N.B. Per motivi di opportunità (week end alle porte per fare esercizi) anticipiamo il calcolo di integrali multipli, rinviand o la teoria sugli integrali alle prossime lezioni.

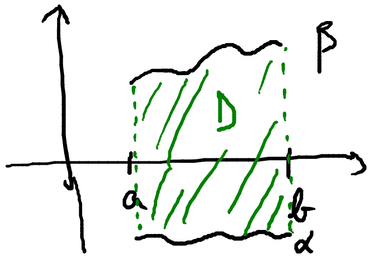
Integrali: calcolo.

Sappiamo che le funzioni continue su un insieme limitato sono integrabili.
Vediamo come si calcola l'integrale doppio su alcune regioni del piano.

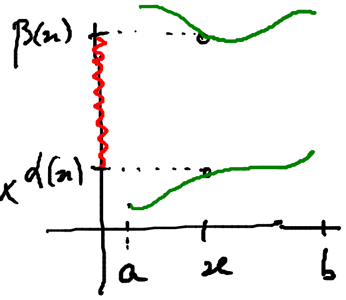
Def. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è y-semplice se

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \ \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$$

dove $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue.



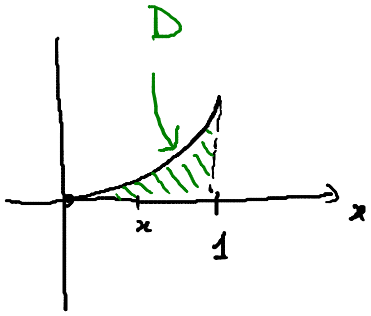
Sia f integrabile su D. Allora



$$\underbrace{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{integrale doppio di } f \text{ su } D} = \int_a^b \Big\{ \underbrace{\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy}_{\uparrow\, x} \Big\} dx$$

$$:= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

ESEMPIO Calcolare $\int_D x\cos y\,dx\,dy$



$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le x^2\}.$

D è y-normale: $x\in[0,1]$ $\quad \alpha(x)=0\le y\le \beta(x)=x^2$

$$\int_D x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 \underbrace{\int_0^{x^2} x\cos y\,dy}\,dx$$

Si calcola prima $\displaystyle\int_0^{x^2} x\cos y\,dy = x\int_0^{x^2}\cos y\,dy$

$$= x\,[\sin y]_{y=0}^{x^2} = x\sin x^2 - x\sin 0.$$

Calcoliamo ora $\displaystyle\int_0^1 \left\{\int_0^{x^2} x\cos y\,dy\right\} dx$

$$= \int_0^1 x\sin x^2\,dx = -\frac{1}{2}\left[\cos(x^2)\right]_{x=0}^{1} = -\frac{1}{2}(\cos 1-\cos 0)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos 1).$$

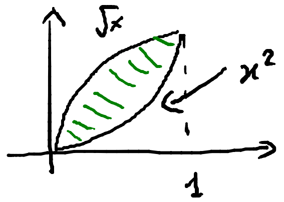
Esercizio. Calcolare $\int_D (x+y)\,dx\,dy$ $\quad D$ è la regione limitata del piano delimitata da $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$. $\quad x\ge 0.$

$x^2\le\sqrt{x} \iff x^{3/2}\le 1 \iff x\le 1.$

Su $[0,1]$ è $x^2\le\sqrt{x}$: in $]1,+\infty[$ è $x^2\ge\sqrt{x}$.

Su $[0,1]$ è $x^2 \leq \sqrt{x}$; su $[1,+\infty[$ è $x^2 \geq \sqrt{x}$.

$D = \{(x,y) : x \in [0,1] \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.



