§9 Appendice 1: Su due articoli di V.Volterra (1860–1940) pubblicati negli anni 1880–1881 (il primo esempio di una funzione continua e derivabile sui reali con derivata limitata ma non integrabile secondo Riemann in nessun intervallo)[(1.9)]

Nella presente appendice vengono discussi alcuni paragrafi di due articoli scritti dal matematico italiano `Vito Volterra` (Ancona 3–5–1860 – Roma 11–10–1940) quando era allievo di `Ulisse Dini` (Pisa 14–11–1845 —- 28–10–1918) [(2.9)] alla Scuola Normale Superiore di Pisa. Tali articoli sono stati pubblicati sul *Giornale di Matematica diretto dal Prof. G.Battaglini* Vol.XIX 1881, pag.76–86 (successivamente indicato con articolo (1)) e 333–372 (successivamente indicato con articolo (2)) il cui titolo rispettivamente è: *"Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue"*, *"Sui principi del calcolo integrale"*.

Dal primo dei due articoli riportiamo (`I`) la dimostrazione secondo cui non può esistere una funzione che sia continua sui razionali di un determinato intervallo della retta reale e discontinua sugli irrazionali dello stesso insieme. Nella **Appendice 2** riportiamo un teorema generale che comprende anche questo risultato ma la cui dimostrazione si basa sul teorema di Baire.

Dal secondo articolo riportiamo (`II`) la dimostrazione per cui si può costruire una funzione su di un dato intervallo che sia derivabile in tutti i punti ma tale che la derivata non è una funzione integrabile secondo Riemann in nessun sottointervallo. Quindi la funzione data non è riottenibile come integrale della sua derivata in nessun sottointervallo dell'intervallo di definizione. Tale funzione non consente di affermare: *se una funzione* $f\colon [a,b]\to \mathbf{R}$ *è derivabile con derivata limitata (ossia* f' *esiste per ogni valore di* $x\in(a,b)$ *ed inoltre* $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f'|\le M$*), allora è vera la relazione* $f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(\xi)d\xi$ *per ogni* $x\in[a,b]$. Se $f'(x)$ fosse illimitata allora (vedi l'esercizio **21.8*****) sarebbe immediato verificare per la funzione in oggetto $f(x)\neq f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(\xi)d\xi$ in quanto l'integrale di Riemann, per essere definito, deve avere l'integrando limitato. Per quello che ho potuto leggere, Volterra è stato il primo a dare l'esempio che ora porta il suo nome. Tale "manchevolezza" dell'integrale di Riemann è stata parzialmente superata da H.Lebesgue (28/06/1875 (Francia) – 26/07/1941 (Francia)) attraverso *l'integrale di Lebesgue* che consente di risalire alla funzione $f(x)$ non appena $f'(\xi)$ è limitata (la misurabilità di f' segue direttamente dal fatto di essere una derivata). Sembra che proprio l'esempio di Volterra sia all'origine delle ricerche di Lebesgue circa una nuova tecnica di integrazione. Quest'ultima purtuttavia non risolve pienamente il problema di ricostruire una funzione a partire dalla sua derivata in quanto, secondo la teoria dell'integrale di Lebesgue, è necessario che $|f'(x)|$ sia anche essa integrabile secondo Lebesgue ed è facile produrre funzioni che non verificano ciò . Si prenda la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin x^{-2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin x^{-2}-2x^{-1}\cos x^{-2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Poiché $\int_a^b |f'(x)|dx$ non esiste se l'intervallo $[a,b]$ contiene l'origine (il conto è alla fine), non può esistere $\int_a^b f(x)dx$ dove l'integrale è quello di Lebesgue. Tale ulteriore problema è stato risolto dal matematico Arnaud Denjoy (1884 (Francia) – 1974 (Francia)) con una procedura che egli ha chiamato di *Totalizzazione* (vedi [D], [G]).

(1.9) Il simbolo **Es:** significa la presenza di una o più domande a cui ancora non si è data una risposta o per motivi di tempo o perché non si è riusciti nell'intento

(2.9) Al sito internet http://www-history.mcs.st-and.ac.uk si possono trovare le biografie di molti matematici viventi e non; inoltre vi sono molti "link" su siti di interesse matematico

`I` Cominciamo dal primo risultato. `Volterra` chiama funzioni *punteggiate discontinue* le funzioni definite in un certo intervallo che hanno in esso un numero infinito di discontinuità. Dette funzioni debbono inoltre avere, in ogni sottointervallo dell'intervallo di definizione, dei punti di continuità[(3.9)]
L'affermazione precisa dimostrata da `Volterra` è la seguente:

Proposizione *Se una funzione punteggiata discontinua ammette in ogni sottointervallo dell'intervallo di definizione dei punti di discontinuità allora non può esistere un'altra funzione punteggiata discontinua che sia continua nei punti in cui è discontinua la prima e discontinua nei punti in cui è continua la prima*

