Int 2 - dim livello 1

martedì 6 ottobre 2009

20.14

*Teoria della misura

1) Siano $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k \subseteq \dots$ misurabili. Provare che $\lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda_n(A_k)$

2) Siano E_i misurabili con $\lambda_n(E_i)=0$. Allora $\lambda_n(\cup E_i)=0$. Applicazione: $\lambda_1(\mathbb{Q})=0$; $\lambda_2\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\times[0,1]\right)=0$.

* Integrali 2-dim.

3) Siano $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: F \longrightarrow \mathbb{R}$ con $E, F \subseteq \mathbb{R}$ misurabili.
Se $[(f\otimes g)(x,y) = f(x)g(y)] \in L^1(E\times F)$ allora

$$\int_{E\times F} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_E f(x)\,dx\right)\left(\int_F g(y)\,dy\right).$$

4) Siano $\alpha, \beta \geq 0$ e $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$. Provare che $f \in L^1([0,1]\times[0,1])$ e calcolare

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} x^\alpha y^\beta\,dx\,dy$$

5) $E = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1;\ x^2+y^2-2x \geq 0,\ x \geq 0\}$; $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ y^3 & \text{se } y<0. \end{cases}$ Provare che $f \in L^1(E)$ e calcolare $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$.

6) Determinare il volume dell'insieme $T = \{(x,y,z): 0 \leq y \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}\}$

7) Sia E la regione limitata del piano delimitata dalle curve
$x^2+y^2=10$ e $xy=3$ $(x\geq 0, y\geq 0)$.
Provare che $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(1+y^2)^2} \in L^1(E)$ e calcolare $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$

8) Provare che esistono $E \subseteq \mathbb{R}^2$ misurabile e $f \in L^1(E)$ tali che

$$I = \int_0^1 \left\{\int_x^1 \sin(y^2)\,dy\right\} dx = \int_E f(x,y)\,dx\,dy\,;$$

calcolare poi I.

9) Momento d'inerzia di un semidisco di raggio a rispetto all'asse centrale

1) Sia $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
Determinare $\Pi_{x,y}(E)$ e $E(z)$ per ogni $z \in \Pi_z(E)$
$\Pi_z(E)$

2) Sia $T = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.
Calcolare $\int_T z\, dx\,dy\,dz$ sia per fili paralleli all'asse x che per piani paralleli a xy.

3) Sia $E = \{(x,y,z) : y^2+z^2 \leq 1,\ z^2+x^2 \leq 1\}$.
i) Provare che E è normale rispetto al piano (x,y)
ii) Calcolare il volume di E in 2 modi: 1) per fili paralleli a y
2) per fili paralleli a z.
3) per ~~fette~~. parallele a xy

4) *per CASA Vol(E) dove $E = \{(x,y,z) : y^2+z^2 \leq 1,\ x^2+z^2 \leq 1,\ x^2+y^2 \leq 1\}$. fili // z
Fare prima $\int_D \sqrt{1-x^2}\, dx\,dy$ $D = B_1 \cap \{0 \leq y \leq x\}$. <-- forse conviene vederlo normale risp. a y!

5) $T = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 5+3(y+1)\}$.

6) Volume della palla di raggio $a>0$ in $\mathbb{R}^3$

7) Baricentro di B_a^+.

8) Provare che $f(x,y,z) = |x| \in L^1(B_a)$ (B_a = palla di raggio $a>0$)
Calcolare $\int_{B_a} f\, d\lambda_3$ integrando prima per piani // a yz; ritrovare il risultato integrando per fili paralleli a x

1) Sia $p = (p_1, p_2, p_3)$ con $p_3 > 0$. Sia poi Φ l'applicazione

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{x_1, x_2} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (\mathbb{R}_{x_1 x_2} \text{ è il piano } x_1 x_2 \text{ di } \mathbb{R}^3)$$
$$(t, x) \longmapsto p + t(x - p)$$

i) Descrivere, per x fissato, l'insieme $\{\Phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$ Farne un disegno.

ii) Provare che ϕ è di classe $\mathcal{C}^1$ e scriverne la matrice jacobiana

iii) Determinare l'immagine di Φ; ϕ è iniettiva?

iv) Determinare il più grande insieme $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{x_1 x_2}$ tale che

$$\Phi : A \longrightarrow \Phi(A) \text{ sia invertibile con inversa } \mathcal{C}^1$$

v) Scrivere esplicitamente l'inversa di Φ.