazione Sia K una qualsiasi sfera aperta nello spazio $\mathcal{C}\overset{\text{def}}{=}C((0,1));\mathbf{R})$ ed $\{A_n\}$ una successione di insiemi tale che $A_n\subset\mathcal{C}$ ed inoltre $\overset{\circ}{\overline{A}}_n=\emptyset$. Si mostrerà che nell'insieme $K\setminus\cup_{k=1}^{\infty}A_k$ vi è almeno una funzione la cui derivata destra esiste ed è $+\infty$ in un insieme di punti P tale che $P'=P$ (da cui la non–numerabilità). Ora K è di seconda categoria (non è completo(6.10.2)) e quindi $K\setminus\cup_{n=1}^{\infty}A_k$ è di seconda categoria. Poiché K è arbitraria ne segue che l'insieme delle funzioni che in ogni punto di un insieme non–numerabile (che dipende dalla funzione) ammettono derivata destra uguale a $+\infty$ costituisce un insieme di seconda categoria in $\mathcal{C}$.

A tal fine si definisce: una successione di intervalli, una successione di funzioni $x_j(t)$, $0\le t\le1$, ed una successione di sfere aperte K_j in $\mathcal{C}$, di raggio r_j, che soddisfano le A)–E) seguenti.

(4.10.2) Per quanto mi è dato conoscere, non ho trovato in nessun libro da me consultato la riproposizione della dimostrazione. Al contrario il **Teorema** si trova in numerosi testi

(5.10.2) Ai fini della applicazione del lemma basta che i punti c siano due

(6.10.2) È un fatto ben noto che l'intervallo (0,1) non è uno spazio metrico completo e neppure lo spazio metrico $\mathcal{C}$ è completo con la metrica usuale del sup su (0,1). Una qualsiasi sfera aperta in $\mathcal{C}$ non è un insieme completo; ciononostante è di seconda categoria. Questo lo si vede osservando che è chiuso e non denso in alcun punto l'insieme delle funzioni f appartenenti a $\mathcal{C}$ tali che l'estremo superiore, preso in (0,1), è uguale ad un numero prefissato L.

$$\begin{cases} A) & K_0 = K, \quad K_{j+1} \subset K_j, \quad (j = 0,1,\ldots), \ \overline{K}_j \cap \overline{A}_j = \emptyset \ j \geq 1 \\ B) & x_j(t) = \text{ centro di } K_j \ (j = 0,1,\ldots), \ r_j \leq (j+1)^{-1} \\ C) & I_{n_1,n_2,\ldots,n_{j-1},n_j} \subset I_{n_1,n_2,\ldots,n_{j-1}} \quad I_{n_1,n_2,\ldots,n_{j-1},0} \cap I_{n_1,n_2,\ldots,n_{j-1},1} = \emptyset \\ & |I_{n_1,n_2,\ldots,n_{j-1},n_j}| \leq j^{-1} \quad (j \geq 1, \quad n_j = 0,1) \\ D) & x_j(t) = jt + c \text{ in ogni intervallo } I_{n_1,n_2,\ldots,n_{j-1},n_j} \\ E) & t \in I_{n_1,n_2,\ldots,n_j} \ \wedge \ u \in (b_{n_1,n_2,\ldots,n_{i+1}}, b_{n_1,n_2,\ldots,n_i}) \ (1 < i < j) \ \Rightarrow \ \dfrac{x_j(u) - x_j(t)}{u - t} > i - 2 \end{cases}$$

A parere di chi scrive la condizione E) potrebbe essere rimpiazzata dalla condizione $t = b_{n_1,n_2,\ldots,n_j} \ \wedge \ u \in (b_{n_1,n_2,\ldots,n_{i+1}}, b_{n_1,n_2,\ldots,n_i}) \ (1 < i < j) \ \Rightarrow \ \frac{x_j(u) - x_j(b_{n_1,n_2,\ldots,n_j})}{u - b_{n_1,n_2,\ldots,n_j}} > j - 1$ (che chiamiamo E'). Ne vedremo fra poco il motivo.