Prima di dare la dimostrazione vogliamo fare qualche esempio per capire. Una funzione punteggiata discontinua è per esempio $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}0 & x=n^{-1}\\ 1 & \text{altrimenti}\end{cases}$. Infatti ha infinite discontinuità nell'intervallo $[0,1]$ e negli intervalli della forma $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$ la funzione è continua. Un altro esempio di funzione punteggiata discontinua è quella data nell'esercizio **6.5****. A differenza della precedente, quest'ultima non ammette alcun intervallo in cui non abbia delle discontinuità e quindi soddisfa le ipotesi dell'affermazione del `Volterra`. Se ne conclude che non può esistere una funzione che sia continua sui razionali e discontinua sugli irrazionali. Per la dimostrazione bisogna introdurre la definizione di *oscillazione* di una funzione limitata in un intervallo. Essa è una grandezza definita da $\omega[f;a,b]\doteq\sup_{x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)|$ e si dimostra essere uguale a $\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)$ (per la dimostrazione si veda l'esercizio **32.8****). La *oscillazione* in un punto c è definita come $\omega[f;c]=\inf_{[a,b]\ni c}\omega[f;a,b]$, $a<c<b$. Si dimostra che una funzione è continua in c se e solo se $\omega[f;c]=0$ (dimostrare). Da tale definizione segue subito che: *se una funzione f è continua in un punto c allora* $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ [a_\varepsilon,b_\varepsilon]\ a_\varepsilon<c<b_\varepsilon$ *t.c.* $\omega[f;a_\varepsilon,b_\varepsilon]<\varepsilon$. La dimostrazione è una conseguenza della definizione di estremo inferiore e superiore.

Dimostrazione L'ipotesi è la esistenza di una funzione f punteggiata discontinua che in ogni sottointervallo in cui è definita ha delle discontinuità. Procediamo per assurdo e supponiamo che esista un'altra funzione punteggiata discontinua g con la caratteristica di essere continua laddove è discontinua la prima e viceversa.
Essendo ambedue funzioni punteggiate discontinue deve esistere un intervallo $[a,b]$ in cui tutte e due le funzioni hanno delle continuità. Sia $x_o\in(a,b)$ in cui f è continua. Dalla definizione di oscillazione in x_o e di estremo superiore segue che per ogni $\varepsilon>0$ possiamo trovare un intervallo $[a_1,b_1]\subset(a,b)$ in cui la oscillazione di f è più piccola di ε ossia $\omega[f;y]<\varepsilon$ per ogni $y\in[a_1,b_1]$. Per lo stesso motivo, essendo g punteggiata discontinua, dentro $[a_1,b_1]$ vi sarà un punto $x_1\in(a_1,b_1)$ in cui g è continua e quindi dato $\frac{\varepsilon}{2}$ troveremo un intervallo $[a_2,b_2]$ in cui la oscillazione di g sarà minore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Proseguendo in questo modo troveremo una successione di intervalli $[a_n,b_n]$ in cui la oscillazione di f e g è minore di $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Chiaramente $b_n-a_n\to 0$ per $n\to+\infty$ in quanto se così non fosse vorrebbe dire che esiste un intervallo in cui la oscillazione delle due funzioni è minore di $\frac{\varepsilon}{2^n}$ con n arbitrariamente grande. Ciò equivale a dire che le due funzioni sono continue in detto intervallo e questo è contrario all'ipotesi. Dunque l'intervallo $[a_n,b_n]$ tende ad un punto ed in questo punto le due funzioni sarebbero entrambe continue contraddicendo il fatto che f e g debbano avere continuità e quindi discontinuità complementari[(4.9)] ∎

(3.9) Per la verità Volterra usa la frase <<*....chiama poi Hankel funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni linearmente discontinue tali, che in ogni porzione dell'intervallo in cui sono definite, si possono trovare dei punti in cui sono continue* >>. È ragionevole pensare che con la parola "porzione" comprenda ogni sottointervallo dell'intervallo di definizione.

(4.9) Vi è una differenza con quanto scritto dall'autore nell'articolo citato. Volterra sembra sempre indicare intervalli aperti (almeno nella notazione). Ora non è detto che una successione di intervalli aperti, tutti incapsulati ed il cui

II Veniamo al secondo risultato che è alquanto più elaborato del primo.

Proposizione *Costruire una funzione definita in un intervallo (anche infinito) che sia derivabile in tutti i punti ma tale che la derivata non è una funzione integrabile secondo Riemann in nessun sottointervallo.*

Dimostrazione Sia dato l'intervallo $[0,1]$ e consideriamo la successione di punti $\{\alpha^1_j\}$ $j=1,2\dots$ tali che: i) $\alpha^1_1=\frac{3}{4}$ ii) $\alpha^1_j\to 0$ per $j\to+\infty$ iii) $\alpha^1_{j+1}-\alpha^1_{j+2}<\alpha^1_j-\alpha^1_{j+1}<\alpha^1_{j-1}-\alpha^1_j<\dots<\alpha^1_1-\alpha^1_2<1-\alpha^1_1=\frac{1}{4}$. Inoltre l'unico punto limite è zero e quindi, in opportuna notazione si ha $(\{\alpha^1_j\}_{j=1}^\infty)'=0$.

