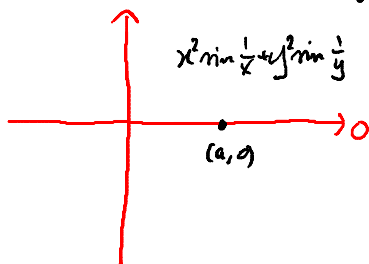


Esercizio

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ o } y=0. \end{cases}$$



Oss:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x,y)$  con  $a \neq 0$ :

$$x^2 \sin \frac{1}{x} \rightarrow a^2 \sin \frac{1}{a} \quad y^2 \sin \frac{1}{y} \rightarrow 0 \quad f(x,y) \rightarrow a^2 \sin \frac{1}{a} \neq 0$$

(a meno che  $\frac{1}{a} = k\pi$ )

$$a=1: \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = \sin(1) \neq 0.$$

$f$  non è continua in  $(1,0)$ .

i)  $f$  è differenziabile in  $(\bar{x}, \bar{y})$  con  $\bar{x} \neq 0$  e  $\bar{y} \neq 0$ ?

Sull'aperto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$   $f \in \mathcal{C}^1$ :  $\partial_x f, \partial_y f$  sono continue:  $f$  è differenziabile in  $(\bar{x}, \bar{y})$  ( $\Rightarrow$  anche in  $(1,2)$ )

ii) Il punto  $(1,0)$ .

$f$  non è continua in  $(1,0) \Rightarrow f$  non è diff in  $(1,0)$ .

Derivate parziali:

Sulla retta  $y=0$   $f \equiv 0$

$$\Rightarrow \partial_x f(1,0) = 0$$

(altro modo)

$$\partial_x f(1,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1,0)}{h} = 0.$$

$$\partial_y f(1,0) ? \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, h) - f(1,0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(1) + h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(1)}{h}$$

che non esiste ( $+\infty$  se  $h \rightarrow 0^+$ ,  $-\infty$  se  $h \rightarrow 0^-$ )

$\Rightarrow \partial_y f(1,0)$  non esiste.

iii)  $\partial_x f(0,0)$ ?  $\partial_y f(0,0)$ ? differenziabilità in  $(0,0)$ .

$$f(h,0) - f(0,0) = f(h,0) = 0$$

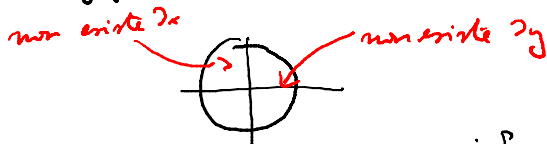
$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Analog.  $\partial_y f(0,0) = 0$ .

Differenziabilità di  $f$ : 2 strade possibili:

1) vedere se  $\partial_x f$ ,  $\partial_y f$  sono continue in  $(0,0)$ .

qui non si può fare perché ciò richiede che  $\partial_x f$  e  $\partial_y f$  esistano in un intorno di  $(0,0)$



2) usare la definizione:  $f$  differenziabile in  $P$  se  $\exists \nabla f(P)$  e

$$f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x-p) + o_p(\|x-p\|)$$

Nel nostro caso:  $f(0) = 0$   $\nabla f(0) = 0$ :

$f$  diff in  $(0,0) \Leftrightarrow f(x,y) = o(\|(x,y)\|)$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

$$|f(x,y)| = \begin{cases} |x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y}| & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ o } y=0. \end{cases}$$

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} \frac{|x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y}|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ o } y=0. \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \end{cases}$$

$$\frac{|x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y}|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x^2| |\sin \frac{1}{x}| + y^2 |\sin \frac{1}{y}|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{} 0$$

Oss: se  $f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x \in D_1 \\ g_2(x) & \text{se } x \in D_2 \end{cases}$   $\begin{matrix} g_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} l \\ x \in D_1 \end{matrix}$   $\begin{matrix} g_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} l \\ x \in D_2 \end{matrix}$

$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} l$  (essenzialmente  $x$  caso).  
 $x \in D_1 \cup D_2$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow f$  è differenziabile in  $(0,0)$

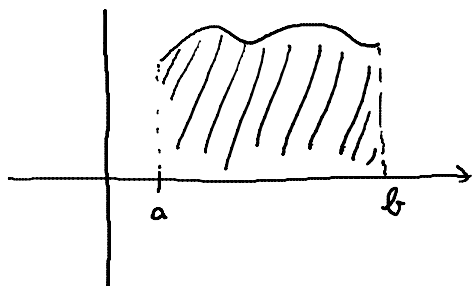
$$(x,y) \rightarrow (0,0) \quad ||(x,y)||$$

## INTEGRALI.

Fissiamo  $n=2$  (lavoriamo in  $\mathbb{R}^2$ )

La nozione di int. di Riemann è strettamente legata alla nozione di misura.