Supponiamo di avere dimostrato le proprietà A)–E). La successione $\{x_j\}$ è uniformemente convergente e quindi converge ad una funzione continua $x(t) \in K \setminus \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si dimostra ora che $x'_+(t)$ in un insieme perfetto di punti. Per una data successione $\{n_k\}$ costituita solamente da zero ed uno consideriamo il punto $t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots} \stackrel{\text{def}}{=} I_{n_1} \cap I_{n_1,n_2,} \cap I_{n_1,n_2,n_3} \cap \ldots \cap I_{n_1,n_2,\ldots,n_j}$ (facciamo vedere dopo che al variare di $\{n_k\}$, l'insieme ottenuto è un insieme perfetto). Sappiamo da E che $\frac{x_j(u) - x_j(t)}{u - t} > i - 2$ per $t \in I_{n_1,n_2,\ldots,n_j} \ \wedge \ u \in (b_{n_1,n_2,\ldots,n_{i+1}}, b_{n_1,n_2,\ldots,n_i})$ e $1 < i < j$; ne segue che $t < u$ (nel caso in cui $i = j - 1$ si avrebbe $t \in I_{n_1,n_2,\ldots,n_j}$ e $u \in (b_{n_1,n_2,\ldots,n_j}, b_{n_1,n_2,\ldots,n_{j-1}})$ per cui anche in questo caso $x \neq t$ anche se la loro distanza potrebbe ridursi a zero). Se $j > i > 1$ allora $t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,n_{j+1}\ldots} \in I_{n_1,n_2,\ldots,n_j} \ \Rightarrow \ b_{n_1,n_2,\ldots,n_i,} > u > t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots}$ e quindi si ha la disuguaglianza $\frac{x_j(u) - x_j(t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots})}{u - t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots}} > i - 2$. Passando al limite per $j \to +\infty$ si ha $\frac{x(u) - x(t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots})}{u - t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots}} > i - 2$ per $i = 1,2,\ldots$ e $b_{n_1,n_2,\ldots,n_i,} > u > t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots}$. La conseguenza è che $x'_+(t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots}) = +\infty$ in ogni punto di I che è un insieme perfetto in uno spazio completo ($[0,1]$) e quindi è non–numerabile (come dimostrato nel corollario 2.10.2). Rimane da far vedere ora che è perfetto l'insieme dei punti $t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots}$ al variare di $\{n_k\}$. Il punto $t_{n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots}$ è limite di una successione convergente i cui punti sono estremi degli intervalli $I_{n_1,n_2,\ldots,n_j} = I_{n_1,n_2,\ldots,n_j,0,\ldots,0}$ che quindi appartengono all'insieme che stiamo studiando. Dunque il risultato è acquisito. Rimangono da verificare le proprietà A)–E). Si effettua la dimostrazione per induzione. Supponiamo che gli oggetti citati in A)–E) siano stati già trovati per $j = 1,2,\ldots,r$. Vogliamo trovarli per $j = r + 1$. Sappiamo che $\overset{\circ}{\overline{A}}_r = \emptyset$ per cui in ogni intorno di $x_r(t)$, che è il centro di A_r, vi è un altro intorno (diciamo U) tale che $U \cap A_r = \emptyset$. Da questo segue che si può trovare una funzione continua $g(t)$, vicina a $x_r(t)$, tale che $g \in K_r \setminus \overline{A}_r$. Ora $x_r(t)$ è lineare in $I_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$. Applicando il Lemma si può determinare g abbastanza vicina a x_r ed in modo tale che esistano due punti $b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,0}$ e $b_{n_1,n_2,\ldots,n_{r+1},1}$ tali che $\frac{g(t) - g(b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_{r+1}})}{t - b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_{r+1}}} > r - 1$ per $b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_{r+1}} < t < b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_r}$. Ora modifichiamo leggermente $g(t)$ rimpiazzandola con funzione $h(t)$ lineare e con coefficiente $r + 1$ in una coppia di intervalli $\delta'_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ e $\delta''_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ appartenenti ambedue a $I_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ i cui estremi destri sono i punti $b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,0}$ e $b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,1}$ rispettivamente. Possiamo fare in modo che la lunghezza di tali intervalli sia abbastanza piccola (ad esempio meno di $\frac{1}{j+1}$) ed inoltre $h(t)$ abbastanza vicino a $g(t)$ in modo tale da avere $h(t) \in K_r \setminus \overline{A}_r$ e $\frac{h(t) - h(b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_{r+1}})}{t - b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_{r+1}}} > r - 1$ per $b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_{r+1}} < t < b_{n_1,n_2,\ldots,n_r,n_r}$. La funzione $h(t)$ così ottenuta sarà la funzione $x_{r+1}(t)$ e gli intervalli $\delta'_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$, $\delta''_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ saranno gli intervalli ottenuti al passo $r + 1$, $I_{n_1,n_2,\ldots,n_r,0}$ e $I_{n_1,n_2,\ldots,n_r,1}$. Da ultimo prendiamo una sfera aperta con centro x_{r+1}, raggio minore di $\frac{1}{r+1}$ in modo tale che $K_{r+1} \subset K_r$ e $\overline{K}_{r+1} \cap \overline{A}_{r+1} = \emptyset$. Le proprietà A)–D) sono evidenti. Resta da far vedere la E). Il punto è che guardando alla dimostrazione sembra che sia necessaria una condizione tipo la E'). In altre parole sembra che la variabilità della t nella condizione E) non sia affatto necessaria ma sia sufficiente considerare

