Def. Una curva in $\mathbb{R}^n$ ($n=2$ o 3) è una funzione continua

$r:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$, cioè $r(t)=(r_1(t),\dots,r_n(t))$ per $t\in[a,b]$

dove $r_1,\dots,r_n$ sono funzioni continue.

Es. $r(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ è una curva in $\mathbb{R}^2$.

Def. Il sostegno di una curva $r:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ è il

SOTTOINSIEME di $\mathbb{R}^n$ $\{r(t):t\in[a,b]\}$.

Es. La curva $r(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$; il sostegno

di r è l'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\}$.

! Non confondere la curva (che è una funzione) con il

suo sostegno (che è un insieme!)

Curve diverse possono avere lo stesso sostegno: ad esempio

$r_2(t)=(\cos t^2,\sin t^2)$, $t\in[0,\sqrt{8\pi}]$ è una curva che ha

lo stesso sostegno di r; si noti che al variare di t

in $[0,2\pi]$ il punto $r_2(t)$ percorre il cerchio unitario per 4

volte in senso antiorario.

Talvolta nei testi si chiama curva il sostegno e si dice

che $r(t)$ ne è una parametrizzazione; cercheremo di evitare

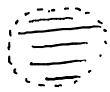
questo linguaggio: **per noi la curva è una FUNZIONE!**

Servirà qualche nozione di topologia. Se $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ e $r>0$

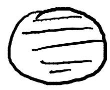
indicheremo con $B(x,r[$ la palla aperta di centro x e raggio r;

con $B(x,r]$ la palla chiusa con stesso centro e raggio, cioè

$$B(x,r[= \{y=(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| < r\}$$



$$B(x,r] = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| \leq r\}$$

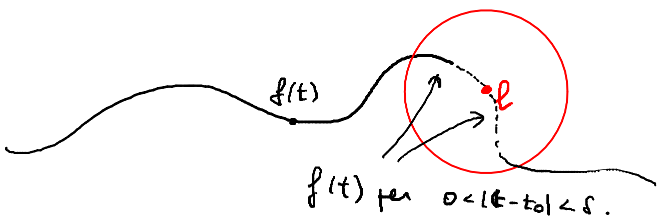


Limiti per funzioni $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$:

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $t_0 \in \overline{I}$ (chiusura di I). Se $r : I \to \mathbb{R}^n$ con $r = (r_1, \dots, r_n)$ si dice che $\lim_{t \to t_0} r(t) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ se $\lim_{t \to t_0} r_1(t) = \ell_1, \dots, \lim_{t \to t_0} r_n(t) = \ell_n$.

Per capire cosa significa $\lim_{t \to t_0} r(t) = \ell$ è molto utile la seguente caratterizzazione.

Prop. $\lim_{t \to t_0} r(t) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ t \in I, \ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|r(t) - \ell\| < \varepsilon$.



Dim. ($n=2$). Supponiamo $\lim_{t \to t_0} r(t) = \ell$, cioè $\lim_{t \to t_0} r_1(t) = \ell_1$ e $\lim_{t \to t_0} r_2(t) = \ell_2$. Fissato $\varepsilon > 0$ esistono allora $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che

$$t \in I, \quad 0 < |t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |r(t_1) - \ell_1| < \varepsilon;$$

$$t \in I, \quad 0 < |t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |r(t_2) - \ell_2| < \varepsilon.$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha allora

$$\|r(t) - \ell\| = \sqrt{|r_1(t) - \ell_1|^2 + (r_2(t) - \ell_2)^2} < \sqrt{2}\,\varepsilon.$$

(Vabbè c'è $\sqrt{2}\varepsilon$ al posto di ε ma si capisce che va bene: bastava all'inizio prendere $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ al posto di ε...)

Viceversa, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|r(t) - \ell\| < \varepsilon$ allora

Viceversa, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|r(t) - \ell\| < \varepsilon$ allora

$$|r_1(t) - \ell_1| \leq \|r(t) - \ell\| < \varepsilon \ ; \ |r_2(t) - \ell_2| \leq \|r(t) - \ell\| < \varepsilon \quad \#.$$

DERIVATE di funzioni $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Def. $r : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto (r_1(t), \dots, r_n(t))$ è derivabile in $t_0 \in [a,b]$ se

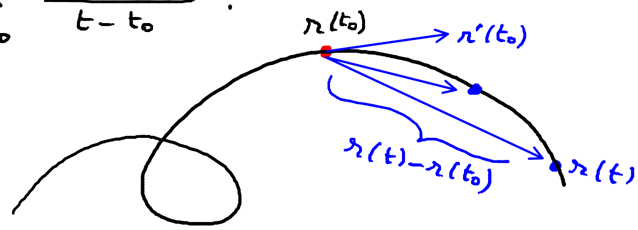
$r_1, \dots, r_n$ sono derivabili in t_0; la derivata di r in t_0, indicata

con $r'(t_0)$ è $r'(t_0) = (r_1'(t_0), \dots, r_n'(t_0))$.

OSS: Interpretazione della derivata. Supponiamo $r'(t_0) \neq 0$.

Dato che $r_1'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{r_1(t) - r_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, r_n'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{r_n(t) - r_n(t_0)}{t - t_0}$

si ha che $r'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}$.



Def. Se $r'(t_0) \neq 0$ la retta tangente a r in t_0 è la retta

per $r(t_0)$ parallela al vettore $r'(t_0)$, cioè

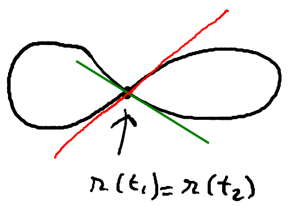
$$\{ r(t_0) + \lambda r'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

! Parliamo qui di retta tangente alla curva r in t_0, non di

retta tangente al sostegno. Si pensi ad una curva che

passa in due istanti diversi $a \leq t_1 < t_2 < b$ nello stesso

punto:



Nel disegno si vede che le rette tangenti a r in t_1 e in t_2 possono

essere diverse.

OSS: Se $r'(t_0) = 0$ non si definisce la retta tangente a r in t_0.

OSS: Se $r'(t_0)=0$ non si definisce la retta tangente a r in t_0.

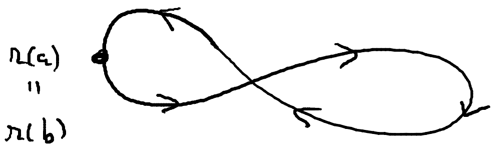
Esempio: a) $r(t)=(t^3, t^2)$ il cui sostegno, il grafico di $y=|x|^{2/3}$, ha una cuspide in $x=0$. Si noti che $r'(0)=(0,0)$.

b) $r(t)=(t^3, t^3)$: $r'(0)=(0,0)$ ma il sostegno di r è una retta.

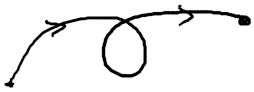
Def. Una curva $r:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ si dice chiusa se $r(a)=r(b)$

La curva r si dice semplice se $r(t_1)\neq r(t_2)$ se $t_1\neq t_2$, eccetto eventualmente $r(a)=r(b)$; cioè r è semplice se $r(t_1)\neq r(t_2)$ per ogni $t_1, t_2\in[a,b[$

b escluso!



Curva chiusa non semplice



curva non semplice.

Non basta invece il disegno del supporto per capire se una curva è semplice: il cerchio percorso 100 volte non è semplice!

SALVO eccezioni sarà sottinteso che le curve sono SEMPLICI!