A partire poi dal punto α^1_j e verso la sua sinistra consideriamo la successione di punti $\{\alpha^2_{j,k}\}$ $k=1,2,\dots$ che verifica: i) $\alpha^2_{j,k}\in(\alpha^1_{j+1},\alpha^1_j)$ ii) $\alpha^2_{j,k+2}<\alpha^2_{j,k+1}<\alpha^2_{j,k}<\dots<\alpha^2_{j,1}<\alpha^1_j$ iii) $\alpha^2_{j,k+1}-\alpha^2_{j,k+2}<\alpha^2_{j,k}-\alpha^2_{j,k+1}<\dots<\alpha^1_j-\alpha^2_{j,1}=\frac{1}{16}(\alpha^1_j-\alpha^1_{j+1})$ iv) $\alpha^2_{j,k}\to\alpha^1_{j+1}$ per $k\to+\infty$ ed è l'unico punto limite della successione $\alpha^2_{j,k}$. I punti limite dell'insieme numerabile di successioni $\{\alpha^1_j\}_{j=1}^\infty$, $\{\alpha^2_{j,k}\}_{j,k=1}^\infty$, sono costituiti dai punti $0,\alpha^1_j$ $j=2,\dots,$ e quindi sono un sottoinsieme dell'insieme di punti che finora si è costruito.

Osservazioni
1) Notare che a sinistra del punto 1 vi è l'intervallo $(\alpha^1_1,1)$ di lunghezza $\frac{1}{4}$ che non contiene alcun punto dell'insieme finora costruito.
2) $\alpha^2_{j,k+1}-\alpha^2_{j,k+2}<\dots<\alpha^1_j-\alpha^2_{j,1}=\frac{1}{16}(\alpha^1_j-\alpha^1_{j+1})<\frac{1}{16}(\alpha^1_1-\alpha^1_2)<\frac{1}{16}\frac{1}{4}$

Si ripete la stessa costruzione per ogni j e si passa a quella successiva. A partire dal punto $\alpha^2_{j_1,j_2}$ (j_2 prima era k) si costruisce una successione di punti $\{\alpha^3_{j_1,j_2,k}\}$ tale che: i) $\alpha^3_{j_1,j_2,k}\in(\alpha^2_{j_1,j_2+1},\alpha^2_{j_1,j_2})$ ii) $\alpha^3_{j_1,j,k+1}<\alpha^3_{j_1,j,k}$, iii) $\alpha^3_{j_1,j_2,k+1}-\alpha^3_{j_1,j_2,k+2}<\alpha^3_{j_1,j_2,k}-\alpha^3_{j_1,j_2,k+1}<\dots<\alpha^2_{j_1,j_2}-\alpha^3_{j_1,j_2,1})=\frac{1}{64}(\alpha^2_{j_1,j_2}-\alpha^2_{j_1,j_2+1})$ ed inoltre $\alpha^2_{j_1,j_2}$ è l'unico punto limite della successione $\{\alpha^3_{j_1,j_2,k}\}_{k=1}^\infty$. In tal modo i punti limite delle successioni $\{\alpha^1_j\}_{j=1}^\infty$, $\{\alpha^2_{j,k}\}_{j,k=1}^\infty$, $\{\alpha^3_{j_1,j_2,j_3}\}_{j_1,j_2,j_3=1}^\infty$, è dato da 0, $\{\alpha^1_j\}$ $j=2,\dots,$ $\{\alpha^2_{j_1,j_2}\}$ $j_2=2,\dots,$ che di nuovo è un sottoinsieme dell'insieme descritto.

Osservazioni
1) In questo caso si ha che a sinistra di ogni punto $\alpha^1_{j_1}$ vi è l'intervallo $(\alpha^2_{j_1,1},\alpha^1_{j_1})$ di lunghezza minore di $\frac{1}{16}(\alpha^1_{j_1}-\alpha^1_{j_1+1})$

Si prosegue indefinitamente nello stesso modo ottenendo una infinità numerabile di punti $\alpha^n_{j_1,j_2,\dots j_n}$ $n=1,2,\dots,$ $j_k=1,2,\dots$ tali che $\alpha^k_{j_1,\dots,j_{k-1},j_k}-\alpha^k_{j_1,\dots,j_{k-1},j_k+1}<\alpha^k_{j_1,\dots,j_{k-1},j_k-1}-\alpha^k_{j_1,\dots,j_k}<\dots<\alpha^{k-1}_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1}}-\alpha^k_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1},1}=\frac{1}{2^{2k}}(\alpha^{k-1}_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1}}-\alpha^{k-1}_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1}+1})<\frac{1}{2^{2k}}$.

A sinistra di ogni punto $\alpha^k_{j_1,\dots,j_k}$ vi è l'intervallo $(\alpha^{k+1}_{j_1j_2\dots j_k,1},\alpha^k_{j_1j_2\dots j_k})$ di lunghezza minore di $\frac{1}{2^{2k}}(\alpha^{k-1}_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1}}-\alpha^{k-1}_{j_1,j_2,\dots,j_{k-1}+1})$ senza punti del gruppo appena costruito.

Chiamiamo G il gruppo di punti appena costruito e sia $\overline{G}$ l'insieme dato da G e dai suoi punti limite. G è numerabile in quanto ad ogni passo si crea una quantità numerabile di punti. Non è detto che G' sia numerabile anche se ad ogni passo si crea una quantità numerabile di punti limite in quanto nella definizione di $\overline{G}$ entrano in gioco i punti limite dei punti limite dei punti limite ... che possono dar luogo ad una quantità che come vedremo è non numerabile.