$t = b_{n_1,n_2,\ldots,n_j}$ ■

Le funzioni continue e mai derivabili sono "alquanto numerose" ed un campionario è dato nell' **Appendice 7**

Attraverso il Teorema di Baire si risolvano gli esercizi seguenti
1) È data la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ continua. Si definisce
$f_k(x) \doteq \int_0^x dx_1 f(x_1) \int_0^{x_1} dx_2 f(x_2) \ldots \int_0^{x_{k-1}} dx_k f(x_k)$
e si suppone che per ogni $x \in [0,1]$ esiste un valore di k (che sarà lo stesso per infiniti valori di x) tale che $f_k(x) = 0$. Se ne concluda che $f \equiv 0$ (se accade che $f_k \equiv 0$ la conclusione è ovvia. L'esercizio è preso da [Bo]

2) Si consideri la retta reale e si ordini l'insieme dei numeri razionali ossia si costruisca una corrispondenza $f\colon \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{N}$ che sia biunivoca. Sia $\mathbf{Q} = \cup_{r_k \in \mathbf{Q}} \{r_k\}$. Intorno a ciascun numero razionale e centrato in esso si consideri un intervallo aperto di lunghezza 2^{-k-n} dove k sta ad indicare il numero razionale mentre n è un numero intero positivo. Sia $A_{k,n}$ l'intervallo costruito e si consideri l'insieme $A \doteq \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} A_{k,n} \doteq \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Si dimostri che:

2.1) A è ovunque denso

2.2) Per ogni $\varepsilon > 0$, A può essere ricoperto da un'unione numerabile di intervalli aperti la somma delle cui misure è minore di ε (ha quindi *misura di Lebesgue nulla* (7.10.2))

2.3) *A non è un F_σ* ossia non può scriversi come unione numerabile di insiemi chiusi.

Dal terzo punto se ne conclude che non può esistere una funzione le cui discontinuità sono esattamente date da A pur avendo *misura di Lebesgue nulla*
Notare la profonda differenza fra tale insieme e l'insieme $\mathbf{Q}$. Per quest'ultimo valgono le prime due affermazioni ma non la terza ed infatti la funzione dell'esercizio **6.5**** ha proprio $\mathbf{Q}$ quale insieme delle sue discontinuità .

Al contrario l'insieme $\mathbf{Q}^c$ soddisfa la prima e terza affermazione ma non la seconda.

3) È dato un intervallo chiuso e limitato in $\mathbf{R}$; dimostrare che non può essere scritto come unione numerabile di insiemi chiusi disgiunti

4) Sia data la funzione continua $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$ per ogni $x > 0$. Si dimostri che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Dimostrazione di 1)
Supponiamo che $f(x_0) \neq 0$. Dalla continuità segue che esiste un intervallo aperto U che contiene x_0 e tale che $f(x) \neq 0$ per $x \in U$. Sia K un intervallo chiuso e limitato contenuto in U. Per ipotesi $\forall\, x \in K\ \exists k_x \mid f_{k_x} \neq 0$. Sia $A_j = \{x \in [0,1] \mid f_j(x) = 0\}$; A_j è un insieme chiuso (perché?)(8.10.2) e limitato ed inoltre $K = \cup_{j=0}^{\infty} K \cap A_j$. K è uno spazio metrico completo (perché?) (9.10.2) e quindi almeno uno degli insiemi $K \cap A_j$ ha interno non vuoto da cui segue che vi è un intervallo $B \subset K \cap A_j$ in cui $f_j \equiv 0$. Derivando si arriva a $f \equiv 0$ per $x \in B$ contrariamente all'ipotesi.

Dimostrazione delle affermazioni 2.

(7.10.2) Il concetto di misura di Lebesgue verrà affrontato in uno dei moduli successivi a quelli cui tale raccolta di esercizi si riferisce. Ad ogni modo la definizione di *insieme avente misura di Lebesgue nulla* è facile da enunciare (vedi l'esercizio **34.8*****).