Si riconosce che D è y-normale (Tenaccini)

normale rispetto a x (De Marco).

$$\int_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \underbrace{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy}\, dx$$

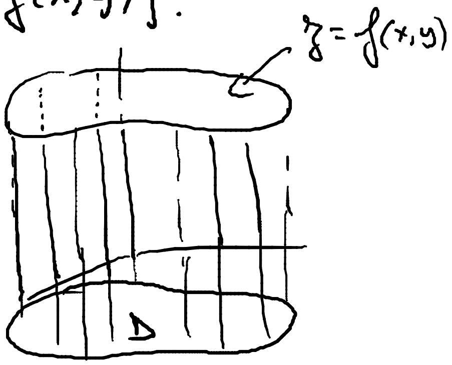
$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) - \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \ldots\ldots \text{ terminare}$$

OSS: Abbiamo visto che se $f \geq 0$ su D allora

$\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ è il volume del trapezoide di f su D:

$\{(x,y,z) : (x,y) \in D \quad 0 \leq z \leq f(x,y)\} = \text{Trap} f$



Volume di $\text{Trap} f = \lambda_3(\text{Trap} f)$

notazione

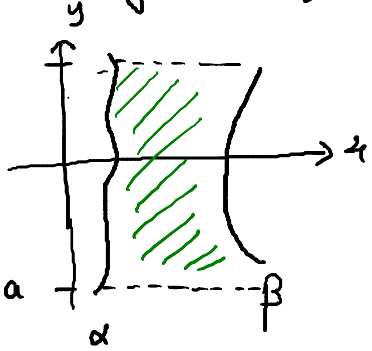
Volume di A: $\lambda_3(A)$

Area di A: $\lambda_2(A)$

Def. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è x-normale (S.T)

normale rispetto a y (D.M.)

se $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [a, b]$ e $\alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$



OSS: Supponiamo che D sia y-normale e anche x-normale.

$$D = \{ (x,y) : \; x \in [a,b] \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$$

$$= \{ (x,y) : \; y \in [c,d] \quad \gamma(y) \le x \le \delta(y) \}.$$

Se f è integrabile su D allora valgono entrambe le formule di riduzione (Teorema di Fubini)

Cioè: $$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

ESEMPIO. Consideriamo $$\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\, dy\, dx$$

Dire se si tratta della formula di riduzione di un int. doppio su una opportuna regione.

Si tratta di $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ dove $D=\{(x,y): x\in[0,4],$
$3x^2\le y\le 12x\}$.

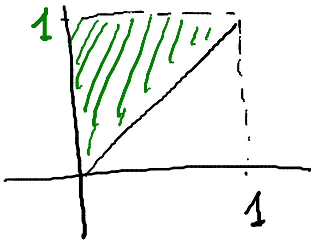
[verifica: $3x^2\le 12x$ per $x\ge 0 \iff 3x\le 12$ $x\le 4$]

ESEMPIO. Idem per $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\sin y} f(x,y)\,dx\,dy$

è $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ dove $D=\{(x,y): y\in[0,\pi]\quad 0\le x\le \sin y\}$.

ESERCIZIO. Calcolare $\int_D \sin y^2\,dx\,dy$ dove

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\in[0,1]\quad x\le y\le 1\}$.



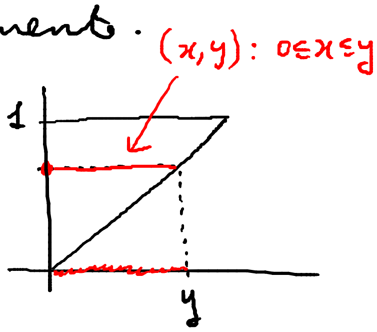
Soluzione. D è y-normale; quindi

$$\int_D \sin y^2\,dx\,dy=\int_0^1\int_x^1 \sin y^2\,dy\,dx$$

$\displaystyle\int_x^1 \sin y^2\,dy=$ Boh? $\sin y^2$ non è integrabile elementarmente.