Se  $f \geq 0$  su  $[a, b]$   $f$  è integrabile alla Riemann se e solo se  $\text{trap}(f)$  è misurabile alla Peano-Jordan e la misura di  $\text{trap}(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

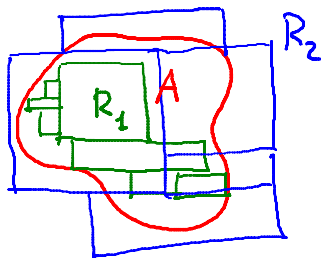


Quindi disponendo di una nozione di "misura" dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  si possono calcolare gli integrali (di funzioni positive):  $\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(\text{trap}(f))$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$  LIMITATO è misurabile alla Peano-Jordan se  $\forall \varepsilon > 0$  esistono due insiemi  $R_1 \subseteq A \subseteq R_2$  con  $R_1$  e  $R_2$  unioni finite di rettangoli con interni a due a due disgiunti tali che

$$\text{Area}(R_2) - \text{Area}(R_1) \leq \varepsilon.$$

(area di  $R_2$  = somma delle aree dei rettangoli che lo compongono).



Quindi: più si misurano le aree più si calcolano integrali.

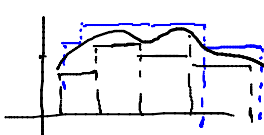
Esempio:  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale di } [0,1] \\ 0 & \text{se } x \text{ non è razionale in } [0,1]. \end{cases}$

(funzione di Dirichlet).

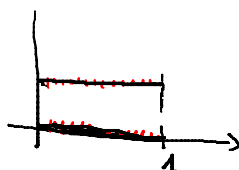
$f$  non è Riemann integrabile:

Se  $f$  è Riemann integrabile allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono due funzioni a scalino (costanti su intervalli)  $u$  e  $v$  con  $u \leq f \leq v$  e  $\int v - \int u \leq \varepsilon$ .

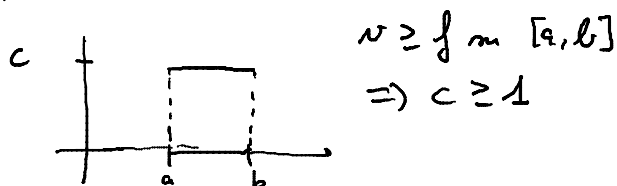
  $\int u = \text{SOMMA aree rettangoli.}$

 Se  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

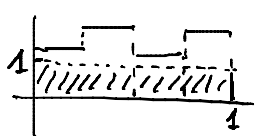
consideriamo  $v$  a scalino  $f \leq v$



Supponiamo  $v(x) = c$  su un intervallo  $[a, b]$



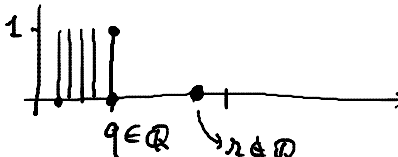
$v: \int v \geq 1$  dappertutto  $\int v \geq 1$



Analogamente se  $u \leq f \Rightarrow u \leq 0 \Rightarrow \int u \leq 0$

Allora  $\int v - \int u \geq 1$ : quindi se  $\varepsilon < 1$  non esistono  $u$  e  $v$  a scalino con  $u \leq f \leq v$  e  $\int v - \int u \leq \varepsilon$ .  
 $\Rightarrow f$  non è int. alla Riemann.

$\text{Trap}(f) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{q\} \times [0,1]$   
 $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{unione infinita numerabile}}$



Cosa vuol dire numerabile?

Def: Un insieme  $A$  si dice numerabile se  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ , e  $A$  è infinito.

E:  $\mathbb{Q}$  è numerabile.

Elenciamo in successione i razionali positivi.

$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{4}{1} \rightarrow \frac{5}{1} \dots$



$$\text{se } b=+\infty \text{ o } a=-\infty: \quad \underbrace{(b-a)}_{+\infty} \times \underbrace{(d-c)}_{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > c \\ 0 & \text{se } c = d \end{cases}$$