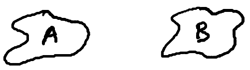
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ qualunque

$$\lambda_2^*(A) = \inf \Big\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} m_2(R_i)}_{\text{SOMMA di una serie}} : R_i \text{ rettangoli}, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \Big\}$$

λ_2^* è una misura ?

Cosa vogliamo da una buona misura ?

- Se $A \subseteq B$ $\quad \lambda_2^*(A) \le \lambda_2^*(B)$: vero

- 

$A \cap B = \emptyset$

Se λ_2^* è una misura con buone proprietà (pensiamo AREE)

$$\lambda_2^*(A \cup B) = \lambda_2^*(A) + \lambda_2^*(B)$$

ACCIDENTI questo in generale è falso!

Si dimostra che esiste una famiglia $\mathcal{L}_2$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ GIGANTESCA (contiene aperti, chiusi, unioni numerabili di aperti, chiusi, ...) tale che λ_2^* ristretta agli insiemi di $\mathcal{L}_2$ si comporta bene: la chiameremo λ_2 (misura di Lebesgue)

$\mathcal{L}_2$ = insiemi misurabili alla Lebesgue (LEBESGUE).

Nella pratica è impossibile costruire a mano un insieme non misurabile. Per un esempio di insieme non misurabile si deve ricorrere all'assioma della scelta, i curiosi possono vedere il famoso Esempio di Vitali di insieme non misurabile su http://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set

PROPRIETÀ DI $\mathcal{L}_2$:

1) $\emptyset \in \mathcal{L}_2$, $\quad \mathbb{R}^2 \in \mathcal{L}_2$

2) $A \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus A \in \mathcal{L}_2$ $\quad \infty$

3) $A_1, A_2, .., A_n, \ldots \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \bigcup_{i=1} A_i \in \mathcal{L}_2$

(unione numerabile di insiemi misurabili è misurabile).

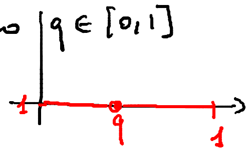
OSS: La 3) è falsa se al posto di $\mathcal{L}_2$ si considerano i misurabili alla Peano Jordan.

Ricordiamo che ad esempio se $f : [a,b] \to [0, +\infty[$ allora $\mathrm{Trap}(f)$ è misurabile alla P-J se e solo se f è integrabile alla Riemann.

f è integrabile alla Riemann.

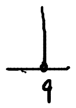
Es: $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, fissiamo $q \in [0,1]$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x=q \\ 0 & \text{se } x \neq q \end{cases}$$



f è integrabile alla Riemann e $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

Area (Trap f) = Area 

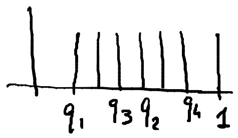
 $\{q\} \times [0,1]$

Quindi il segmento verticale

è misurabile alla Peano-Jordan.

Consideriamo ora l'insieme $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dei razionali

di $[0,1]$. Sia $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\} \times [0,1]$



A è il trapezoide di $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

che non è integrabile alla Riemann $\Rightarrow$ A NON è

misurabile alla Peano-Jordan.

Quindi: unione numerabile di misurabili alla P-J in generale NON è mis. alla P-J.

PROPRIETÀ di λ_2^*.

DEF. D'ora in poi poniamo $\lambda_2(A) \stackrel{def}{=} \lambda_2^*(A)$ se $A \in \mathcal{L}_2$. λ_2 si chiama MISURA DI LEBESGUE 2-dimensionale.

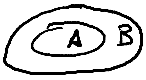
PROP: • $\lambda_2(\emptyset) = 0$

• Se $R = (a,b) \times (c,d)$ $\quad \lambda_2(R) = m_2(R)$

• Se A è mis. alla P-J $\Rightarrow A \in \mathcal{L}_2$ e mis (A) alla P-J $= \lambda_2(A)$

- Se $A, B \in \mathcal{L}_2$ $\quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

(*) $\quad \lambda_2(A \cup B) = \lambda_2(A) + \lambda_2(B)$



- $A \subseteq B$ e $\lambda_2(B) < +\infty$

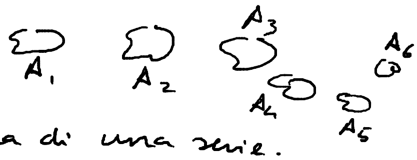
$\Rightarrow \lambda_2(B \setminus A) = \lambda_2(B) - \lambda_2(A)$.

- NUMERABILE ADDITIVITÀ:

In realtà vale una proprietà molto più generale di (*):

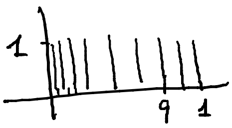
Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{L}_2$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ allora

$$\lambda_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_2(A_i)}_{\text{attenzione: questa è la somma di una serie.}}$$



- Gli insiemi che hanno misura esterna nulla sono misurabili: se $\lambda_2^*(A) = 0$ allora $A \in \mathcal{L}_2$.

ESEMPIO. Sia $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{q\} \times [0,1]$:



Dato che

A è misurabile alla Lebesgue.

$$\lambda_2(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_2(\underbrace{\{q\} \times [0,1]}_{\text{rettangolo}})}_{m_2(\{q\} \times [0,1]) = 0} = 0$$

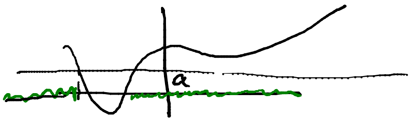
INTEGRALE DI UNA funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty[$

L'ipotesi di misurabilità sostituisce quella di continuità.