Il dominio è anche x-normale:

$D=\{(x,y): y\in[0,1],\quad 0\le x\le y\}$



Usiamo l'altra formula di riduzione:

$$\int_D \sin y^2\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^y \sin y^2\,dx\,dy \quad \text{(T. di Fubini)}$$

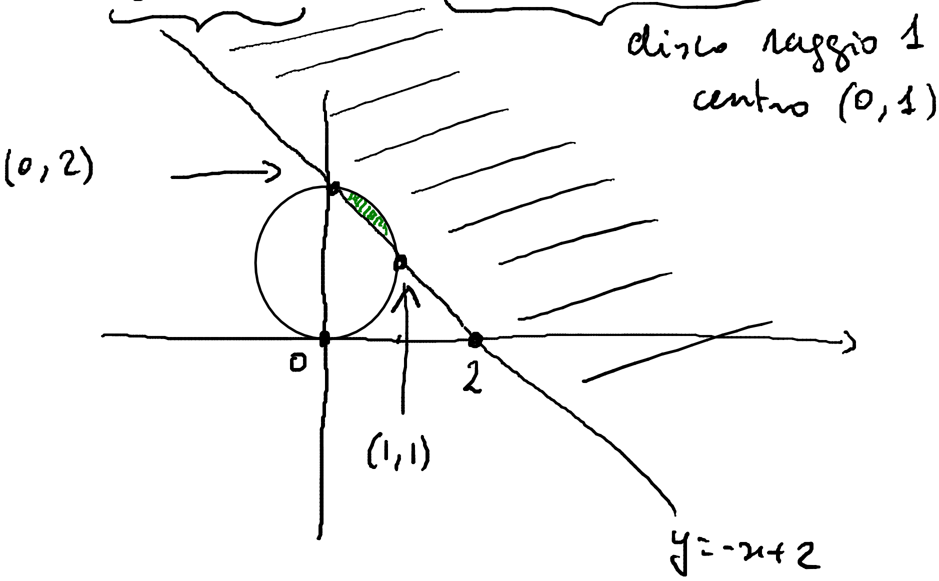
$$=\int^1 \left[x\sin y^2\right]_{x=0}^{y}\,dy=\int^1 y\sin y^2\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[x \sin y^2\right]_{x=0}^{y} dy = \int_0^1 y \sin y^2 \, dy$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\cos y^2\right]_{y=0}^{1} = -\frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2}$$

Esercizio. $\int_D x \, dx dy$ dove

$$D = \{(x,y) : \underbrace{y \geq -x+2}, \ \underbrace{x^2 + (y-1)^2 \leq 1}_{\text{disco raggio 1 centro } (0,1)}\}.$$



$$\{y = -x+2\} \cap \{x^2 + (y-1)^2 = 1\} = \{(0,2), (1,1)\}.$$

D è y-normale:

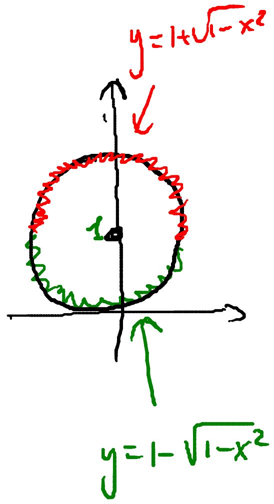
$$D = \{(x,y) : x \in [0,1] \quad -x+2 \leq y \leq \beta(x)\}$$

Per determinare $\beta(x)$: $x^2 + (\beta(x)-1)^2 = 1$

$$(\beta(x)-1)^2 = 1 - x^2$$

$$\beta(x) - 1 = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$\beta(x) = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$$



$D = \{ (x,y) : x \in [0,1] \quad -x+2 \le y \le 1 + \sqrt{1-x^2} \}.$

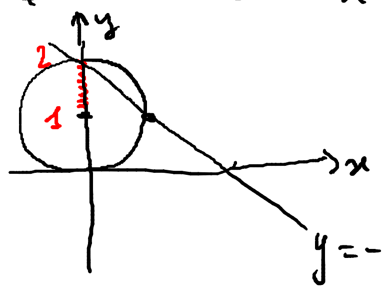
In tal caso scriviamo

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{-x+2}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x \left(1 + \sqrt{1-x^2} - (-x+2) \right) dx$$

$= \dots$ finire il calcolo.