Tutti i punti consecutivi che stanno nell'intervallo $(0,\alpha^1_1)$ distano fra loro meno di $\frac{1}{4}$. Tutti i

diametro tende a zero, abbia intersezione vuota (vedi l'esercizio **6.1.5**).

punti consecutivi che stanno nell'intervallo $(\alpha^1_{j_1+1},\alpha^2_{j_1,1})$ distano fra loro meno di $\frac{1}{64}$ (5.9).I punti consecutivi che stanno nell'intervallo $(\alpha^2_{j_1,j_2+1},\alpha^3_{j_1,j_2,1})$ distano fra loro meno di $\frac{1}{(64)^2}$ (6.9).
Indichiamo inoltre con S_1 la somma delle distanze fra punti consecutivi di $\overline{G}$ che distano almeno $\frac{1}{4}$. Chiaramente gli unici punti sono dati da α^1_1 e 1 per cui $S_1=1-(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$.
Con S_2 indichiamo la somma delle distanze fra punti consecutivi di $\overline{G}$ che distano almeno $\frac{1}{2^4}$. Per costruzione gli unici punti sono ancora α^1_1 e 1 e quindi $S_2<\frac{1}{3}$.

Invece Volterra scrive la sommatoria $S_2<(1-\alpha^1_1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha^1_k-\alpha^2_{k,1})<\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{16}(\alpha^1_k-\alpha^1_{k+1})<\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}<\frac{1}{3}$ inserendo intervalli i cui estremi sono punti di G e la cui distanza è chiaramente minore di $\frac{1}{64}$ (ben meno di $\frac{1}{16}$; vedi la precedente osservazione)
Con S_3 indichiamo la somma delle distanze fra punti consecutivi di $\overline{G}$ che distano almeno $\frac{1}{2^6}$ e di nuovo abbiamo solo α^1_1, 1 da cui $S_3<\frac{1}{3}$. Anche in questo caso l'autore inserisce intervalli i cui estremi sono punti consecutivi di $\overline{G}$ e la cui distanza è ben minore di $\frac{1}{64}$. In ogni caso si ha

$$S_3<(1-\alpha^1_1)+\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha^1_k-\alpha^2_{k,1})+\sum_{k,m=1}^{+\infty}(\alpha^2_{k,m}-\alpha^3_{k,m,1})<\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\frac{1}{4}+\sum_{k,m=1}^{+\infty}\frac{1}{64}(\alpha^2_{k,m}-\alpha^2_{k,m-1})<$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{64}(\alpha^1_k-\alpha^1_{k-1})<\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{21}{64}<\frac{1}{3}.$$

Proseguendo si ha $S_h<\frac{1}{3}\ \forall h\geq 1$. Dividiamo ora l'intervallo $[0,1]$ in 2^{2n} parti uguali; la somma degli intervalli che non contengono punti di $\overline{G}$ è strettamente minore della somma degli intervalli fra due punti consecutivi di $\overline{G}$ la cui distanza è maggiore o uguale a $\frac{1}{2^{2n}}$ e quest'ultima è minore di $\frac{1}{3}$. Di conseguenza la somma delle lunghezze degli intervalli che contengono punti di $\overline{G}$ è maggiore di $\frac{2}{3}$ e questo per ogni valore di n. Ne segue che l'insieme $\overline{G}$ non può essere numerabile.
Consideriamo inoltre un intervallo $(a,b)\subset[0,1]$. Può accadere che $(a,b)\cap\overline{G}=\emptyset$ oppure se $\xi\in(a,b)\cap\overline{G}$ allora possono accadere due cose. La prima è che $\xi\in G$ ed allora alla sua sinistra vi è un intervallo che non contiene punti di $\overline{G}$. La seconda è che $\xi\in G'\backslash G$ ed allora per definizione di punto di accumulazione vi è una successione $\{\beta_i\}$ di punti di G che converge a ξ. Ma a sinistra di ciascun punto di G vi è un intervallo che non contiene punti di $\overline{G}$ e quindi all'interno di (a,b) vi è un intervallo che ha intersezione vuota con $\overline{G}$ che è come dire $\overset{\circ}{\overline{G}}=\emptyset$ (G è *non denso in alcun punto*)

Il lettore/trice che conosce cosa è *l'insieme di Cantor* di misura positiva non mancherà di ravvisare nella precedente costruzione qualcosa di molto analogo. Va detto però che sebbene `Georg F.L.P.Cantor` (Georg Ferdinand Ludwig Phillipp) San Pietroburgo (Russia) 3/3/1845–Halle (Germania) 6/1/1918) avesse quindici anni più di Volterra, non viene mai nominato da quest'ultimo in nessuno dei due lavori citati.

