CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 1

Prova Scritta

10 Luglio 2001

1. Provare la convergenza e calcolare il valore del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}} \ln(1 + x^{\frac{3}{2}}) dx.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{\ln^2|x|}{2}\right)$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

3. Discutere, al variare di $x \in \mathbf{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3^{5n} + 5^{3n}) x^n.$$

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln^2 x \left(\frac{\ln x + \ln(\cot x)}{(x^x - 1)^2} \right) \right)$$

5. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x|y|^\alpha \cos \frac{1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$