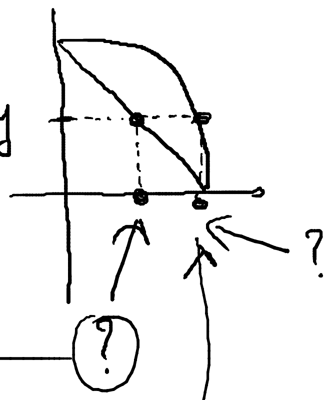
Si poteva anche vedere D come dominio x normale



$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$y = -x+2$

$D = \{ (x,y) : y \in [1,2] ,$



$y = -x+2$

$x = 2-y$

$x^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad x^2 = 1 - (y-1)^2 \qquad x = \pm \sqrt{1-(y-1)^2}$

D è x- normale: $\{ (x,y) : y \in [1,2] \quad 2-y \le x \le \sqrt{1-(y-1)^2} \}$

la formula di riduzione:

$$\int_D x \, dx dy = \int_1^2 \int_{2-y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} x \, dx \, dy$$

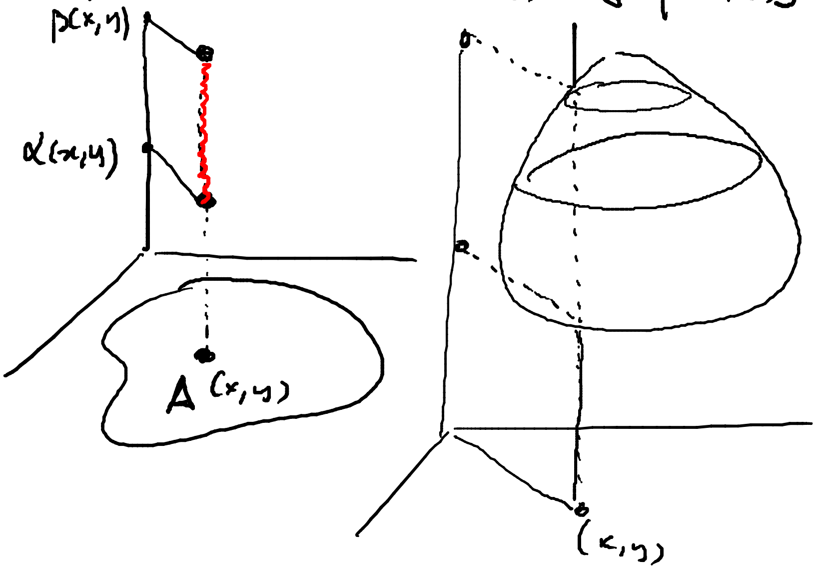
$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_{x=2-y}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dx$$

$$= \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{2} \left[(1-(y-1)^2) - (2-y)^2 \right]}_{\text{polinomio}} dy$$

Ed ecco la dimensione 3!

Def: Sia $D \in \mathbb{R}^3$. Si dice che D è z-normale (T) o normale rispetto a (x,y) (DM). se

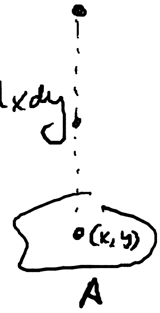
$$D = \{ (x,y,z) : (x,y) \in A \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \}$$



FORMULA di RIDUZIONE per domini z-normali.

Supponiamo che $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^3$ sia integrabile con D z-normale come nella def.

Allora $\underbrace{\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{\text{integrale 3-dim. di } f} = \int_A \left\{ \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dx\,dy$



(a volte si scrive $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$)

1) Fissati $(x,y) \in A$ calcolo l'integrale $\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

tratto (x,y) come costanti

2) Abbiamo una funzione $(x,y) \longmapsto \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$:

la integriamo su A: $\int_A \left\{ \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dx\,dy.$

$\int_A$ — è un int. doppio: se A è normale

si calcola come abbiamo visto prima.