(8.10.2) perché è la controimmagine continua di un insieme chiuso

(9.10.2) perché è un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo

2.1) $A \supset \mathbf{Q} \ \Rightarrow\ \overline{A} \supset \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$
2.2) La famiglia di intervalli $\{A_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ è unione numerabile di insiemi aperti la somma delle cui misure è maggiorata da $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. La intersezione $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$, essendo sottoinsieme di ciascun A_n, sarà ricopribile con intervalli aperti in quantità numerabile la somma delle cui misure è minore di $\frac{1}{2^{n-1}}$ *per ogni* n e quindi è verificata la seconda proprietà .
2.3) Il complementare di A è dato da $A^c = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=1}^{\infty} A_{k,n}^c \doteq \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ ed essendo $A_{k,n}^c = (-\infty, r_k - \frac{1}{2^{k+n}}] \cup [r_k + \frac{1}{2^{k+n}}, +\infty)$ un insieme chiuso ne segue che $B_n = \overline{B}_n$. Dunque si ha $A^c = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$.

Poiché $A^c \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ ne segue che $\overset{\circ}{A^c} = \emptyset$. Supponiamo ora che A possa scriversi come unione numerabile di insiemi chiusi ossia $A = \cup_{k=1}^{\infty} C_k$ dove $C_k = \overline{C}_k$. Si ha $\mathbf{R} = (\cup_{k=1}^{\infty} C_k) \cup (\cup_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n)$. $\overset{\circ}{B}_n = \emptyset$ e quindi, *essendo* $\mathbf{R}$ *di seconda categoria*, segue che almeno uno dei C_k deve avere interno non vuoto. Se si dimostra che $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, si entra in contraddizione con il fatto che A possa essere scritto come un insieme di tipo F_σ.
Sia dunque $p \in A$ e sia $S(p; s)$ una intervallo aperto con centro in p di lunghezza $2s$. Dobbiamo far vedere che $S(p; s) \not\subset A$. Infatti precedentemente abbiamo mostrato che A si può ricoprire con una unione di insiemi aperti la somma delle cui misure è piccola a piacere e quindi più piccola di $2s$ qualunque sia s.

Da ultimo facciamo notare come l'insieme A abbia *misura di Lebesgue nulla* ma sia di *seconda categoria* mentre A^c sia *prima categoria* ma abbia *misura di Lebesgue uguale ad* 1. Infatti essendo $A^c = \cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$ e $\overset{\circ}{B}_n = \emptyset$ ne segue che è di prima categoria ma ha chiaramente misura 1 essendo il complementare di un insieme di misura nulla. D'altro canto se A^c è di prima categoria, A deve essere di seconda categoria ossia si può scrivere come unione numerabile di insiemi $A = \cup_{k=1}^{\infty} U_k$ e $\overset{\circ}{\overline{U}}_{k_o} \neq \emptyset$ per almeno un k_o. Non vi è contraddizione con il fatto che A non è un F_σ in quanto non si richiede che tutti gli U_k siano chiusi.
La decomposizione della retta reale nell'unione di A e del suo complementare A^c è interessante in quanto mette in luce che *misura di Lebesgue* e *categoria* danno luogo ad insiemi di "grandezza" diversa. A^c ha misura uno ma è rappresentabile come unione di insiemi "pieni di buchi". D'altro canto A ha misura nulla ma se lo si scrive come unione numerabile allora A ed i suoi punti di accumulazione debbono avere interno non vuoto ossia debbono riempire una sferetta (oltre ad essere densi).

Dimostrazione di 3)

Supponiamo che $K = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ dove $\overline{C}_i = C_i$. Quindi si ha $K = \cup_{i=1}^{\infty} C_i = \cup_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{C}_i \cup_{i=1}^{\infty} \partial C_i$ da cui $K \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{C}_i = \cup_{i=1}^{\infty} \partial C_i$. $K \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{C}_i$ è un insieme chiuso e limitato e quindi compatto e quindi completo. Per il Teorema di Baire almeno un ∂C_j deve avere interno non vuoto e questo è impossibile se C_j è un insieme chiuso oppure aperto (vedi esercizio **9.1.5***).