(5.9) l'autore a questo punto scive $\frac{1}{16}$ che è certamente superiore a $\frac{1}{64}$ ma a me sembra inappropriato in quanto per costruzione l'intervallo $(\alpha^2_{1,1},\alpha^1_1)$ è minore di $\frac{1}{16}$ della lunghezza dell'intervallo (α^1_2,α^1_1) che è più piccola di $\frac{1}{4}$. Esattamente Volterra scrive :*Consideriamo il gruppo di punti formato da tutti i punti che così vengono a costruirsi e da tutti i loro punti limite. Tutti i punti compresi entro l'intervallo $(\alpha'_1 0)$ sono tali che le distanze fra due consecutivi sono minori di $\frac{1}{2^2}$; tutte le distanze fra i punti consecutivi compresi entro gli intervalli $(\alpha''_{n,1}\alpha'_{n+1})$ sono minori di $\frac{1}{2^4}$; quelle fra punti consecutivi compresi entro gli intervalli $(\alpha'''_{n,m,1}\alpha''_{n,m+1})$ sono minori di $\frac{1}{2^6}$ e così di seguito."*
Si tenga presente che con la notazione $(\alpha'_1 0)$ Volterra intende l'intervallo $(0,\alpha'_1)$ in quanto scrivendo la successione $\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3,\ldots\alpha'_n\ldots$ ciascun α'_j sta a sinistra dei precedenti
(6.9) l'autore a questo punto dice $\frac{1}{64}$ e vale la stessa osservazione di prima

Un breve parallelo fra gli insiemi G, $\overline{G}$, e l'insieme di Cantor $F\cap[0,1]$ è forse utile. Le proprietà salienti dell'insieme di Cantor (sia quello ternario ossia a misura di Lebesgue nulla sia uno di quelli a misura positiva) sono: 1) $F'=F$, 2) $\overset{\circ}{F}=\emptyset$. La prima implica che F è chiuso [(7.9)] e quindi lo spazio metrico $(F;d)$ è esso stesso uno spazio metrico completo. Unitamente ad uno dei corollari del Teorema di Baire la 1) ci dice che F è non numerabile (quest'ultima proprietà di solito viene dimostrata direttamente facendo vedere che F "è più grande" dei razionali che "popolano" l'intervallo $[0,1]$). La 2) insieme con la 1) ci dice che F è non denso in alcun punto.

Nel nostro caso abbiamo le proprietà 1) $G\not\subset G'$ in quanto i punti $\alpha^k_{j_1,j_2,\ldots,j_{k-1},1}$ sono punti isolati per G. Non abbiamo d'altro canto la proprietà $G'\subset G$ in quanto G è numerabile mentre G' è non numerabile avendo misura positiva. La 2) è uguale ossia $\overset{\circ}{\overline{G}}=\emptyset$.

Prima di costruire la funzione che andiamo cercando definiamo la funzione $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\overline{G}\\ 1 & \text{altrove}\end{cases}$.
Nel linguaggio dell'epoca e che viene usato negli articoli da cui queste note sono prese, la funzione appena descritta è *punteggiata discontinua*. Infatti preso un qualsiasi intervallo (a,b), dentro di esso si può trovare un altro intervallo (a',b') tale che $(a',b')\cap\overline{G}=\emptyset$. Ne segue che nei punti $\xi\in(a',b')$ la funzione è continua. Nei punti di $\overline{G}$ la funzione è discontinua a causa del fatto che $\overset{\circ}{\overline{G}}=\emptyset$. I salti che la funzione fa nei punti di $\overline{G}$ sono pari a 1. Poiché la misura dei punti di $\overline{G}$ non è minore di $\frac{2}{3}$ ne segue che la funzione costruita non è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$.

Si può anche dare una espressione analitica della funzione data. Si definisca una funzione $\varphi(x)$ che vale 0 se $x\in\overline{G}$ mentre se $x\notin\overline{G}$ allora esiste un intervallo $(a,b)\ni x$ e tale che $(a,b)\cap\overline{G}=\emptyset$. Si definisce $\varphi(x)$ come la più piccola delle distanze $x-a$ oppure $b-x$. Se $x=\frac{1}{2}(a+b)$ allora $\varphi(x)=\frac{1}{2}(a+b)$. Chiaramente la funzione $\varphi(x)$ è continua all'interno dell'intervallo (a,b) ed inoltre non supera mai il valore $\frac{1}{8}$

A questo punto definiamo $f(x)=\varphi(x)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(1-\varphi(x))^k$ che vale 0 quando $\varphi(x)=0$ e 1 quando $\varphi(x)<1$.

La funzione caratteristica di un insieme di Cantor di misura positiva ha le stesse proprietà della $f(x)$ ossia non è integrabile.

Costruiamo ora una funzione su $[0,1]$ propedeutica alla funzione che andiamo cercando le cui caratteristiche sono state enunciate all'inizio di questa appendice.
Prendiamo un intervallo $(a,b)\subset[0,1]$ tale che $(a,b)\cap\overline{G}=\emptyset$ e sia $c=\frac{1}{2}(a+b)$ il punto di mezzo. Consideriamo la funzione $A(x)=(x-a)^2\sin\frac{1}{x-a}$ in (a,c) e sia $x_1\in(a,c)$ il punto più vicino a c in cui $A(x)$ ha un massimo di ordinata M. In (c,b) consideriamo poi la funzione $B(x)=(b-x)^2\sin\frac{1}{x-b}$ e sia $x_2\in(c,b)$ il punto più vicino a c in cui la funzione ha un massimo la cui ordinata è M chiaramente. In (a,b) definiamo la funzione

$$f(x;a,b)=\begin{cases}(x-a)^2\sin(x-a)^{-1} & a<x\le x_1\\ (x_1-a)^2\sin(x_1-a)^{-1} & x_1\le x\le x_2\\ (b-x)^2\sin(x-b)^{-1} & x_2\le x<b\end{cases}$$