Def. (FUNZIONE MISURABILE).

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice misurabile se per ogni $a \in \mathbb{R}$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ si dice misurabile se per ogni $a\in\mathbb{R}$ l'insieme $\{x\in\mathbb{R}^2 : f(x)>a\}\in\mathcal{L}_2$



Nella pratica non è possibile costruire a mano (componendo funzioni, definendole su vari insiemi spezzati, ecc...) una funzione non misurabile.

Es: Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua. Allora f è misurabile: fissiamo $a\in\mathbb{R}$ e consideriamo l'insieme $\{x : f(x)>a\}$: si tratta di un insieme aperto $\Rightarrow \in\mathcal{L}_2 \Rightarrow f$ è misurabile.

Misura di Lebesgue in dimensione $n=1$ o $n=3$:

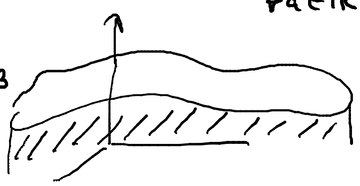
Si può rifare tutta la costruzione in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^3$ e si ottengono: $\mathcal{L}_1, \lambda_1$; $\mathcal{L}_3, \lambda_3$

"lunghezza" (λ_1), "volume" (λ_3)

mis. alla Lebesgue in $\mathbb{R}$ ($\mathcal{L}_1$)

mis. alla Lebesgue in $\mathbb{R}^3$ ($\mathcal{L}_3$)

OSS: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ è misurabile (cioè $\{x: f(x)>a\}\in\mathcal{L}_2 \ \forall a\in\mathbb{R}$) se e solo se $\mathrm{Trap}(f)\in\mathcal{L}_3$



DEF (integrale di Lebesgue) in $\mathbb{R}^2$:

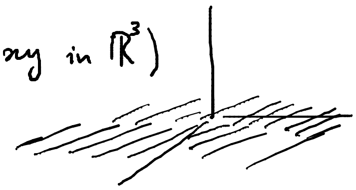
- Sia $f:\mathbb{R}^2\to[0,+\infty[$ misurabile. L'integrale (alla Lebesgue) di f è

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\lambda_3(\mathrm{Trap}\, f)}_{\text{"volume" di Trap} f}$$

- Analogamente se $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty[$ misurabile, l'integrale di Lebesgue di f è $\underset{\text{def}}{=} \lambda_2(\text{Trap} f)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

OSS: • $\underbrace{\mathbb{R}^2 \times \{0\}}_{\text{parallelepipedo}} \subseteq \mathbb{R}^3$ (piano xy in $\mathbb{R}^3$)



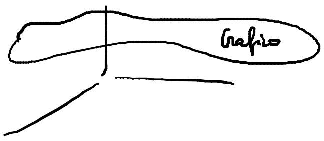
$\lambda_3(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = m_3(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$
$= 0.$

• Invece $\lambda_2(\mathbb{R}^2) = +\infty$

• Si dimostra che se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è misurabile

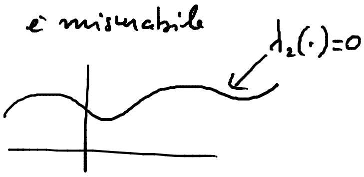
allora il grafico di f è misurabile e

$\lambda_3(\text{Grafico di } f) = 0$



• Analogamente se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è misurabile

$\Rightarrow \lambda_2(\text{Grafico di } f) = 0$



INTEGRALE di una funzione qualunque.

parte positiva di x

OSS: Sia $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{x = x^+ - x^-}$ dove

parte negativa

Es
$(-3)^+ = 0$
$(-3)^- = 3$

$x^+ = \max\{x, 0\}$; $x^- = \max\{-x, 0\}$
$x^+ \geq 0$ $\quad$ $x^- \geq 0$

Se $x \geq 0$ $\quad x^+ = x \quad x^- = 0 \quad x^+ - x^- = x$

Se $x \leq 0$ $\quad x^+ = 0 \quad x^- = -x \quad x^+ - x^- = x$

Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiamo $f^+(x) = (f(x))^+$

parte positiva di f

$f^-(x) \overset{\text{def}}{=} (f(x))^-$; $f^+, f^-: \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$

se f è misurabile anche f^+ e f^- lo sono.

DEFINIZIONE di $L^1(\mathbb{R}^2)$ (= funzioni SOMMABILI alla Lebesgue in $\mathbb{R}^2$).

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ MISURABILE

Si dice che f è SOMMABILE alla LEBESGUE ($f \in L^1(\mathbb{R}^2)$)

se $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f^+(x,y)\,dx\,dy < +\infty$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f^-(x,y)\,dx\,dy < +\infty$

L' integrale di Lebesgue di f è

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} f^+(x,y)\,dx\,dy - \int_{\mathbb{R}^2} f^-(x,y)\,dx\,dy}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda_2$$

- Questa definizione si estende in modo analogo su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{R}^2$, ..

PROPRIETÀ di L^1

- Se $f,g \in L^1$, $f+g \in L^1$ $\int f+g = \int f + \int g$
- Se $f \leq g$ $f,g \in L^1$ $\int f \leq \int g$
- $\underbrace{f \in L^1 \Longleftrightarrow |f| \in L^1}_{\text{ESERCIZIO per CASA}}$ e $\underbrace{\left|\int f\right| \leq \int |f|}_{\text{DIM. UTILIZZANDO le PROP. precedenti}}$.

Sugg.: $x = x^+ - x^-$

$|x| = x^+ + x^-$