Dimostrazione di 4)
Supponiamo che il limite non sia zero. Allora $\exists\ \varepsilon > 0 \colon \forall\ n > 0\ \exists\ x_n > n \colon |f(x_n)| \geq \varepsilon$. Essendo la funzione continua, intorno a ciascun x_n si può considerare un intorno aperto U_{x_n} tale che $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ x \in U_{x_n}$.
Sia ora $E_{n,j} \overset{\text{def}}{=} \{x\colon\ |f(xn)| < \frac{1}{j}\}$; si ha $\cap_{n=1}^{\infty} E_{n,\varepsilon} \subset [0, +\infty)$. Ora $E_{n,\varepsilon} = \overset{\circ}{E}_{n,\varepsilon}$ in quanto f è continua ed inoltre $\overline{E}_{n,\varepsilon} = [0, +\infty)$ in quanto qualunque sia l'aperto $O \subset [0, \infty)$, prendendo x sufficientemente piccolo si può arrivare ad avere $nx \in O$ e contemporaneamente $|f(xn)| < \varepsilon$. Ma allora $\cap_{n=1}^{\infty} E_{n,\varepsilon}$ è residuale e quindi è denso anche esso. Prendiamo quindi gli insiemi U_{x_n} di prima. *Per ogni* n, all'interno di U_{x_n} deve esservi un elemento di $\cap_{n=1}^{\infty} E_{n,\varepsilon}$ da cui la contraddizione ∎

Tra l'altro (anche se non entra nella dimostrazione) si ha $[0,+\infty)=\cap_{j=1}^\infty\cup_{k=1}^\infty\cap_{n=k}^\infty E_{n,j}$. Si ha pure $[0,+\infty)=\cup_{k=1}^\infty\cap_{n=k}^\infty E_{n,\varepsilon}$ per un certo $\varepsilon>0$. Infatti $[0,+\infty)=\cap_{j=1}^\infty\cup_{k=1}^\infty\cap_{n=k}^\infty E_{n,j}\subset\cup_{k=1}^\infty\cap_{n=k}^\infty E_{n,\varepsilon}$. D'altro canto $\cup_{k=1}^\infty\cap_{n=k}^\infty E_{n,j}\subset[0,+\infty)$ e quindi devono essere uguali.

Quello che ora facciamo è dare un'altra decomposizione della retta in due insiemi disgiunti A e B tali che A è di prima categoria ma ha misura piena mentre B è di seconda categoria ma ha misura nulla. Tale decomposizione è classica; si veda [O] pag. 6–9

Definizione *Si dice che* $\xi\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ *è un numero di Liouville se per ogni numero positivo* n *esiste un numero razionale* $\frac{p_n}{q_n}$, $(p_n,q_n)=1$, $q_n\in\mathbf{N}\backslash\{1\}$, $p_n\in\mathbf{Z}$ *tale che* $|\xi-\frac{p_n}{q_n}|<\frac{1}{q^n}$

Indichiamo con $\mathbf{L}$ i numeri di Liouville. Per ogni numero razionale $\frac{p}{q}$ con $(p,q)=1$ costruiamo l'insieme $(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n})$ e poi facciamone l'unione $\cup_{q=2}^\infty\cup_{p=-\infty}^\infty(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n})\stackrel{\text{def}}{=}\cup_{q=2}^\infty\cup_{p=-\infty}^\infty I_n(p,q)\stackrel{\text{def}}{=}G_n$. Poi definiamo $\cap_{n=1}^\infty G_n$. $L=(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\cap(\cap_{n=1}^\infty G_n)$. Ciascun G_n è aperto per costruzione e contiene $\mathbf{Q}$ per cui $\overline{G}_n=\mathbf{R}$. Il complementare di $\mathbf{L}$ è dato da $\mathbf{L}^c=\mathbf{Q}\cup(\cap_{n=1}^\infty G_n)^c=\mathbf{Q}\cup(\cup_{n=1}^\infty G_n^c)$. $\overset{\circ}{\overline{G_n^c}}=\overset{\circ}{\overline{\mathbf{R}\backslash G_n}}=\overset{\circ}{(\mathbf{R}\backslash\overset{\circ}{G_n})}=(\mathbf{R}\backslash\overset{\circ}{G_n})=\mathbf{R}\backslash\overline{G_n}=\emptyset$ e quindi $\mathbf{L}^c$ è un insieme di prima categoria. La completezza di $\mathbf{R}$ impone che $\mathbf{L}$ sia di seconda categoria. D'altra parte considerando $\mathbf{L}\cap(-l,l)$ (l intero) possiamo avere una stima superiore della somma delle lunghezze degli intervalli aperti interessati. Si avrebbe $\sum_{q=2}^\infty\sum_{p=-lq}^{lq}\frac{2}{q^n}=\sum_{q=2}^\infty\frac{2(2l+1)q}{q^n}\le\frac{2(2l+1)}{n-2}$. Poiché $\mathbf{L}\subset G_n$ per ogni n ne segue che la stima della somma delle misure degli intervalli aperti che lo contengono è nulla. Anche in questo caso si può dire $\mathbf{L}\neq F_\sigma$. Se infatti $\mathbf{L}=\cup_{k=1}^\infty F_k$ $F_k=\overline{F}_k$, poiché $F_k\subset\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ si ha $\overset{\circ}{F}_k=\emptyset$ e quindi $\mathbf{R}=\mathbf{L}\cup\mathbf{L}^c$ sarebbe scrivibile come unione di insiemi di prima categoria che è assurdo essendo $\mathbf{R}$ completo.