(7.9) Non è equivalente alla chiusura (ossia al fatto che i punti di accumulazione di un insieme appartengono all'insieme stesso) in quanto la relazione di chiusura non esclude che vi possano essere punti isolati che per definizione non sono di accumulazione

$f(x;a,b)$ è una funzione derivabile in $[a,b]$. $f'(a^+;a,b)=0$, $f'(b^-;a,b)=0$, $\overline{\lim}_{x\to a^+} f'(x;a,b) = +1$, $\underline{\lim}_{x\to b^-} f'(x;a,b) = -1$ (in altri termini la derivata prima non è continua in a e b ed inoltre i suoi valori "oscillano" continuamente fra i valori ± 1). In ogni intervallo $(a,b)\cap\overline{G}=\emptyset$ ripetiamo la stessa costruzione. Chiaramente $|f(x;a,b)|\le \min\{(b-x)^2,(x-a)^2\}\le (b-a)^2$; $f'(x;a,b)$ è maggiorata da $2(b-a)+1$. Finalmente definiamo la funzione $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x;a,b) & x\in(a,b)\ \wedge\ (a,b)\cap\overline{G}=\emptyset \\ 0 & x\in\overline{G}\end{cases}$$

$\varphi(x)$ è chiaramente derivabile negli intervalli aperti che non contengono punti di G. Sia ora $x\in\overline{G}$; il rapporto incrementale $\Delta_x \doteq \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ è uguale a $\frac{\varphi(x+h)}{h}$ essendo $\varphi(x)=0$. Se $x+h\in\overline{G}$ allora $\Delta_x=0$; se $x+h\in\overline{G}^c$ allora cade in uno degli intervalli aperti che non contengono punti di $\overline{G}$. In tal caso $|\varphi(x+h)|\le h^2$ (se infatti $x\notin(a,b)\ \wedge\ x+h\in(a,b)$ allora vuol dire che $b-a<|h|$) e quindi la derivata è nulla. Nei punti di $y\in\overline{G}$ si ha $\overline{\lim}_{x\to y} f'(x;a,b)=+1$ e $\underline{\lim}_{x\to y} f'(x;a,b)=-1$. La somma delle lunghezze degli intervalli che contengono punti del gruppo è maggiore di $\frac{2}{3}$ per cui qualunque sia l'insieme degli intervalli che racchiude G non potrà mai verificare il criterio di *Du Boys–Reymond* (vedi esercizi **32.8****, **33.8*****, **34.8*****, **35.8***** del capitolo sugli integrali). Ne consegue che $\varphi'(x)$ non è integrabile secondo Riemann e quindi $\varphi(x)$ non può essere ottenuta attraverso l'integrale di $\varphi'(x)$. Naturalmente è fattibile riottenere $\varphi(x)$ a partire dalla sua derivata in un opportuno intervallo che ha intersezione nulla con $\overline{G}$ essendo ivi la derivata una funzione continua e limitata con al massimo due punti di discontinuità.

La funzione $\varphi(x)$ è del tutto analoga a quella contenuta a pag.119–120 di [GO]. È interessante un confronto con la funzione dell'esercizio **21.8*****. Tale funzione ha la derivata illimitata in qualsiasi intervallo contenente l'origine e quindi non è riottenibile attraverso l'integrale esteso ad un intervallo che contiene l'origine.

Una volta costruita la funzione $\varphi(x)$ per l'intervallo $[0,1]$ consideriamo quegli intervalli (a,b) tali che: 1) $(a,b)\cap\overline{G}$, 2) $(a,b)\subset(a',b')\Rightarrow (a',b')\cap\overline{G}\neq\emptyset$. All'interno di $[a,b]$ eseguiamo una costruzione di un gruppo di punti, detto G_{ab}, aventi la stessa caratteristica di G come sottoinsieme di $[0,1]$. Definiamo la funzione $\varphi_{a,b}\overset{\text{def}}{=}(b-a)\varphi(\frac{x-a}{b-a})\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ che ha le seguenti proprietà : 1) $\varphi_{a,b}(x)=0$ se $x\in\overline{G}_{a,b}$, 2) è derivabile, 3) $\overline{\lim}_{x\to x_o}\varphi_1'(x)=+1$, $\underline{\lim}_{x\to x_o}\varphi_1'(x)=-1$ if $x_o\in\overline{G}_{a,b}$. e lo facciamo per tutti gli intervalli (a,b) descritti prima. In tal modo risulta definita una funzione su $[0,1]$, detta $\varphi_1(x)$, tale che: 1) $\varphi_1(x)=0$ se $x\in\overline{G}$ oppure $x\in(a,b)$ dove (a,b) soddisfa le condizioni 1) e 2) di prima, 2) $\varphi_1(x)$ è derivabile, 3) $\overline{\lim}_{x\to x_o}\varphi_1'(x)=+1$, $\underline{\lim}_{x\to x_o}\varphi_1'(x)=-1$ se $x_o\in\cup_{a,b}\overline{G}_{a,b}$, 4) $|\varphi_1'(x)|\le 3$

Definiamo $G_1=\overline{G}\cup_{a,b}\overline{G}_{ab}$

Successivamente si prendono tutti quegli intervalli aperti (c,d) tali che 1) $(c,d)\cap\overline{G}_1=\emptyset$, 2) $c',d')\supset(c,d)\Rightarrow (c',d')\cap\overline{G}_1\neq\emptyset$. Si ripete la costruzione di prima ottenendo la funzione $\varphi_2(x)$ e così via e contemporaneamente si definiscono $G_2, G_3,\ldots$.

Definiamo la funzione $\psi(x)=\varphi(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{3^{2k}}$. Tanto la serie che la serie dei termini derivati converge uniformemente in $[0,1]$ per cui $\psi(x)$ è una funzione derivabile. Sia ora (α,β) un qualsiasi aperto di $[0,1]$. Poiché $\overset{\circ}{\overline{G}_k}$ per ogni k, certamente esiste un intervallo $(c,d)\subset(\alpha,\beta)$ tale che i suoi estremi sono punti di $\overline{G}_n$ per un certo n. La funzione $\dfrac{\varphi_n(x)}{3^{2n}}$ verifica $\displaystyle\limsup_{x\to y}\frac{\varphi_n'(x)}{3^{2n}} = +\frac{1}{3^{2n-1}}$, $\displaystyle\liminf_{x\to y}\frac{\varphi_n'(x)}{3^{2n}} = -\frac{1}{3^{2n-1}}$ per ogni $y\in\overline{G}_n$ e inoltre non è integrabile nell'intervallo

(c,d). Le funzioni $(\varphi(x), \frac{\varphi_1(x)}{3^2}, \frac{\varphi_2(x)}{3^4}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(x)}{3^{2n-2}})$ hanno derivata continua in (c,d); le funzioni $(\frac{\varphi_{n+1}(x)}{3^{2n+2}}, \frac{\varphi_{n+2}(x)}{3^{2n+4}}, \ldots)$ verificano $-\frac{3}{8}\frac{1}{3^{2n}} \leq \liminf_{x\to y} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k'(x)}{3^{2k}} \leq \limsup_{x\to y} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k'(x)}{3^{2k}} \leq \frac{3}{8}\frac{1}{3^{2n}}$ e $\frac{3}{8}\frac{1}{3^{2n}} < \frac{3}{3^{2n}}$. Ora usiamo il fatto che $\limsup_{x\to y} \varphi'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k'(x)}{3^{2k}} = \lim_{x\to y} \varphi'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi_k'(x)}{3^{2k}} + \limsup_{x\to y} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi_k'(x)}{3^{2k}} \geq \varphi'(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi_k'(y)}{3^{2k}} + \limsup_{x\to y} \frac{\varphi_n'(x)}{3^{2n}} - \limsup_{x\to y} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k'(x)}{3^{2k}} > \varphi'(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi_k'(y)}{3^{2k}} + 3^{-2n+1} - \frac{3}{8}3^{-2n} > \varphi'(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi_k'(y)}{3^{2k}}$. Ripetendo il ragionamento per lim inf si ottiene

$$\liminf_{x\to y} \varphi'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k'(x)}{3^{2k}} < \varphi'(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi_k'(y)}{3^{2k}}.$$

Ne segue che la funzione $\psi'(x)$ è discontinua in tutti i punti di $\overline{G}_n \cap (c,d)$ e quindi non è integrabile su (c,d). Non è integrabile quindi neanche su (a,b) da cui la non integrabilità di $\psi'(x)$ in ogni intervallo. ∎

L'articolo (2) richiama l'articolo (1); non dipende da esso ma il contenuto dell'articolo (1) è preludio di (2). Il riferimento agli articoli di Volterra si può trovare in diversi libri ed articoli.

• Il primo a mia conoscenza (e probabilmente più celebre) è [L]. A pag. 100 l'autore cita espressamente Volterra anche se richiama solamente il giornale contenente gli articoli senza indicare le pagine e dice che la funzione di Volterra si costruisce su di un insieme perfetto. Ciò non è vero ed infatti nell'articolo (2) Volterra non dice che ogni punto dell'insieme è punto di accumulazione dell'insieme stesso. Volterra dice solamente a pag. 334 che considera un insieme di punti *di seconda specie* e che (nel linguaggio moderno) hanno misura non nulla e sono non densi in alcun punto. Per la sua concreta costruzione si richiama all'articolo (1). Cosa voglia dire *"di seconda specie"* non è del tutto chiaro (probabilmente non numerabile) ma se uno si va a vedere cosa c'è scritto nell'articolo (1) scopre che tra pag.80 e pag.82 costruisce l'insieme in questione che ha le caratteristiche descritte.