Referenze

[B] Banach Stefan (1892 Cracovia (all'epoca nell'impero Austro–Ungarico) – 1945 Leopoli (ora Ucraina): *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen,* Studia Mathematica vol.3 (1931) pp.174–179,

[Be] Besicovitch A.S.: *Discussion der stetigen Funktionen im Zusammenhang mit der Frage über ihre Differentiierbarkeit,* Bulletin de l'Académie des Sciences de Russie, vol.19 (1925), pp.527–540.

[BG] Bruckner A.M.–Garg K.M.: *The Level Structure of a Residual Set of Continuous Functions,* Transactions of the Americam Mathematical Society, Volume 232 (Sep.,1977), 307–321

[Bo] Boas R.P.: *A primer of real functions,* Collana "The Carus mathematical monograph, number thirteen" pubblicato da "The mathematical association of America" distribuito da John Wiley and Sons Inc. New York 1960,

[Br] Bruckner A.M.: *The differentiability Properties of Typical Functions in* $C[a,b]$, American Mathematical Monthly, Volume 80, Issue 6(Jun. – Jul., 1973), 679–683

[Br1] Bruckner A.M.: *Differentiation of real functions,* CRM Monographs series, AMS Ed. Volume 5, 1994

[E] Erdos P.: *Some remarks on Set Theory,* The Annals of Mathematics, Second Series, Volume 44, Issue 4, (Oct.,1943), 643–646

[F] Fort M.K., Jr.: *A Theorem Concerning Functions Discontinuous on a Dense Set,* American Mathematical Monthly, volume 58, Issue 5(Jun.–Jul.,1951), 408–410

[HS] Hewitt E.–Stromberg K.: *Real and Abstract Analysis,* Springer–Verlag Eds., 1965

[K] Kuratowski Kasimir (Varsavia 1896 – Varsavia 1980): *Topology Vol.1,* Academic Press 1966

[Ku] Kuzawa Mary Grace: *Fundamenta Mathematicae: An Examination of its Founding and Significance,* Transactions of the American Mathematical Society, vol.77, Issue 5(May,1970) pp.485–492

[Ku1] Sister Mary Grace Kuzawa, Holy Family College: *Correction to Fundamenta Mathematicae: An Examination of its Founding and Significance,* Transactions of the American Mathematical Society, vol.78, Issue 8 (Oct.,1971) pp.874–875.

[M] Mazurkiewicz Stefan (Varsavia 1888 – Grodzisk (vicino Varsavia) 1945): *Sur les fonctions dèrivables,* Studia Mathematica, vol.3 (1931) pp.92–94,

[Ma] Maly J.: *Where the Continuous Functions Without Unilateral Derivatives are Typical,* Transactions of the American Mathematical Society, vol.283, Issue 1(Nov.,1984) pp.169–175

[Mo] Morse A.P.: *A continuous function with no unilateral derivative,* Transactions of the American Mathematical Society, vol.44, Issue 3(Nov.,1938) pp.496–507

[N] Natanson I.P.: *Theory of functions of a real variable,* Vol.II Frederick Ungar Publishing Co 1960

[O] Oxtoby J.C.: *Measure and Category,* Springer–Verlag Eds., 1996

[Pe] Pepper: *On continuous functions without a derivative*, Fundamenta Mathematicae vol.12 (1928) pp.244–253.

[S] Saks Stanislaw (1897 Kalisz–Polonia – 1942 Varsavia): *On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions,* Fundamenta Mathematicae vol.19 (1932) pp.211–219

[ST] Singer I.M. – Thorpe J.A.: *Lezioni di Toplogia Elementare e di Geometria,* Boringhieri editore 1980,

[Y] Yosida K.: *Functional Analysis,* Springer–Verlag, Third edition, 1971