• [H], pag.461. Anche in questo caso l'autore richiama solamente il giornale contenente gli articoli di Volterra senza citare le pagine ed anche lui dice che la funzione di Volterra si costruisce su di un insieme perfetto. Inoltre nel libro di Hobson si costruisce una funzione che, se ristretta ad uno qualsiasi degli intervalli aperti che formano il complementare di un insieme di Cantor di misura positiva, verifica il teorema fondamentale del calcolo intergrale. Volterra invece, come abbiamo visto va oltre e per così dire "distrugge" l'integrabilità in qualsiasi intervallo. Allo stesso modo Lebesgue a pag.101 parla espressamente di *"condensazione delle singolarità* per indicare tale fatto.

• [Ha] pag. 539–540

• [D] pag. 186. Anche in questo caso vi sono delle imprecisioni nella citazione.

• [Go] pag.210–211 che però non cita affatto gli articoli di Volterra.

•[GO] pag.119. In questo caso si richiama l'articolo (2) anche se la prima pagina citata ha il numero sbagliato ma soprattutto, di nuovo, non vi è alcun riferimento all'articolo (1). Inoltre gli autori "partono" da un insieme di Cantor di misura positiva che, come noto, è un insieme perfetto ed abbiamo già detto che l'insieme di Volterra non è perfetto. Anche in questo caso, per la funzione che viene costruita si possono fare le considerazioni precedenti circa la mancata "distruzione" della integrabilità in ogni intervallo

• [Haw] pag.54 e 109. È un bel libro in cui si tratta l'argomento con cura anche dal punto di vista storico. Tra l'altro sono richiamati correttamente tutti e due gli articoli di Volterra all'origine di questa appendice.

• [GO1] pag.139–140

• Il bell'articolo [BL] (si veda pure [B] pag.33). Anche qui l'autore cita solamente l'articolo (2). Tra l'altro esso richiama anche [H] ma con la pagina sbagliata (490 al posto di 461). La citazione di Bruckner è di particolare interesse in quanto è fatta dall'autore per poter dimostrare il seguente risultato: *Un qualsiasi sottoinsieme* $F_\sigma \subset \mathbf{R}$ *e di prima categoria è l'insieme dei punti di discontinuità della derivata di una qualche funzione* (il viceversa è pure vero; vedi la **Appendice 2**).

• [C]

• [G] pag. 35–36 ma non cita Volterra

Dimostriamo che $\int_0^1 dx|f'(x)| = +\infty$ dove $f(x)$ è la funzione data a pag.1. $f'(x)$ consta di due parti. La prima parte è data dalla funzione $2x\sin x^{-2}$ che ha una discontinuità eliminabile nell'origine. Dunque è integrabile secondo Riemann (e quindi anche secondo Lebesgue grazie al teorema secondo cui se una funzione è integrabile secondo Riemann, allora è integrabile secondo Lebesgue). La seconda parte di $f'(x)$ è $-2x\cos x^{-2}$ e quindi dobbiamo studiare $\int_0^1 \frac{|\cos x^{-2}|}{x}dx$. Cambiando variabile $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ si ottiene $\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} dt\frac{|\cos t|}{t} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^\infty \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt\frac{|\cos t|}{t}$ dove $t_k = \frac{\pi}{2}+k\pi$. Ne segue $\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} dt\frac{|\cos t|}{t} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt|\cos t| = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{t_{k+1}} = +\infty$

Osservazioni 1) L'integrale $\int_0^1 \frac{\cos x^{-2}}{x}dx$ esiste come integrale improprio (di Riemann). 2) Le relazioni $|\cos t| \geq |\cos t|^2 = \frac{1+\cos 2t}{2}$ e il fatto che $\int_1^{+\infty} dt\frac{\cos 2t}{t}$ esista come integrale improprio, fanno sì che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} dt\frac{|\cos t|}{t}$ non esista. Tale dimostrazione non funziona con l'integrale di Lebesgue

Referenze

[B] Bruckner A.M.: *Differentiation of real functions,* CRM Monographs series, AMS Ed. Volume 5, 1994

[BL] Bruckner A.M., Leonard J.L.: *Derivatives,* American Mathematical Monthly, Volume 73, Issue 4, Part 2, 1966 24–56.

[C] Chatterji S.D.: *A Frequent Oversight Concerning the Integrability of Derivatives,* American Mathematical Monthly, Volume 95, No. 8 (Oct.,1988), 758–761

[D] Denjoy A.: *Mémoire sur la Dérivation et son calcul inverse*, Gauthier–Villars 1954

[G] Gordon R.A.: *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, AMS 1995

[Go] Goffman C.: *Real Functions*, Reinhart, New York, 1960

[GO] Gelbaum B.R., Olmstedt J.M.H.: *Controesempi in analisi matematica,* Mursia 1964

[GO1] Gelbaum B.R., Olmstedt J.M.H.: *Theorems and Counterexamples in Mathematics,* Springer 1990

[H] Hobson E.W.: *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series,* second edition, volume 2, Cambrige University Press, 1921

[Ha] Halperin I.: *Discontinuous Functions with the Darboux Property,* American Mathematical Monthly, Volume 57, Issue 8 (Oct.,1950), 539–540

[Haw] Hawkins T.: *Lebesgue Theory of Integration – Its Origins and Development,* Chelsea Publishing Company, 1970

[L] Lebesgue H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonction primitives,* Chelsea Publishing Company, Bronx, New York 1928.